ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Основы теории вероятностей и математической статистики.

Аннотация к занятию: на данном уроке обучающиеся знакомятся с основами теории вероятностей и математической статистики. В первой части урока они поговорят о терминах, принятых в теории вероятностей, узнают, что такое пространство элементарных исходов, разберут вероятностное пространство. Во второй части урока закрепят полученные знания решением задач по данной теме.

Цель занятия: знакомство учащихся с основами теории вероятности и математической статистики.

Задачи занятия:

- познакомить с понятиями теории вероятностей;
- научить вычислять вероятности событий;
- обсудить понятие независимости событий;
- применить полученные знания на практике.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	2 мин.	Здравствуйте! Как ваше настроение?	Приветствие. Создание в классе атмосферы психологического комфорта
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	10 мин.	Благодаря линейной алгебре мы разобрались, как компьютер представляет наборы данных и управляет ими. Пришла пора разобраться в теории вероятностей и статистике, которые нужны, во-первых, чтобы научиться видеть в данных закономерности и делать о них предположения (гипотезы), а во-вторых, чтобы определять, какие шаги сделать для решения практической задачи в машинном обучении. Обратимся к исторической справке (просмотр сюжета о зарождении «Теории вероятностей»): https://www.youtube.com/watch?v=RGQAS23GwRA&t=71s	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов

Изучение нового материала	50 мин.	**Вопрос для обсуждения** Как устроен процесс анализа данных? **Есть два основных подхода:** статистический и визуальный. Визуальный анализ помогает увидеть общую картину исследования и оценить характер данных в датасете. Давайте разбираться, что представляет собой статистический подход. Математическая статистика — это большой раздел математики, который профессиональные аналитики данных изучают годами. Нам будет достаточно основ, чтобы научиться делать верные выводы на основе информации из набора данных. Статистический подход помогает проводить точные исследования, находить неочевидные связи внутри датасетов и ставить гипотезы. Методы статистики нужны, чтобы считать максимальные, минимальные и средние значения переменных, знать, какие значения переменных встречаются чаще, а какие реже, и так далее. Звучит скучновато? А как же рейтинги фильмов или блогеров, сравнение результатов чемпионов и любимых спортивных команд? Статистика поможет нам разобраться в собранных данных и оценить их. Начнём. Базовые понятия теории вероятностей — испытания и события. Представьте, что мы проводим некоторое испытание или эксперимент со случайным исходом. Это значит, что единственного правильного ответа не существует. Например, подбрасываем монетку. У нас может быть только два исхода: выпадет орёл или решка. Ребро маловероятно. Испытание в теории вероятностей — это некоторый эксперимент, который мы можем провести неограниченное количество раз.	Для справки: Сайт: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3751/conspect/326747/ Перед уроком рекомендуется ознакомиться с материалами, представленным и на сайте.

		Например, бросок монетки. А вот большой взрыв экспериментом назвать нельзя, потому что представить себе, что он повторится, невозможно. Вместо монетки можно бросать кубик. Ещё один пример модельного эксперимента — вытаскивание шара наудачу из мешка с шарами. Результат эксперимента с вытягиванием шара — какой-то конкретный вытянутый шар. Такой элементарный результат одного эксперимента называется элементарным исходом. В нашем эксперименте с монеткой всего два элементарных исхода — выпал орёл и выпала решка. Всё множество возможных элементарных исходов (то есть результатов эксперимента) называется пространством элементарных исходов. Обычно это множество обозначается греческой буквой Омега большое, которую вы видите на экране. Например, в случае с броском монетки, пространство элементарных исходов — это множество из двух элементов, орла и решки. В обоих примерах все элементарные исходы были равновероятны: монетка честная, то есть вероятность орла равна ½. Шары в мешке одинаковые, поэтому вероятность вынуть какой-то конкретный равна единице делить на количество шаров в мешке. Пока что мы будем работать именно с этим случаем. Давайте решим задачу на эту тему. Она сформулирована в терминах вероятностей, но на самом деле по комбинаторике.	

Итак, условие. Ребёнок играет с 10 буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «математика»? Попробуйте решить задачу самостоятельно.

