ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Основы линейной алгебры. Матрицы

Аннотация к занятию: в первой части урока обучающиеся знакомятся с объектом линейной алгебры – матрицами. Рассмотрят операции над матрицами. Во второй части урока обучающиеся выполнят практические задания, связанные с суммой, разностью и произведением матриц.

Цель занятия: познакомить обучающихся с объектом линейной алгебры – матрицами. Рассмотреть операции над матрицами. Применить эти правила при решении задач.

Задачи занятия:

1. познакомить обучающихся с понятием матрицы, элементами матрицы, единичной матрицей, обратной матрицей;
2. сформировать умение применять правила сложения, вычитания и произведения матриц;
3. познакомить с операцией транспонирования матрицы;
4. научить решать задачи по данной теме.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	5 мин.	Здравствуйте! Сегодня мы продолжим изучение линейной алгебры. Познакомимся с важным объектом для анализа данных — матрицами	Приветствие. Создание в классе психологического комфорта
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	7 мин.	**Вопрос для обсуждения** Какие цели и задачи вы можете перед собой поставить? **Возможные ответы обучающихся:** • узнать, что такое матрицы; • узнать, какие операции можно выполнять с матрицами. Всё правильно. Матрицы играют важную роль в машинном обучении, давайте познакомимся с ними поближе.	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов
Изучение нового материала	50 мин.	Матрицей размера n × m называется прямоугольная таблица с n строками и m столбцами, в ячейках которой стоят числа.	Для справки: https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/vector-definition/

Например, (1 2 3 4 5 6) — это матрица размером 2 × 3, а (1 2 3 4 5 6) — матрица размером 3×2.
На прошлом занятии мы изучили векторы. Можно считать их частным случаем матриц. По сути вектор является матрицей из одной строки или из одного столбца.
Строки матриц принято нумеровать сверху вниз от 1 до n, а столбцы слева направо от 1 до m. Числа, из которых состоит матрица, принято называть её элементами.
Элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца обозначают aij.

Как и с векторами, с матрицами можно производить арифметические операции: складывать и вычитать матрицы друг из друга. Как и в случае с векторами, матрицы, чтобы произвести операцию, должны быть одного и того же размера. Сложение и вычитание матриц, как и векторов, производится поэлементно. Рассмотрим это на примерах.
Начнем со сложения: (1 2 3 4 5 6)+(6 5 4 3 2 1)=(1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1)=(7 7 7 7 7 7)

В случае с вычитанием всё точно так же:
(1 2 3 4 5 6)−(6 5 4 3 2 1)=(1−6 2−5 3−4 4−3 5−2 6−1)=(−5 −3 −1 1 3 5)
Продолжим аналогии с векторами и скажем, что матрицы можно умножать на числа (скаляры). При умножении матрицы на некоторое число, все её элементы умножаются на это число. Рассмотрим несколько примеров.

В первом примере матрица умножается на натуральное число:
2*(1 2 3 4 5 6)=(2*1 2*2 2*3 2*4 2*5 2*6)= (2 4 6 8 10 12)

		Во втором примере умножим матрицу на отрицательное дробное число: −1,5*(1 2 3 4 5 6)=(−1,5*1 −1,5*2 −1,5*3 −1,5*4 −1,5*5 −1,5*6)=(−1,5 −3 −4,5 −6 −7,5 −9)= −(1,5 3 4,5 6 7,5 9) С матрицами можно выполнять не только арифметические операции. В силу того, что матрица является прямоугольной таблицей, разумно предположить, что иногда её нужно поворачивать или переворачивать. Для операции переворота матрицы есть специальное название — транспонирование. Суть операции заключается в том, что мы отражаем матрицу вдоль её главной диагонали. Напишите матрицу на листке бумаги, а после переверните его так, чтобы диагональ из левого верхнего угла в правый нижний не изменила своего положения. Если теперь переписать числа на противоположную сторону листа, получится транспонированная изначальная матрица. Рассмотрим, что происходит с матрицей при транспонировании. Матрица (1 2 3 4 5 6) превратится в матрицу (1 4 2 5 3 6). А матрица (1 2 3 4) превратится в матрицу (1 3 2 4). Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы А, обозначается A^T. Перечислим некоторые из свойств транспонирования. $(A^T)^T = A$ Если относительно одной и той же диагонали отразить матрицу дважды, то она никак не изменится, поэтому после транспонирования транспонированной матрицы получается изначальная.	Для справки: Транспонирование матрицы — это операция над матрицей, при которой её строки и столбцы меняются местами.

