ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Основы линейной алгебры. Векторы

Аннотация к занятию: в первой части урока обучающиеся знакомятся с объектом линейной алгебры – векторами. Рассмотрят операции над векторами. Во второй части урока обучающиеся выполнят практические задания, связанные с суммой, разностью и произведением векторов.

Цель занятия: познакомить обучающихся с объектом линейной алгебры – векторами. Рассмотреть операции над векторами. Применить эти правила при решении задач.

Задачи занятия:

- сформировать представление о векторе;
- сформировать умение применять правила для сложения и вычитания векторов;
- познакомить школьников со скалярным произведением векторов;
- ввести понятие «норма вектора»;
- научить решать задачи по данной теме.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	5 мин.	Здравствуйте! На прошлых занятиях мы познакомились с профессиями в сфере анализа данных. **Вопрос для обсуждения** Как вы думаете, нужны ли этим специалистам знания математики?	Приветствие. Создание в классе психологического комфорта
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	7 мин.	Возможный ответ обучающихся: да, нужны. Конечно, программисту необязательно знать все разделы математики и доказывать сложнейшие теоремы, но понимать, как устроены алгоритмы, и создавать свои всё же нужно. Диаграмма показывает значимость разных областей математики для машинного обучения. Как мы видим, большую роль играет линейная алгебра — с ней мы и познакомимся в этом модуле.	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов

		Голубым цветом на изображении выделены компетенции, необходимые для машинного обучения, а жёлтым — для анализа данных. Линейная алгебра систематизирует представления о данных и помогает писать универсальные алгоритмы для работы с ними. Изучение линейной алгебры начнём с векторов. Мы поговорим об их определении, операциях, которые можно с ними делать. В конце занятия мы решим несколько задач.	
Изучение нового материала	50 мин.	Изучим векторы с двух точек зрения: алгебраической и геометрической. С алгебраической точки зрения вектором называется упорядоченный набор из нескольких чисел. С геометрической точки зрения вектором называется направленный отрезок. При этом если у двух направленных отрезков совпадает направление и длина (но отличаются начала и концы), то мы считаем, что это одинаковые векторы. В первом определении вектор задаётся координатами своего конца при условии, что его началом является точка начала координат. Для наглядности запишем координаты пары векторов и изобразим их.	Для справки: https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/vector-definition/

		Пусть у нас есть два вектора: OA с координатами (3, 4) и OB с координатами (6, 2). Так как векторы имеют направление, то в отличие от отрезков порядок букв в их обозначении важен. В начале мы пишем точку начала координат, а после — точку конца координат. Координатами вектора мы называем разность между координатами начала и конца. Для каждого вектора есть равный ему вектор с началом в точке (0, 0). С векторами можно выполнять арифметические операции. Во-первых, векторы можно складывать друг с другом. Рассмотрим эту операцию на примере. Начнём с алгебраического определения. Для сложения векторов достаточно просто сложить соответствующие координаты векторов. Сложим векторы, которые мы нарисовали, когда говорили об определениях вектора. Их координаты (3, 4) и (6, 2), поэтому после сложения получится вектор (3 + 6, 4 + 2), то есть вектор с координатами (9, 6). Теперь рассмотрим тот же пример с точки зрения геометрии. Для сложения векторов используется правило параллелограмма. Для этого начало одного вектора совмещается с концом другого, а результатом сложения является вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго. У нас есть два способа использовать правило. Мы можем перенести вектор OA или OB. Если мы переносим вектор OB, то получаем вектор AC. OA+AC=OC. Если же мы переносим вектор OA, то получаем вектор BC. Тогда OB+BC=OC. Как мы видим,	

		начало суммы совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом последнего. Мы можем выстраивать и более длинные цепочки в суммах векторов. Вторая операция, которую можно совершать с векторами, — умножать их на число. Иногда говорят «умножить на скаляр». Рассмотрим эту операцию на примере и начнём с алгебраической интерпретации. Для выполнения этой операции все координаты вектора умножаются на это число. Например, если вектор (3, 4) умножить на 2, то получится вектор (6, 8), а если вектор (6, 2) умножить на 1/2 то получится вектор (3, 1). Умножать можно и на отрицательные числа. Например, при умножении вектора (6, 2) на −1 получится вектор (−6, −2). Посмотрим, что происходит с вектором с точки зрения геометрии. При умножении на положительное число вектор изменяет длину в количество раз, совпадающее со значением числа. При этом направление вектора не изменяется. Если число меньше 1, то вектор станет короче. Если число больше 1, то вектор удлиняется. Изобразим векторы, которые мы получили при рассмотрении алгебраической интерпретации умножения на число. Красный и синий векторы мы видели до этого. Черные пунктирные векторы — результат их умножения на одну вторую и на два соответственно. При умножении на отрицательное число вектор меняет направление на противоположное (то есть начало и конец меняются местами) и изменяет длину	