Решение

Сначала формализуем задачу в терминах, которые мы только что изучили. Наш эксперимент — это расположение букв в случайном порядке. Определим пространство элементарных исходов. Поскольку нас интересует случайное расположение наших букв в ряд, одним элементарным исходом и будет одна перестановка. Обратите внимание, что всего перестановок букв больше, чем возможных слов, которые у нас могут получиться. Например, в слове «математика» можно переставить две буквы М местами, и слово не изменится, но сами буквы разные.

Тогда наша задача — найти вероятность того, что мы попали в подходящий нам элементарный исход, то есть любую перестановку букв, в результате которой получается слово «математика». Иными словами, для решения задачи необходимо просто найти количество способов переставить буквы так, чтобы получилась «математика», а затем разделить это число на общее количество элементарных исходов, то есть общее количество перестановок.

Первым делом найдём количество подходящих перестановок. Для удобства давайте пронумеруем все дублирующиеся буквы отдельными номерами: А_1, А_2, А_3, М_1, М_2, Т_1, Т_2. Тогда перестановки букв в слове «математика» сводятся к перестановкам номеров этих букв на своих фиксированных позициях.

Сколько у нас способов расставить буквы А на свои места? Это количество равно количеству всех возможных перестановок цифр 1 2 3.
Это, как известно, 3 факториал, то есть 3 * 2 * 1 = 6. Далее, количество способов расставить буквы М на свои места равно 2! = 2. Наконец, два способа расставить буквы Т на свои позиции. Поскольку расстановки этих букв независимы друг от друга, общее количество подходящих перестановок букв А, М, Т по своим позициям равно 3! умножить на 2! умножить на 2! равно 24.

Идём дальше. Посчитаем количество элементов в пространстве элементарных исходов. Пространство элементарных исходов представляет множество всех перестановок букв, которых всего 10 штук, то есть всего перестановок 10!.

Теперь мы готовы записать ответ — это частное 3! * 2! * 2! делить на 10!. Досчитывать ответ до конца мы не будем, можно оставить в таком виде.

Давайте проанализируем решение предыдущей задачи. Помимо пространства элементарных исходов, у нас появилось понятие вероятности. В этой задаче все перестановки букв были равновероятны, то есть все элементарные исходы выпадали с одной вероятностью. В общем случае это может быть не так.

Пусть омега — это пространство элементарных исходов, состоящее из элементов омега_1, ..., omega_n.

Кстати, не путайте омегу с буквой w!

Присвоим каждому элементу омега_i число p_i, имея в виду, что p_i — вероятность выпадения этого исхода. Причём сделаем это

		так, чтобы сумма $p_1 + \ldots + p_n$ была равна единице — как и положено сумме вероятностей. Совокупность пространства элементарных исходов и соответствующих им вероятностей и называется вероятностным пространством. В решённой задаче мы находили вероятность того, что буквы случайно сложились в слово «математика». Иными словами, мы считали вероятность некоторого события, которое состояло из некоторых элементарных исходов. В данном случае, возможных перестановок. Введём формальное определение. Событием мы будем называть некоторое подмножество вероятностного пространства. Интуитивный смысл таков: если мы попали в это подмножество, то событие произошло. Например, если мы рассматриваем событие «буквы образуют слово „математика“», то в нём содержатся те элементарные исходы, то есть те перестановки, которые и образуют слово «математика». Вероятностное пространство и события в нём удобно для наглядности изображать геометрическими фигурами — диаграммами Венна. Например, на картинке изображены три события, A, B и C. События A и B пересекаются, B и C также пересекаются, а вот A и C пересечения не имеют. Это означает, что A и C одновременно никогда не происходят. События происходят с некоторой вероятностью. Например, в предыдущей задаче нужное событие происходило с вероятностью 24 делить на 10 факториал. Мы уже поняли, что для этой задачи вероятность вычислялась как количество элементарных исходов (то есть перестановок) в событии делить	

