ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Производная, градиент и градиентная оптимизация.

Аннотация к занятию: обучающиеся познакомятся с понятием производной. Обсудят свойства производной и её геометрический смысл.

Цель занятия: сформировать у обучающихся представление о производной.

Задачи занятия:
- познакомить обучающихся с понятием производной;
- рассмотреть свойства производной;
- показать геометрический и физический смысл производной.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	5 мин.	Друзья, здравствуйте! Сегодня мы поговорим о производной	Приветствие. Создание в классе атмосферы психологического комфорта
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	7 мин.	Тема урока — «Производная, градиент и градиентная оптимизация». **Прочитав тему урока, как вы думаете, что мы будем изучать сегодня?** **Возможные ответы обучающихся:** • узнаем, что такое производная; • узнаем, как вычислить производную функции. Всё верно. Для начала мы обсудим понятия скорости убывания и возрастания функции в точке. Это приведёт нас к понятию производной — мы научимся с ней работать и изучим новые понятия.	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов

Изучение нового материала	50 мин.	Рассмотрим функцию f(x) = x^4 + 5x^3 − 10x. У неё есть два локальных минимума и один локальный максимум, они показаны на слайде. Видно, что функция убывает на интервалах (−5,−3.5518) и (−0.9439,0.7457) и возрастает на интервалах (−3.5518,−0.9439) и (0.7457,2). Обозначим эти интервалы буквами A, B, C и D, соответственно. Посмотрим на места, где функция убывает. Заметим, что на интервалах A и C функция убывает с разной скоростью. На первом интервале A функция убывает довольно быстро, её склон на графике довольно крутой. А на интервале C функция убывает медленнее, её склон более пологий. Более того, мы можем сравнивать скорости убывания или возрастания функции в различных точках. Посмотрим на точки x1, x2 и x3 нашей функции. Видно, что при движении по графику из точки x1 функция убывает быстро: при малом изменении значения x значение функции падает довольно сильно. А при движении по графику из точек x2 и x3 функция убывает не так быстро. Тут мы можем сказать, что скорость убывания функции в точке x1 выше, чем скорость убывания функции в точках x2 и x3. Сейчас мы делаем выводы о скорости убывания функции в разных точках графика на глаз. Давайте введём формальные определения скорости убывания и возрастания функции в точках и научимся эту скорость измерять.	Для справки: Сайт: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/conspect/200979/ Перед уроком рекомендуется ознакомиться с материалами, представленными на сайте.

		Возьмём точку x равно минус 5. Значение функции в ней равно пятидесяти. Как мы могли бы измерить скорость, с которой функция f убывает в этой точке? Попробуем сделать так: отступим от этой точки по координате x вправо на некоторый шаг delta x. Например, возьмём delta x равным единице: из точки минус пять мы перейдём в точку минус 4. Значение функции при этом тоже изменится: оно станет равным минус 24. Обозначим изменение координаты y при движении нашей точки через delta y. В нашем случае y был минус 50, стал минус 24, поэтому delta y равно минус 24 минус 50 равно минус 76. При таком движении от точки к точке величину delta x, на которую изменяется значение x, называют приращением аргумента, а величину изменения значения функции delta y называют приращением функции. Рассмотрим отношение delta y делить на delta x. Оно отражает скорость убывания функции около точки минус 5. Действительно, отношение delta y делить на delta x показывает, насколько в среднем изменяется значение функции при изменении значения аргумента x на 1. Чем больше модуль отношения delta y делить на delta x, тем выше скорость убывания или возрастания функции. Можно провести аналогию с горами: рассмотрим график как дорогу, идущую то в гору, то с горы. Отношение delta y делить на delta x показывает, насколько сильно меняется высота дороги на каждый метр пути относительно земли; насколько быстро растёт или падает высота горы.	