		в число раз, совпадающее с модулем числа, на которое умножается вектор. Посмотрим на изображение вектора из примера для алгебраической интерпретации. При умножении на минус один длина вектора не изменяется, изменяется только его направление. Раз мы умеем складывать векторы и умножать их на отрицательные числа, то мы умеем вычитать из одного вектора другой. Вернёмся к рассмотренным ранее примерам, чтобы понять, как устроено вычитание векторов. Вычтем из вектора (3, 4) вектор (6, 2). Тогда получится вектор с координатами (3−6, 4−2), то есть его координаты (−3, 2). В геометрической интерпретации вычитание выглядит как сложение, но с одним отличием: вычитаемый вектор необходимо перевернуть. После переворота его нужно сложить с другим вектором согласно правилу параллелограмма. Есть несколько путей выполнения этой операции. В каждом из случаев нам нужно перевернуть вектор OB. Получится вектор BO. Если его сложить с вектором OA, то получится вектор BA. Также мы могли бы перенести вектор BO так, чтобы получился вектор AG. Тогда в сумме с вектором OA получится вектор OG. Этот вектор совпадает с вектором BA. Также мы могли бы нарисовать вектор BO, исходящим из точки O, и получить вектор OF. Далее переносим вектор OA так, чтобы он шёл из точки F. Это вектор FG. В сумме с OF он даёт OG, что и требовалось.	

		Вопрос для обсуждения Раз существует сложение векторов и умножение их на числа, то почему бы не существовать умножению одного вектора на другой? **Возможные ответы школьников:** • да, оно существует; • не существует. И оно существует! Причём есть несколько таких умножений. Два самых важных: скалярное и векторное. Они называются так из-за формы результата перемножения векторов. В случае скалярного произведения получается число, то есть скаляр, а в случае векторного произведения — вектор. Сегодня мы познакомимся только со скалярным произведением. С точки зрения алгебры скалярное произведение устроено следующим образом: первая координата одного вектора умножается на первую координату второго, вторая координата умножается на вторую, третья на третью и т.д. После этого все эти произведения складываются. Итоговая сумма и является результатом скалярного произведения двух векторов. Рассмотрим скалярное произведение на примере векторов (2, 6) и (4, 2). Произведение их первых координат равно 8, а вторых — 12. Сумма этих чисел равняется 20, поэтому результатом скалярного произведения этих векторов будет 20. Скалярное произведение обозначают по-разному. В данном курсе мы будем обозначать скалярное произведение векторов a и b через <a, b>.	

Запишем определение в общем виде для векторов $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$. $\langle a, b \rangle = a_1 * b_1 + a_2 * b_2$.

С точки зрения геометрии скалярное произведение вычисляется как произведение длин векторов, умноженное на косинус угла между векторами. Длину вектора v будем обозначать через $|v|$. Таким образом, $\langle a, b \rangle = |a|\ |b| \cos \phi$, где ϕ — угол между векторами a и b. Рассмотрим всё те же векторы (2, 6) и (4, 2). Угол между ними равен 45 градусам, а их длины корню из 40 и корню из 20. Перемножив косинус угла и длины векторов, получим 20, что совпадает со значением произведения в алгебраической интерпретации.

В действительности алгебраическое и геометрическое определения эквивалентны, но сегодня мы этого доказывать не будем.

Из геометрического определения следует, что если два вектора направлены перпендикулярно, то их скалярное произведение будет равно нулю, так как косинус угла в 90 градусов равен нулю.

Скалярное произведение обладает несколькими свойствами:

- $\langle a, a \rangle = |a|^2$;
- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$;
- $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$;
- $\langle k\, a, b \rangle = k \langle a, b \rangle$, где k – некоторое число.