		на общее количество элементарных исходов (то есть перестановок). В общем случае вероятность события A обозначается как P(A). Как вычислить вероятность события? Событие произошло, если произошёл один из его элементарных исходов. Значит, вероятность события A равна сумме вероятностей всех элементарных исходов в A. Давайте укажем полезные свойства вероятности, которые мы будем использовать при решении задач. Первое свойство мы уже называли. Вероятность всего пространства элементарных исходов омега равно единице. То есть, если событие происходит всегда, его вероятность равна единице. Второе свойство не менее важное. Вероятность любого события лежит в промежутке от 0 до 1. Третье свойство. Пусть события A и B не пересекаются, и мы знаем вероятности обоих событий. Тогда можно вычислить вероятность их объединения: P(A, объединённого с B) равна вероятности A плюс вероятность B. Четвёртое свойство — это обобщение третьего на случай пересекающихся множеств. Если у нас есть множества A и B, то вероятность A, объединённого с B, равна вероятности A плюс вероятность B минус вероятность пересечения. На картинке это сразу становится понятно: справа, когда мы сложили вероятности множеств A и B, мы посчитали дважды элементарные исходы внутри A, пересечённого с B. Поэтому мы должны их вычесть. Наконец, пятое свойство. Пусть множество A содержится во множестве B. Тогда вероятность множества B без A равна	

		вероятности множества B минус вероятность множества A. Если B равно всему множеству Omega, то получается, что вероятность дополнения события A равна 1−Omega. Это логично: если случилось дополнение события A, значит, что событие A не случилось. То есть событие A не случается с вероятностью 1 минус P(A). Дополнение множества обозначается с помощью черты над этим множеством. Под конец занятия решим ещё одну задачу, чтобы проиллюстрировать идею вероятностного пространства. Задача такая. ДНК снежного человека — это последовательность из 100 нуклеотидов двух типов: A и B. Нуклеотид равен A с вероятностью p и B с вероятностью 1 − p. Под воздействием облучения нуклеотид A мутирует с вероятностью q, а нуклеотид B — с вероятностью r. С какой вероятностью мутирует не более одного нуклеотида? Попробуйте решить задачу самостоятельно. Сформулируйте, что в задаче будет вероятностным пространством, что элементарными исходами, а что — целевым событием. Наше решение будет состоять из нескольких шагов. Сначала нам нужно определить пространство элементарных исходов. Далее описать событие, вероятность которого нужно найти. Затем вычислить вероятности каждого элементарного исхода, то есть полностью задать вероятностное пространство. И, наконец, вычислить вероятность искомого события как сумму вероятностей всех элементарных исходов в этом событии. Первый пункт — пространство элементарных исходов. Рассмотрим какую-нибудь последовательность нуклеотидов длиной 100. Нарисуем над буквой волну, если соответствующий	

нуклеотид мутировал. Тогда наш элементарный исход — это последовательность букв А и В с расставленными в некоторых местах волнами.

Любая такая последовательность возможна, просто с разной вероятностью. Поэтому, внимание, наше пространство элементарных исходов — это множество всех возможных последовательностей длиной 100. Давайте посчитаем количество всех возможных таких последовательностей. На первой позиции может стоять один из 4 вариантов — А, А с волной, В или В с волной. Аналогично на любой другой позиции. Поэтому всего таких последовательностей 4 умножить на 4 … умножить на 4, то есть 4 в степени 100.

Для последовательностей длиной 100 сложно выписать все возможные последовательности — просто потому что их очень много, так что давайте сделаем это хотя бы для длины 2. Они перед вами на экране. Всего 16 последовательностей.

Опишем событие, вероятность которого нам нужно найти. А именно мутацию не больше одного нуклеотида в последовательности. В терминах элементарных исходов нам подходят те последовательности из букв, где есть не больше одной волны над буквой. Скажем, для последовательностей длиной 2 будет всего 12 таких последовательностей, вы их видите на экране. Несложно убедиться (пожалуйста, сделайте это), что для последовательностей длиной 100 всего будет ровно 101 умножить на 2^100 последовательностей, которые нам подходят.

Третий пункт: необходимо задать вероятности всех элементарных исходов. Для этого сначала посчитаем вероятности того, что какой-то конкретный нуклеотид равен А, В, А с волной и В с