$(A + B)^T = A^T + B^T$
Элементы, стоящие на одинаковых позициях, всегда будут переходить на те же самые позиции. Поэтому не важно, сложим ли мы их на изначальных позициях и потом запишем результат в нужную ячейку или сначала отразим элементы, а затем запишем результат в ту же ячейку.

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$
При умножении матрицы на число все её элементы умножаются на это число, поэтому на транспонирование данная операция никак не влияет.

Векторы можно перемножать друг с другом. Логично предположить, что можно перемножать и матрицы. Для начала изучим частный случай — перемножение матрицы и вектора.

Для перемножения двух векторов необходимо, чтобы у них совпадали размеры. В случае умножения матрицы на вектор есть подобное условие: количество координат вектора должно совпадать с количеством строк или столбцов матрицы.

Вопрос для обсуждения
Что же является результатом умножения матрицы на вектор?

Возможные ответы обучающихся:
- вектор;
- матрица;
- число.

Посмотрим на конкретные примеры.

Первый пример. Матрица (1 4 2 5 3 6) умножается на вектор-столбец (7 8).

Количество столбцов матрицы совпадает с количеством строк (координат) вектора. Результатом перемножения будет вектор-столбец с тремя координатами. Первая координата равняется скалярному произведению первой строки матрицы и вектора-столбца, вторая — скалярному произведению второй строки и того же вектора-столбца, третья — произведению третьей строки и вектора-столбца.

Таким образом, результатом перемножения будет вектор-столбец с тремя строками:
(1*7+4*8 2*7+5*8 3*7+6*8)=(39 54 69)
Второй пример. Вектор-строка (7, 8, 9) умножается на матрицу (1 4 2 5 3 6).

Количество столбцов (координат) вектора совпадает с количеством строк матрицы. Результатом перемножения будет вектор-строка с двумя координатами. Первая координата равняется скалярному произведению вектора-строки и первого столбца матрицы, вторая — скалярному произведению того же вектора-строки и второго столбца матрицы. Таким образом, результатом перемножения будет вектор-строка с двумя столбцами:
(7*1+8*2+9*3,7*4+8*5+9*6)=(50,122).

Мы выяснили, что можно умножать матрицу на вектор-столбец и на вектор-строку: в результате таких умножений

		получаются вектор-столбец и вектор-строка соответственно. Обратим внимание на важность порядка множителей. В отличие от чисел, нельзя записывать перемножаемые объекты в любом порядке. Перемножение двух матриц похоже на умножение матрицы на вектор с тем лишь отличием, что у нас получится матрица. Как и раньше, есть требование к размерам перемножаемых матриц: количество столбцов первой матрицы должно совпадать с количеством строк во второй. Давайте перемножим матрицу (1 4 2 5 3 6) на матрицу (7 8 9 10 11 12), а затем наоборот. Будем действовать так же, как и при перемножении матрицы и вектора, то есть перемножать строки левого множителя на столбцы правого множителя. Для наглядности запишем перемножаемые матрицы немного по-другому. В каждую клетку будем записывать результат перемножения строки левой матрицы и столбца верхней матрицы. Мы интерпретируем столбцы и строки как векторы и скалярно их перемножаем. Именно для этого нам важно, чтобы количество столбцов одной матрицы совпадало с количеством строк другой. В нашем случае одна матрица имеет размер 2 × 3, а другая 3 × 2, поэтому их можно перемножить в любом порядке, но с разными результатами. В одном случае будет матрица 3 × 3, а в другом — 2 × 2. Давайте посчитаем, что у нас получится в каждом из случаев.	Для справки: https://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/multiply/