		Давайте оценим скорость убывания функции в точке x равно минус ноль целых восемь десятых на интервале C. Сдвинем точку на шаг delta x, равный единице, вправо. Значение функции в точке x было примерно пять целых восемьдесят пять сотых, а в точке x плюс delta x стал около минус одной целой девяносто шести сотых. Delta y в итоге равно минус семь целых восемьдесят одна сотая. При одинаковом изменении аргумента функции на значение delta x, значение функции при движении на этом отрезке изменилось на меньшее по модулю значение. Значит, и отношение delta y к delta x будет меньше. Отсюда мы можем сделать вывод, что скорость убывания функции вблизи точки минус ноль целых восемь десятых меньше, чем вблизи точки минус 5. Заметим, что в наших примерах delta y получались отрицательными. Это логично, так как функция убывает на двух рассмотренных отрезках. Так как точку мы двигали вправо, то есть значение delta x было больше нуля, значит, отношения delta y к delta x будут отрицательными, меньше нуля. Если бы delta y было положительным, то и отношение delta y к delta x также было бы положительным. Возьмём, к примеру, точку x равно минус две целых шесть десятых. По графику видно, что в этой точке функция возрастает. Отступим от неё на шаг delta x равно 1: попадём в точку x равно минус одна целая шесть десятых. Значение функции в точке x было минус шестнадцать целых восемнадцать сотых, в точке x плюс delta x стало две целых семь сотых. Delta y в итоге равно восемнадцать целых двадцать пять сотых — положительное число. Тогда	

		и отношение delta y к delta x положительно, что говорит о том, что функция вблизи точки минус две целых шесть десятых растёт. Таким образом, знак отношения delta y к delta x показывает, убывает или возрастает функция на промежутке delta x. Если у вас есть функция, но нет доступа к графику этой функции, вы можете легко понять, возрастает или убывает функция около некоторой точки x: • отступив от этой точки на шаг delta x, • вычислив приращение функции delta y, • посмотрев на знак отношения delta y к delta x. В целом, можно сказать, что отношение delta y к delta x передаёт скорость возрастания функции. Если delta y на delta x меньше нуля, то скорость возрастания функции отрицательна, то есть функция убывает. И чем больше значение delta y к delta x по модулю, тем быстрее возрастает или убывает функция. Получается, мы придумали метод, который помогает понять, возрастает или убывает функция около некоторой точки x и насколько быстро она возрастает или убывает. Нужно просто отойти от точки на шаг delta x, вычислить приращение аргумента delta y и поделить delta y на delta x. Если delta y делить на delta x больше нуля, то функция возрастает, если меньше нуля, то убывает. Также модуль delta y делить на delta x отражает среднюю скорость убывания или возрастания функции около точки x.	

		Вопрос для обсуждения Появляется логичный вопрос: какую величину delta x выбрать, чтобы лучше оценить поведение функции в области некоторой точки x? **Ответы обучающихся:** В примерах мы брали значение delta x, равное единице. Но такое значение далеко не всегда подойдёт, чтобы понять, возрастает или убывает функция около некоторой точки и как быстро она это делает. Чтобы понять, почему так, рассмотрим пример: возьмём знакомую нам точку функции f(x) равно минус ноль целых восемь десятых и сдвинемся от неё вправо на величину delta x, равную трём. Попадём в точку x две целых две десятых. В ней значение функции равно 54 целым 66 сотым. Delta y в данном случае получится равной сорока восьми целым восьми десятым, и это положительное число. По опыту мы можем сделать вывод, что на отрезке от минус ноля целых восьми десятых до двух целых двух десятых наша функция возрастает со скоростью в среднем 54 целых 66 сотых делить на 3, что равно восемнадцати. Однако это не совсем верно. На графике мы явно видим, что в окрестности точки x наша функция убывает, и только при достижении точки ноль целых семьсот сорок четыре начинает возрастать. То есть наш вывод о том, как ведёт себя график в окрестности точки x, немного неточен. Отступив от точки x на слишком большой шаг delta x, мы «перешагнули» через точку локального минимума функции и ошибочно решили, что в окрестности точки x функция возрастает.	