Первое и второе свойства следуют из геометрического определения скалярного

		произведения. Таким образом, мы знаем как связаны между собой скалярное произведение и длина вектора. Также мы теперь понимаем, что как и в случае перемножения чисел, векторы в скалярном произведении можно записывать в любом порядке. Для доказательства третьего и четвертого свойств необходимо расписать их при помощи алгебраического определения. Записываем левую часть третьего свойства при помощи координат. Раскрываем скобки и переставляем слагаемые. Первые два слагаемых по определению равны скалярному произведению векторов a и c, а два следующих — векторов b и c. При доказательстве четвёртого свойства мы просто выносим число за скобки и получаем желаемое. **Вопрос для обсуждения** Рассмотрим вектор с геометрической точки зрения. У любого вектора есть две основные характеристики: длина и направление. Появляется логичный вопрос: как узнать длину конкретного вектора? **Возможные ответы школьников:** • измерить линейкой; • с помощью формулы. Если у нас есть нарисованный вектор, то мы можем просто измерить его линейкой. Однако мы довольно редко имеем дело с изображениями векторов и чаще взаимодействуем с ними в алгебраической форме. Значит, нужно научиться вычислять её на основе координат вектора.	

		Для вычисления длины вектора по координатам необходимо воспользоваться теоремой Пифагора. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадает с вектором, а катетами являются перпендикуляр, опущенный из конца вектора на одну из осей, и отрезок, соединяющий точку начала координат и основание опущенного перпендикуляра. По теореме Пифагора длина гипотенузы является корнем из суммы квадратов длин катетов. Длины катетов совпадают с координатами вектора, взятыми по модулю, поэтому длина вектора (x, y) равняется корню из суммы (x^2 + y^2). Только что мы научились вычислять длину вектора или, как её ещё называют, евклидову норму. Заметим, что она удовлетворяет следующим свойствам. • Если $\|x\| = 0$, то $x = 0$; • $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$; • $\|\alpha x\|=\|\alpha\|\|x\|$, где α – некоторое число. Мы неслучайно используем здесь обозначение из двух вертикальных палочек, а не из одной. Так обозначается норма вектора. Нормой называется любая функция, которая удовлетворяет этим свойствам. Кроме евклидовой нормы бывают и другие нормы, например, вот такие. • $\|(a1, a2)\| = \max(a1, a2)$; • $\|(a1, a2)\| = a1+a2$. Первая норма совпадает с максимальной по значению координатой вектора, а вторая — с суммой его	Для справки: Евклидово пространство (также эвклидово пространство) в изначальном смысле — это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность, равную 3, то есть является трёхмерным. Для справки: Некоторым обобщением понятия длины вектора (оценкой величины вектора) является величина, называемая нормой вектора

		координат. Понятие нормы необходимо нам, чтобы понимать, как измерять длину вектора. Может показаться странным, что мы вообще задаёмся таким вопросом, но давайте рассмотрим вторую норму из приведённых выше. Представьте, что вы находитесь на Манхэттене, разделённом на кварталы, и вам нужно из музея Гуггенхайма попасть в кафе (на картинке музей слева вверху, а кафе справа внизу). Вы можете измерить расстояние напрямую (красная линия), а можете измерять его по количеству переходов между перекрестками (синяя линия). Красное расстояние даст вам меньше информации, ведь идти через кварталы вы не сможете, а вот вдоль них -- запросто. Иногда в задачах анализа данных нам тоже приходится немного менять устройство пространства и измерять расстояния по-другому. Для этого и служит понятие нормы, чтобы понимать, как именно мы измеряем расстояние в данном конкретном случае. Вы можете придумать и свою норму. Главное, чтобы она удовлетворяла свойствам, описанным выше. До этого все наши векторы находились на плоскости и имели только две координаты. Однако бывают и векторы с тремя координатами — трёхмерные, и с четырьмя — четырёхмерные, и иные многомерные векторы. Давайте рассмотрим несколько примеров таких векторов и применим к ним уже изученные операции. Будем рассматривать всё на примере пары векторов a(1, 2, 3, 4) и b(5, 6, 7, 8). Операции суммы и разности для них устроены точно так же, то есть	