		волной. Вероятность того, что нуклеотид равен А, равна p умножить на (1-q), то есть произведению вероятности того, что изначальный нуклеотид равен А, умножить на вероятность того, что А не мутировал. Далее, аналогично, вероятность того, что нуклеотид равен А с волной, равна p умножить на q. Наконец, вероятности того, что нуклеотид равен В и В с волной, равны соответственно (1-p) на (1-r) и (1-p)r. Тогда чему равна вероятность какого-то конкретного элементарного исхода? Пусть в нуклеотиде всего n_1 букв А, n_2 букв А с волной, n_3 букв В и n_4 букв В с волной. Мы можем считать, что все нуклеотиды не зависят друг от друга, поэтому вероятность элементарного исхода равна вероятности буквы А в степени n_1 умножить на вероятность буквы А с волной в степени n_2 умножить на вероятность буквы В в степени n_3 умножить на вероятность В с волной в степени n_4. Ура! Вероятностное пространство полностью задано, теперь можем приступать к решению. Напомню, нам нужно найти вероятность того, что последовательность содержит не более одной буквы с волной. Мы, конечно, могли бы вручную посчитать вероятности нужных нам элементарных исходов, но этот способ оказывается довольно сложным. Вместо этого найдём вероятность того, что какой-то конкретный нуклеотид мутировал. Эта общая вероятность вычисляется как вероятность А с волной плюс вероятность В с волной и равна pq+ (1-p)r. Обозначим её через альфа. Соответственно, вероятность отсутствия мутации равна 1 − альфа, равна p(1−q) + (1−p)(1−r) = q − pq + pr − r + 1. Найдём теперь вероятность того, что в последовательности нет мутаций вообще. Это, кстати, целое подмножество вероятностного пространства, которое выписано на картинке для примера n = 2. Назовём это событие А. Вероятность события А	

		равна (1 – альфа) в степени 100, поскольку у нас всего 100 позиций, на каждой из которых мутация не происходит с вероятностью 1 – альфа. Затем найдём вероятность того, что произошла единственная мутация, причём на какой-то конкретной позиции k. Обозначим это событие как B с нижним индексом k. Вероятность B_k не зависит от k и равна альфа умножить на (1 – альфа) в степени 99. Тогда вероятность того, что произошла ровно одна мутация (обозначим это событие как B, где B равно объединению B_1, ..., B_100), равна сумме вероятностей по всем возможным позициям мутации, то есть 100 умножить на альфа умножить на (1 – альфа) в степени 99. Наконец, последний шаг. Событие того, что произошло не более одной мутации, является объединением событий A и B. Вероятность объединения событий равна сумме вероятностей, поскольку события не пересекаются. Сложим вероятности событий A и B и получим итоговый ответ, который вы видите на слайде. Введём определение независимости и поговорим о её значении. Решим задачу и изучим виды независимости событий: попарную независимость, независимость в совокупности и их связь между собой. Начнём с определения. Пусть у нас есть некоторые события A и B — подмножества нашего вероятностного пространства Омега. События A и B называются независимыми, если вероятность пересечения событий A и B равна произведению вероятностей событий A и B.	

Обсудим интуитивный смысл независимости событий. Давайте нарисуем картинку, которая прояснит это определение. Вероятностное пространство изобразим большим прямоугольником. События A и B изображены вертикальным и горизонтальным прямоугольниками, а их пересечение — это прямоугольник слева вверху. Будем, как и раньше, считать, что вероятность подмножества равна площади соответствующей фигуры.

На картинке видно, что отношение площади пересечения делить на площадь прямоугольника A равно отношению площади B делить на площадь всего Омега. Мы условились, что площадь Омеги равна вероятности Омеги, то есть единице (поскольку, как мы договорились, вероятность всего пространства элементарных исходов равна единице). Поэтому такие события, в соответствии с нашим определением, будут независимыми. Это очень логично. Представьте, что мы кидаем случайную точку в наш прямоугольник, соответствующий множеству Омега. Тогда это то же самое, что сначала случайно выбрать координату нашей точки по оси x, а затем — по оси y. Тогда то, попала ли наша случайная точка в множество A, определяется только координатой точки по иксу. Соответственно, попадание точки в множество B определяется исключительно координатой по игреку и не зависит от координаты по иксу. Таким образом, события о попадании точки в A и B определяются независимыми друг от друга координатами x и y. Это и означает, что события A и B независимы.

Независимость событий буквально означает, что информация о том, случилось ли событие A, не даёт нам никакой информации о том, случилось ли событие B.