		Это, как если бы вы стояли на вершине горы, потом спустились с неё, потом поднялись на другую гору такой же высоты и сказали: «Ну, моя итоговая высота изменилась на 0 метров. Значит, вся моя дорога была прямая». **Вопрос для обсуждения** Получается, чтобы сделать верные выводы о том, как ведёт себя функция около некоторой точки, нужно брать маленькое значение delta x. Насколько маленькое? **Ответы обучающихся:** Если у вас есть доступ к графику функции, вы можете визуально оценить, какое значение delta x нужно взять для конкретной точки x, чтобы не перескочить точку минимума или максимума. Но бывает так, что построить график функции вы не можете, у вас есть только формула, а понять, убывает или возрастает эта функция в точке и с какой скоростью, нужно. Более того, хочется оценивать скорость убывания или возрастания функций в точках автоматически, без построения графиков. Необходимо найти некое универсальное значение delta x, с помощью которого можно было бы оценить скорость убывания или возрастания любой функции в любой точке. **Ответ на вопрос** об универсальном значении delta x такой: оно должно быть бесконечно маленьким. Никакая конечная величина delta x не подойдёт. Действительно, для любой величины delta x можно найти такую функцию, чтобы её график выглядел, как на слайде. Если я отступлю от точки x на графике на шаг delta x, то перешагну через локальный минимум и сделаю неверный вывод о том,	Для справки:

		убывает или возрастает функция в точке x и с какой скоростью она это делает. Существует ещё один аргумент в пользу бесконечно малого значения delta x: даже если функция на отрезке от x до x плюс delta x монотонна, то есть возрастает или убывает и не имеет локальных минимумов и максимумов, она может возрастать или убывать с разной скоростью. Например, функция f(x)= x^4 на отрезке от 0 до 10 начинает возрастать быстрее при приближении к точке x=10. Её график становится круче. Делать вывод о скорости роста функции в точке 0 как о средней скорости роста функции на отрезке от 0 до 10 не совсем корректно. Поэтому для понимания того, с какой скоростью функция возрастает в самой точке 0, хочется отступить от точки x на о-о-очень маленький шаг delta x. На такой маленький, чтобы функция не поменяла скорости роста на интервале от x до x плюс delta x. Хочется взять значение delta x бесконечно малым. Как взять бесконечно малое значение delta x и вычислить скорость роста или убывания функции в точке? Мы научимся этому на следующем занятии и подойдём ближе к понятию производной. **Подведём итоги.** Мы поняли, что в разных точках функции скорость убывания или возрастания функции может быть разной. Придумали идею того, как эту скорость можно измерять, а заодно и понимать, убывает или возрастает функция в разных точках.	Функция называется монотонной на какой-то области, если её приращение не меняет знак и остается постоянным (по знаку) всегда на этой области. Если каждое последующее значение функции больше предыдущего, то функция называется возрастающей, если же наоборот, её приращение отрицательно, то она называется убывающей.

Идея состоит в том, чтобы отступить от заданной точки x на шаг delta x, вычислить приращение функции delta y и поделить delta y на delta x. Знак и модуль отношения delta y на delta x скажут нам, возрастает или убывает функция около точки x и как быстро она это делает.

Возьмём значение delta x больше нуля и устремим его к нулю: будем его постепенно уменьшать.

Например, пусть у нас есть функция f(x) равно x в третьей степени, и мы хотим оценить скорость её возрастания в точке x равно один. Сначала возьмём delta x, равную единице. Обозначим её через delta x1.

Вычислим, как мы это делали и раньше, приращение функции delta y при движении от точки x на шаг delta x1. Оно будет равно значению функции f в точке x плюс delta x1 минус значение функции f в точке x. Для нашей функции f при x равному 1 и delta x равной 1 приращение будет равно f от двух минус f от единицы, что равно семи. Обозначим это приращение функции как delta y1.

Теперь мы можем оценить скорость возрастания функции около точки x как delta y1 делить на delta x1. Для нашей функции и точки x равно один это отношение будет равно семи делить на один, что равно семи.
Обозначим это отношение через f’1(1).