		покоординатно. Их сумма равна вектору a + b = (1+5, 2+6, 3+7, 4+8) = (6, 8, 10, 12), а разность — a − b = (1−5, 2−6, 3−7, 4−8) = (−4, −4, −4, −4). Умножение на скаляр также не меняется. Например, разность a и b можно записать как −4 ·(1, 1, 1, 1) или как 4 · (−1, −1, −1, −1). В случае скалярного произведения тоже меняется лишь количество вычислений, а само определение не меняется. Напомним, что скалярное произведение — это сумма покоординатных произведений векторов. Посчитаем скалярное произведение векторов a и b. Получим, что <a, b> = 1 · 5 + 2 · 6 + 3 · 7 + 4 · 8 = 5 + 12 + 21 + 32 = 70. Евклидова норма многомерных векторов вычисляется так же, как и двумерных, то есть нужно вычислить корень из суммы квадратов координат. Тогда евклидовы нормы наших векторов будут следующими: |a| = корень из (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = корень из 30, |b| = корень из (5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) = корень из 174. Получается, что увеличение количества координат никак не влияет на известные нам операции и свойства векторов, что очень удобно	

Закрепление изученного материала	15 мин.	1. Даны четыре вектора: a(3, 0, −2), b(1, 2, −5), c(−1, 1, 1) и d(8, 4, 1). Найти координаты векторов −5a + b - 6c + d и 3a − b − c − d. Решение: сначала вычислим первый вектор. Сперва посчитаем координаты векторов −5a и −6c. Первый вектор имеет координаты (−15, 0, 10), а второй — (6, −6, −6). Для вычисления суммы будем вычислять покоординатные суммы. Получится вектор (−15 + 1 + 6 + 8, 0 + 2 − 6 + 4, 10 − 5 − 6 + 1) = (0, 0 , 0). Вектор, все координаты которого равны 0, называется нулевым. Теперь вычислим вторую сумму. Как и раньше, будем делать это подсчётом покоординатной суммы. Тогда первая координата будет равна 3 · 3 − 1 + 1 − 8 = 1, вторая координата — 0 ·3 − 2 − 1 − 4 = −7, а третья — −2 · 3 + 5 − 1 − 1 = −3. Таким образом, в сумме получается вектор (0, −7, −3). 2. Найти угол между векторами a(1, −1, 1) и b(3, 1, −2). Решение: из известных нам операций с углами связано только скалярное произведение, а именно косинус угла между векторами равен скалярному произведению, делённому на длины векторов. Угол между векторами принимает значение от 0 до 180 градусов, поэтому косинусы никаких двух углов не совпадут. Значит, по косинусу можно будет однозначно восстановить угол между векторами. Вычислим скалярное произведение векторов при помощи алгебраического определения: $<a, b> = 1 · 3 −	

		1 · 1 − 1 · 2 = 0. Тогда, независимо от длин векторов, после деления скалярного произведения на них мы получим, что косинус угла между векторами равен 0. Среди углов от 0 до 180 градусов нулевой косинус имеет только угол в 90 градусов. Следовательно, векторы a и b перпендикулярны. 3. Даны три вектора a(4, 1, 5), b(0, 5, 2) и c(−6, 2, 3). Найдите вектор v, удовлетворяющий равенствам <v, a> = 18, <v, b> = 1, <v, c> = 1. Решение: пусть вектор v имеет координаты (x, y, z). Тогда условия на скалярные произведения можно записать следующим образом: 4x + y + 5z = 18, 5y + 2z = 1, −6x + 2y + 3z = 1. Получается, нужно решить систему уравнений. Из второго уравнения получаем, что 2z = 1 − 5. Домножим третье уравнение на 2 и получим −12x + 4y + 6z = 2. Подставим вместо 6z то, что мы выразили из второго уравнения. Тогда верно равенство −12x + 4y + 3 − 15y = 2. Отсюда имеем 12x = 1 − 11y. Умножим первое уравнение на 6 и вместо 24x и 30z подставим то, что выразили ранее. Таким образом, верно равенство 2 − 22y + 6y + 15 − 75y = 108. Следовательно, 91y = −91, то есть y = −1. Тогда x = 1, а z = 3.	
Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	**Вопросы для обсуждения** ● Что такое вектор? ● Расскажите об операциях над векторами. ● С какими трудностями я столкнулся?	Педагог способствует размышлению обучающихся над вопросами

		• Каких знаний мне не хватает для более глубокого понимания изученного материала? • Достиг ли я поставленных целей и задач?	
Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Дома повторите основные определения и операции над векторами.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Линейная алгебра. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/256275/.
2. Вектор: определение и основные понятия. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/vector-definition/.
3. Основы векторной алгебры. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/547876/.
4. Евклидовы пространства. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=evklidovy-prostranstva.