		В качестве примера независимых событий приведём последовательные броски монетки. Рассмотрим вероятность того, что на первой монетке выпал орёл. Она равна ½, то же самое и со второй монеткой. Соответственно, вероятность того, что орёл выпал в обоих экспериментах, равна ¼, что равно произведению ½ и ½. Это и означает, что соответствующие события независимы. Обратите внимание, что независимость одного события от другого — это не то же самое, что отсутствие причинно-следственной связи между ними. Например, событие «школьник поступил в сильный вуз» зависит от события «школьник хорошо сдал экзамен». Поэтому они независимыми не являются: второе событие делает первое более вероятным. Но если мы знаем, что школьник поступил в сильный вуз, то можем предположить, что он хорошо сдал экзамен. Поэтому событие «школьник хорошо сдал экзамен» зависит от события «школьник поступил в сильный вуз», хотя причинно-следственная связь здесь в обратную сторону. Да и вообще, определение независимости событий не изменяется при перестановке событий: если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Освоимся с понятием независимости и решим задачу. A и B играют в игру из n раундов. В каждом раунде игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игрок B — 2 кости одновременно с игроком A. Как только один из игроков выбрасывает на одной из костей «шестёрку», игра заканчивается победой этого игрока. Если шестёрка появилась одновременно (или не появилась вообще за n раундов), объявляется ничья. Какова вероятность победы первого игрока? Попробуйте решить задачу самостоятельно.	

		Решение основано на идее независимости. Для любых двух различных бросков кубиков события «на одном кубике выпала шестёрка» и «на другом кубике выпала шестёрка» независимы между собой. Посмотрим на один раунд игры. Найдём вероятность того, что в этом раунде игра закончится победой первого — обозначим её через p, а также вероятность того, что в этом раунде ни у кого не выпала шестёрка — то есть, что игра продолжается дальше. Ещё раз отмечу, что все броски кубиков независимы. Посчитаем вероятность p. Вероятность события, что в данном раунде игрок A выбросил хотя бы одну шестёрку, а B не выбросил ни одной шестёрки, равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность того, что A выбросил хотя бы одну шестёрку, равна единице минус вероятности того, что ни одной шестёрки выброшено не было, а эта вероятность равна $\frac{5}{6}$ в кубе. В самом деле, у нас всего три независимых кубика: вероятность того, что на каком-то конкретном не выпала шестёрка, равна $\frac{5}{6}$, то есть вероятность невыпадения ни одной шестёрки равна $\frac{5}{6}$ в кубе. Вероятность того, что B в этом раунде не выбросил шестёрку, равна $\frac{5}{6}$ в квадрате, так как у него всего два кубика. В итоге искомая вероятность p равна 1 минус $\frac{5}{6}$ в кубе умножить на $\frac{5}{6}$ в квадрате. Точно так же вычисляем вероятность q. Она равна произведению $\frac{5}{6}$ в кубе на $\frac{5}{6}$ в квадрате, то есть $\frac{5}{6}$ в пятой — опять же, из-за	

		независимости всех бросков кубика между собой. Отлично, мы нашли искомые вероятности. Идём дальше. Если мы хотим найти вероятность того, что A выиграет, давайте сначала найдём вероятность того, что он выиграет в каком-то конкретном раунде. Обозначим через M_k событие, в котором A выиграл именно в раунде с номером k. Давайте найдём вероятность этого события $P(M_k)$. Что означает, что A выиграл именно в k-ом раунде? Это значит, что до k-ого раунда все раунды были без шестёрок, а в k-ом раунде A выбросил шестёрку, а B нет. Вероятность того, что в раунде не было шестёрок, как мы выяснили, равна q, а вероятность победы первого в конкретном раунде равна p. Поскольку раунды независимы друг от друга, искомая вероятность равна q в степени $k-1$ умножить на p. Наконец, последний шаг. Вероятность победы складывается из вероятностей событий M_k по всем k от 1 до n. В самом деле, если A выиграл, то он выиграл в каком-то конкретном раунде. Найдём $P(M_1) + \ldots + P(M_n)$. Записываем выражение. Подставляем полученные значения для вероятности $P(M_k)$. Получаем сумму q в нулевой на p плюс q в первой на p плюс и т.д. плюс q в $n-1$ степени на p. Выносим p за скобку и по формуле сворачиваем сумму геометрической прогрессии. В итоге получаем p на дробь 1 минус q^n делить на $1-q$.	

Это искомый ответ. Теперь осталось подставить в него значения p и q, найденные ранее. Мы это делать не будем, так как операция чисто техническая. Задача решена.