Итак, мы получили оценку скорости возрастания нашей функции около точки x равно 1. Но это неточно, так как шаг delta x довольно большой, и функция успела поменять

		скорость роста при движении от точки x до точки x плюс delta x1. Теперь уменьшим delta x. Возьмём delta x2, равную одной второй. Вычислим приращение функции delta y2 как f от x плюс delta x2 минус f от x. Получим новую оценку скорости возрастания функции вблизи точки x — f’2(x) равно delta y2 делить на delta x2. Для нашей функции f и точки x равно 1 delta y2 будет равна f от одной целой пяти десятых минус f от единицы, что равно одной целой пяти десятым в третьей степени минус один в третьей степени, что равно двум целым трёмстам семидесяти пяти сотым. f’2(x) или, если подставить x, равное единице, f’2 от единицы, равно тогда двум целым трёмстам семидесяти пяти сотым поделить на одну вторую, что равно четырём целым семидесяти пяти сотым. Новая оценка скорости возрастания функции около точки x равно один будет уже чуть более точной. Снова уменьшим шаг delta x. Возьмём delta x3, равную одной третьей. Получим новое приращение функции delta y3 и новую оценку скорости возрастания функции около точки x — f’3(x) равно delta y3 делить на delta x3. Для нашей функции f равно x в третьей степени и точки x равно один delta y3 будет равна f от одной целой одной третьей минус f от единицы, что примерно равно одной целой тридцати пяти сотым. f’1(1) равно тогда одной целой	

тридцати пяти сотым поделить на одну третью, что равно четырём целым пяти сотым.

Эта оценка скорости возрастания снова будет более точной, чем на двух предыдущих шагах.

Мы можем уменьшать delta x до бесконечности. Брать delta x4, равную одной четвертой, delta x5, равную одной пятой, и так далее. Уменьшая таким образом delta x, мы получим последовательность оценок скорости возрастания функции в точке x равно 1: f'1(1), f'2(1), f'3(1) и так далее. Каждая следующая оценка будет более точной, чем все предыдущие.

Вопрос для обсуждения.
Как нам всё же получить скорость возрастания функции в точке x?

Ответы обучающихся.
Пока что мы только получили бесконечное количество оценок этой скорости, и у всех этих оценок delta x больше нуля. То есть, не бесконечно мала, как мы бы хотели.

Оказывается, что у последовательности значений f'(x) есть предел. Предел — это такое число, к которому элементы последовательности подходят всё ближе и ближе, но никогда его не достигают.

Чтобы лучше понять, что такое предел последовательности, посмотрим на наши delta x. Delta x1, delta x2, delta x3 и так далее образуют последовательность чисел. Предел этой

		последовательности — ноль. Смотрите: каждая следующая delta x в последовательности становится всё меньше, всё ближе к нулю. Если бесконечно продолжать эту последовательность: одна пятая, одна шестая и так далее, в ней можно будет найти число, сколь угодно близкое к нулю. Поэтому говорят, что предел этой последовательности — ноль. Или, по-другому: последовательность delta x стремится к нулю. Это можно рассматривать ещё так: если бы у этой последовательности был последний элемент, бесконечно далёкий, то он был бы равен нулю. Вернёмся к нашей последовательности f'(x). Оказывается, у неё тоже есть предел — некоторое число. При уменьшении delta x элементы последовательности f'(x) становятся всё ближе и ближе к этому пределу. Можно считать, что предел последовательности f'(x) — это бесконечно далёкий элемент последовательности f'(x). Такой, какой получится, если вместо delta x подставить бесконечно малое число. Это и есть то, что мы хотели получить: значение f'(x) при бесконечно малом значении delta x. Предел последовательности f'(x) обозначается, как показано на слайде. Он равен пределу отношений delta y к delta x при delta x, стремящейся к нулю. Lim — это сокращение от слова limit, то есть предел. Значок delta x стрелочка ноль под словом lim означает то, что delta x стремится к нулю. По сути, здесь написано, что f'(x) — это то значение, к которому значения f'1(x), f'2(x) и так далее	