		В первом случае получается матрица (1*7+4*10 1*8+4*11 1*9+4*12 2*7+5*10 2*8+5*11 2*9+5*12 3*7+6*10 3*8+6*11 3*9+6*12)=(47 52 57 64 71 78 81 90 99). Во втором случае получается матрица (7*1+8*2+9*3 7*4+8*5+9*6 10*1+11*2+12*3 10*4+11*5+12*6)=(50 122 68 167). Таким образом, перемножение двух матриц — это множество скалярных произведений векторов-строк и векторов-столбцов, записанных в матрицу. При помощи матричного произведения можно записывать преобразования плоскости. Например, поворот. Поворотом называется такое преобразование плоскости, при котором выбирается одна неподвижная точка, относительно которой вся остальная плоскость поворачивается на одинаковый угол. Изобразим происходящее при повороте на рисунке. При повороте на угол фи вокруг точки O точка A перейдёт в точку B, а точка D в точку E. Соответственно, векторы OA и OD перейдут в векторы OB и OE. Точно так поворачиваются и все остальные точки плоскости. Заметим, что мы всегда выполняем поворот против часовой стрелки. Можно поворачивать плоскость на отрицательный угол. В таком случае поворот выполняется по часовой стрелке. Матричное произведение связано с поворотом на угол ϕ следующим образом. Нам даются координаты до преобразования, а мы хотим получить координаты после. Для этого нужно умножить матрицу (cos cos ϕ -sin sin ϕ sin sin ϕ cos cos ϕ) на исходный вектор-столбец (x y). Проверим, что мы получим повёрнутый вектор (x y). После умножения мы получим вектор	

(cos cos ф -sin sin ф sin sin ф cos cos ф)(x y)=(xcos cos ф – ysin sin ф xsin sin ф +ycos cos ф).

Его длина равна корню из суммы x^2 ф +y^2 ф −2xycos cos ф sin sin ф +x^2 ф +y^2 ф +2xycos cos ф sin sin ф .
После сокращений и использования тождества ф +ф =1 получим, что длина нового вектора равна √(x^2+y^2), то есть совпадает с длиной исходного вектора.

Для вычисления угла между векторами вычислим скалярное произведение векторов. Оно равно сумме x^2 cos cos ф −xysin sin ф +xysin sin ф +y^2 cos cos ф . Эта сумма равна (x^2+y^2) cos cos ф . Последнее выражение совпадает с произведением длин векторов, умноженным на cos cos ф . Следовательно, угол между векторами равен ф. Осталось проверить, что мы повернули вектор против часовой стрелки, а не по часовой. Для этого достаточно подставить конкретный вектор. Например, (1 0). Тогда после поворота получится вектор (cos cos ф sin sin ф). Значит, мы повернули в нужную сторону. Теперь обсудим свойства умножения матриц.

Единичной матрицей порядка n называется матрица размера n × n, у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Обычно единичную матрицу обозначают латинской буквой E. Матрица получила своё название не просто так: при умножении на неё какой-либо квадратной матрицы, эта квадратная матрица не меняется, то есть для любой квадратной матрицы A верно равенство AE = EA = A.
Это одно из свойств матричного произведения. Поговорим о других свойствах.