При решении задачи мы активно использовали понятие независимости событий. Нам помогло соображение, что все броски всех кубиков независимы друг от друга. Обращу ваше внимание, что мы применяли не только независимость двух бросков кубика, но и совместную независимость всех этих бросков. Давайте введём два определения, которые касаются независимости целой группы событий.

Определение первое. События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если любые ДВА события из этого набора независимы между собой. Иными словами, для любых i и j независимы A_i и A_j.

Второе определение — независимость в совокупности. Тут уже интереснее. События $A_1, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если при любом выборе не двух, а любого количества событий из этой системы: A с индексом i_1, A с индексом i_2, и т.д., A с индексом i_k, мы имеем равенство вероятности пересечения всех этих событий и произведения вероятностей этих событий.

Мы видим, что это определение более хитрое, чем попарная независимость. Возникает вопрос — как связаны эти два определения?

Во-первых, если события независимы в совокупности, то они независимы и попарно. В самом деле, если мы представим k, равное двум, то получим, что для любой пары событий из $A_1, \dots,$

		A_n, независимых в совокупности, имеется и попарная независимость. Справедливо ли обратное? Достаточно ли попарной независимости событий для независимости в совокупности? Оказывается, это неправда. Покажем, что это неправда. Проще всего сделать это, приведя контрпример, то есть указав ситуацию, когда из попарной независимости независимость в совокупности не следует. Давайте рассмотрим тетраэдр с четырьмя вершинами. На каждой вершине напишем некоторые цифры. В трёх вершинах напишем цифры 1, 2 и 3. В четвёртой вершине напишем все три цифры сразу. Выберем случайную вершину тетраэдра (каждая вершину с одинаковой вероятностью ¼) и посмотрим, какие цифры будут написаны в этой вершине. Обозначим через A событие, что в выбранной вершине есть единица, через B — что в вершине есть двойка, через C — что в вершине есть тройка. Покажем, что события A, B и C попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. Предлагаю вам самостоятельно это проверить. Затем мы сделаем это вместе. Вероятность каждого из событий по отдельности равна ½, поскольку для каждого события есть ровно две подходящие вершины.	

		Посмотрим на пересечение событий А и В. Пересечение событий означает, что в выбранной вершине должна быть написана и цифра 1, и цифра 2. Такая вершина только одна, поэтому вероятность А, пересечённого с В, равна ¼. То же самое с двумя другими пересечениями. ¼ равна ½ умножить на ½, из чего следует, что, действительно, А, В и С попарно независимы. Теперь посмотрим на пересечение событий А, В и С. Это пересечение тоже означает, что была выбрана вершина 1 2 3, и эта вершина нам подходит. Поэтому вероятность пересечения тоже равна ¼, а вовсе не ⅛, как должно было быть, если бы А, В и С были независимы в совокупности. Таким образом, утверждение доказано.	
Закрепление изученного материала	15 мин.	**Предлагаю самостоятельно решить задачи.** 1. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе? 2. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьёвкой распределяются на 4 группы: A, B, C и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А? 3. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.	Обучающиеся решают задачи

		4. В мешке содержатся жетоны с номерами от 5 до 54 включительно. Какова вероятность того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число? 5. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на 3?	
Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	Составьте синквейн к слову «вероятность». Первая строчка – это тема. Представлена она одним словом, обязательно именем существительным. Мы используем слово «вероятность». Вторая строка состоит из двух слов, раскрывающих основную тему, описывающих ее. Это должны быть имена прилагательные. Допускается использование причастий. В третьей строчке посредством использования глаголов или деепричастий описываются действия, относящиеся к слову, являющемуся темой синквейна. В третьей строке должно быть три слова. Четвертая строка – это уже целая фраза, при помощи которой обучающийся высказывает свое отношение к теме. Это может быть как предложение, составленное учеником самостоятельно, так и крылатое выражение, пословица, поговорка, цитата, афоризм, но обязательно в контексте раскрываемой темы. Пятая строчка – всего одно слово, которое представляет собой некий итог, резюме. Чаще всего это просто синоним к теме стихотворения.	Педагог способствует размышлению обучающихся над синквейном

Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Дома повторите основные определения.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Начала статистики. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3751/conspect/326747/.
2. Теории вероятностей. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/company/JetBrains-education/blog/498188/.
3. Теории вероятностей. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://mipt.ru/online/hi-Math/teorver/.