		подходят все ближе и ближе при уменьшении значения delta x. Предел последовательности f'(x) для функции f и точки x называется производной функции f в точке x. В нашем случае для функции f(x) равно x в третьей степени и точки x=1 предел последовательности f'(1) равен трём. Если мы будем уменьшать delta x, подставляя в формулу для f'(1) всё меньшие и меньшие delta x и получая f'5(1), f'6(1) и так далее, мы будем получать значения всё ближе и ближе к трём. Таким образом, производная функции f(x) равна x в третьей степени в точке x, равной единице, равна трём. f'(1) равно трём. Можно построить последовательность значений f'(x) и для любой другой точки x функции f. Делается это точно так же: берём точку x, значение delta x, вычисляем delta y и f'(x) как delta y делить на delta x. Постепенно уменьшаем значения delta x, получаем последовательность f'(x) для точки x. Предел этой последовательности и будет производной функции f в точке x. Например, для точки x, равной одной целой пяти десятым нашей функции f(x) = x в третьей степени, последовательность f'(x) будет выглядеть так: f'1 от одной целой пяти десятых будет равно двенадцати целым двадцати пяти сотым, f'2 от одной целой пяти десятых будет равно девяти целым двадцати пяти сотым и так далее. Пределом этой последовательности, то есть,	

		производной функции f в точке одна целая пять десятых, будет число шесть целых семьдесят пять сотых. Вы можете самостоятельно вычислить значения f’1(x), f’2(x) и так далее для нескольких точек x. Например, для x, равного полутора, и тем самым убедиться, что вычисления на слайде верны. А также убедиться, что, при уменьшении значения delta x, значения f’3 (x), f’4(x) и так далее приближаются к значению шесть целых семьдесят пять сотых. Подытожим всё, что мы узнали о производной. Производная функции f в точке x — это предельное значение delta y делить на delta x при стремлении delta x к нулю. Или, проще, производная f по x есть отношение delta y делить на delta x при бесконечно маленьком значении delta x. Для обозначения производной функции f есть два варианта. Первый — f’(x), второй — df по dx. Запись df по dx означает, что мы берём производную функции f по переменной x. В курсе мы будем в разных местах использовать разные обозначения для производной — иногда f’, иногда — df по dx. Мы видим, что производная — это тоже отношение приращения функции delta y к приращению аргумента delta x, пусть и при бесконечно малом значении delta x. Поэтому производная обладает теми же свойствами, что и отношение delta y на delta x. А именно показывает характер изменения функции в точке.	Для справки: Точка экстремума функции - это точка области определения

		То есть, во-первых, знак производной $f'(x)$ говорит о том, убывает или возрастает функция f в точке x. Если производная $f'(x)$ функции f в точке x меньше нуля, это говорит о том, что функция в точке x убывает. «Убывание в точке x» означает, что сразу после начала движения из точки x вправо наша функция начинает убывать. И только потом, возможно, начинает расти. Если же производная $f'(x)$ функции f в точке x больше нуля, это значит, что функция в точке x возрастает. Есть и третий вариант: когда значение производной $f'(x)$ равно нулю. Это означает, что в точке x у функции f находится экстремум: локальный минимум или максимум. Посмотрим на пример: знакомую нам функцию $f(x)$ равно x в четвёртой плюс пять x в третьей минус десять x. Мы помним, что эта функция убывает на интервалах A и C и возрастает на интервалах B и D. У этой функции три точки экстремума, они показаны на слайде. Если мы вычислим производные этой функции в каждой из точек, то получим вот что: производные $f'(x)$ для всех точек интервалов A и C будут отрицательны. Для всех точек интервалов B и D будут положительны. А в точках экстремумов производные будут равны нулю. Модуль значения производной говорит о скорости убывания или возрастания функции. Чем выше модуль значения производной, тем выше скорость убывания или возрастания функции f в точке x. Посмотрим на функцию на слайде. В точке x, равной минус пяти, её производная равна минус ста тридцати пяти.	функции, в которой значение функции принимает минимальное или максимальное значение. Значения функции в этих точках называются экстремумами (минимумом и максимумом) функции.