		Нетрудно убедиться в том, что при умножении на нулевую матрицу получится нулевая матрица. Следующим важным свойство является ассоциативность умножения матриц. Для любых матриц A, B и C выполняется равенство $(AB)C = A(BC)$. Таким образом, неважно, в каком порядке перемножать матрицы, главное — не переставлять никакие две матрицы при их непосредственном перемножении. Также матричное умножение обладает свойством дистрибутивности. Это свойство заключается в том, что для любых матриц A, B и C выполняются равенства $(A + B)C = AC + BC$ и $A(B + C) = AB + AC$. Существует свойство и для случая, когда матрицы умножаются на некоторое число: для любых матриц A и B и числа α выполняется равенство $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$. Последнее свойство, которое мы упомянем, связано с транспонированием матриц. Для любых матриц A и B верно следующее равенство: $(AB)^T = B^T A^T$. **Вопрос для обсуждения** Раз матрицы можно умножать, то разумно задаться вопросом, а можно ли их делить. **Возможные ответы обучающихся:** • да, можно; • нет, нельзя. Оказывается, в каком-то смысле это возможно. Для дальнейшего разговора введём определение обратной матрицы. Обратной матрицей для матрицы A называется матрица A^{-1}, такая, что $A A^{-1} = A^{-1} A = E$. Данное определение подразумевает, что матрица A является квадратной.	Для справки: Дистрибутивность — распределительность, распределительный закон, свойство умножения. Для справки: Обратная матрица — такая матрица

		Отметим также, что обратная матрица может быть только одна и что не у каждой матрицы есть обратная. Обратные матрицы имеют ряд важных свойств: $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$. Первое свойство следует из определения. Второе можно проверить следующим образом: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B\ B^{-1})A^{-1} = A\ A^{-1} = E$. Для вывода третьего свойства транспонируем обе части выражения $A^{-1}\ A = E$ и получим, что $A^{T}\ (A^{-1})^{T} = E$, откуда получим, что обратная матрица к A^{T} — это $(A^{-1})^{T}$. Обратная матрица не просто так обозначается как матрица в минус первой степени. Мы можем возводить матрицы и в другие целые степени. Для возведения в натуральную степень необходимо умножить матрицу саму на себя нужное число раз. Для возведения в отрицательную степень необходимо, чтобы у матрицы была обратная матрица. Если она есть, то нужно обратную матрицу умножить саму на себя число раз, совпадающее с модулем степени.	A^{-1}, при умножении которой на исходную матрицу A получается единичная матрица E
Закрепление изученного материала	15 мин.	Закрепим наши знания о матрицах, решив несколько задач. 1. Вычислите 3A − B − 4C, если A=(1 2 1 2), B=(3 2 3 2), C=(0 1 0 1). Решение: вычисления нужно производить покоординатно. В данном случае строки в каждой из матриц совпадают,	

		поэтому достаточно произвести вычисления для первых строк. В итоге получим матрицу (0 0 0 0). 2. Существует ли произведение ABCD? Если да, то чему оно равно? A=(−12 13), B=(1 2 −3 4), C=(1 2 3 5 −2 0), D=(−1 13). **Решение:** размерность первой матрицы 1 × 2, второй — 2 × 2, третьей — 2 × 3, а четвёртой — 3 × 1. Если мы будем вычислять произведение слева направо, то получим матрицы размером 1 × 2, 1 × 3 и 1 × 1 соответственно. Следовательно, произведение существует и является матрицей 1 × 1. 3. Вычислите произведение матриц (1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1) и (7 11 7 10 1 0 0 −1).	
Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	**Вопросы для обсуждения** • Что такое матрица? • Расскажите об операциях над матрицами. • С какими трудностями я столкнулся? • Каких знаний мне не хватает для более глубокого понимания изученного материала? • Достиг ли я поставленных целей и задач?	Педагог способствует размышлению обучающихся над вопросами

Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Дома повторите основные определения и операции над матрицами.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Линейная алгебра. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/256275/.
2. Матрицы: определение и основные понятия. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/definition/.
3. Операции над матрицами и их свойства. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ru.solverbook.com/spravochnik/matricy/operacii-nad-matricami-ix-svojstva/.
4. Умножение матриц. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/multiply/.