		Минус сто тридцать пять — большое по модулю число, что говорит о том, что функция f в точке минус пять убывает довольно быстро. В точке же минус два производная равна восемнадцати. Восемнадцать сильно меньше, чем сто тридцать пять. Это говорит о том, что скорость возрастания функции f в точке минус два значительно меньше, чем скорость убывания функции f в точке минус пять. Это действительно так: по графику мы видим, что наклон функции в точке минус 5 значительно круче, чем в точке минус два. В точке минус три целых пятьдесят пять сотых производная равна нулю. Это значит, что скорость возрастания или убывания функции в этой точке — ноль. То есть функция не возрастает и не убывает, и эта точка — точка экстремума. Упомяну ещё одно замечание о производной. Производная существует не у всех функций и не во всех точках. Бывают такие функции, у которых нет производной в каких-то точках x. А бывают функции, у которых производная есть во всех точках x. Например, у непрерывных функций во всех точках существуют производные. В курсе мы столкнёмся только с функциями, у которых производные есть везде. Таким образом, производная — отличный инструмент для исследования поведения функций в разных точках. Особенно когда у вас нет доступа к графику функции и вам нужно понять, возрастает или убывает функция в какой-то определенной точке. Позже мы обсудим, для чего это может пригодиться.	

		На всякий случай скажу, что вычисление производных — это очень просто. Чтобы вычислить производную функции в точке, не нужно задавать никакие последовательности и вычислять пределы. Всё гораздо проще. Но перед тем, как мы перейдём к вычислению производных, я скажу пару слов о геометрическом смысле производной. Снова посмотрим на функцию f(x) равно x в третьей степени и точку x равно 1. Обозначим эту точку буквой A. Когда мы сдвигаемся от точки x на величину delta x1 вправо, мы попадаем в новую точку на графике. Обозначим эту точку буквой B. Точки A, B и ещё одна точка C на графике образуют прямоугольный треугольник. Его катеты AC и BC равны delta x1 и delta y1, соответственно. И отношение приращения функции к приращению аргумента f’1(x), получается, равно длине BC делить на длину AC. Заметим, что BC делить на AC — это тангенс угла альфа между AB и AC. А этот угол равен углу между прямой AB и осью OX. Получается, что оценка скорости возрастания функции около точки x равна тангенсу угла наклона секущей AB, которая проходит через точки функции x и x плюс delta x. Посмотрим теперь, что происходит с секущей AC при уменьшении delta x. По мере того, как delta x становится меньше, точка B подходит все ближе и ближе к точке A.	Для справки: Касательная к графику функции — это прямая, которая проходит через определённую заданную точку, имеющую отрезок со множеством числовых значений x

		В пределе, когда значение delta x становится бесконечно маленьким, точки B и A соединяются. А секущая AB становится касательной к графику функции f(x) в точке x. Поэтому геометрический смысл производной такой: производная функции f в точке x равна углу наклона касательной к графику функции f в точке x.	
Закрепление изученного материала	15 мин.	**Вопросы для обсуждения:** ● Что такое производная? ● В чём геометрический смысл производной?	Педагог организует беседу по вопросам
Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	**Вопросы для обсуждения:** ● Чему я научился? ● С какими трудностями я столкнулся? ● Каких знаний мне не хватает для более глубокого понимания изученного материала? ● Достиг ли я поставленных целей и задач?	Педагог способствует размышлению обучающихся над вопросами
Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Дома повторите основные определения.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Производная, основные определения и понятия. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/conspect/200979/.
2. Производная функции. Геометрический смысл производной. [Электронный ресурс] – Режим доступа https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/proizvodnaya-funkcii-geometricheskij-smysl-proizvodnoj/.
3. Возрастание и убывание функции на интервале, экстремумы. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3966/conspect/201134/.