ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Производная, градиент и градиентная оптимизация.

Аннотация к занятию: в первой части занятия обучающиеся познакомятся с правилами дифференцирования функций. Получат знания о производной элементарных функций. Во второй части урока обучающиеся выполнят практические задания, связанные с дифференцированием сложных функций.

Цель занятия: сформировать у обучающихся представление о нахождении производной элементарных функций. Рассмотреть правила дифференцирования сложных функций. Применить эти правила при решении задач.

Задачи занятия:

- разобрать основные правила дифференцирования функций;
- научить вычислять производные элементарных функций;
- научить вычислять производные сложных функций;
- применить правила нахождения производных на практике.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	5 мин.	Друзья, здравствуйте! На предыдущем уроке мы познакомились с понятием производной функции. На этом уроке мы продолжим работу с ним	Приветствие. Создание в классе атмосферы психологического комфорта
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	7 мин.	**Вопрос для обсуждения** Какие правила нахождения производных существуют? **Ответы обучающихся** Сегодня мы научимся вычислять производные многих функций. Узнаем правила вычисления производных более сложных, составных функций.	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов
Изучение нового материала	50 мин.	Ранее мы говорили о производной функции в точке. Производная функции f в точке x — это некоторое число. Её обозначают как f'(x). Например, производная функции f от x равна x в третьей степени в точке 1, равна трём. О производной можно говорить не только применительно к одной точке, но и как о производной функции в целом.	Для справки: Сайт: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/conspect/200979/

		Производная функции в целом — это тоже функция. Обозначается она просто f’. И значение функции f’ в точке x — f’(x) — это производная функции f в точке x. Например, производная нашей функции f(x) равна x в третьей степени — это функция f’(x) равно три умножить на x во второй степени. На слайде вы видите график функции f слева и график функции f’ справа. Таким образом, подставив в уравнение функции f’ любую точку x, мы получим значение производной функции f в точке x. Например, f’(2) равна двенадцати. Посмотрим на график производной функции посложнее. Формула производной этой функции f’ находится над её графиком справа. По графику производной видно, что её значения в точках экстремумов функции f действительно равны нулю. Ещё мы видим, что на тех интервалах, где функция f убывает, значение производной меньше нуля: её график лежит под прямой y равно ноль. А там, где функция возрастает, график производной лежит выше прямой y равно ноль. По графику производной видно, как меняется скорость убывания или возрастания функции при разных x. Например, на интервале от минус двух до минус одного функция f растёт не очень быстро. Поэтому значение производной по модулю мало: не больше двадцати. На интервале от единицы до двух функция f растёт быстро, и значение производной f’ на этом интервале велико. Так как производная — это тоже функция, от неё тоже можно взять производную. Производная от f’ обозначается как f с	Перед уроком рекомендуется ознакомиться с материалами, представленными на сайте.

		двумя штрихами. Она называется второй производной функции f. Например, вторая производная нашей функции f — это функция двенадцать x в квадрате плюс тридцать x. Можно взять третью, четвертую, пятую и другие производные. У второй производной функции тоже есть полезные свойства, которые помогают исследовать характеристики функций. Но нам в курсе вторая производная не пригодится, мы будем говорить только о первой производной функции. Пришло время научиться вычислять производные. То есть по формуле функции f(x) понимать, как будет выглядеть формула производной f'(x). Для самых простых функций вид производных известен. Существуют таблицы, в которых написано, как выглядит производная для той или иной простой функции. Часть этой таблицы вы видите на экране. Расширенную версию таблицы вы найдёте по ссылке. В таблице показаны производные функций f(x) разного вида. Сама функция записана внутри скобок, а штрих после скобок означает, что мы берём от функции производную. То же самое, что f', только вместо f записана формула функции. Что мы здесь видим: во-первых, производная константы равна нулю. Константа — это функция f(x), равная C, где C — число, а не переменная. Например, функция f(x) равна 2. Её производная — функция f'(x) равно нулю. Это логично, так как эта функция нигде не возрастает и не убывает: её скорость всегда равна нулю.	Для справки: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/start/201073/; https://resh.edu.ru/subject/lesson/4922/start/201042/.

Далее: производная функции x в степени n равна n умножить на x в степени n минус один. Если n, например, равна шести, производная функции x в степени шесть будет равна шесть x в степени 5. Теперь мы понимаем, почему несколько слайдов назад производная функции f равно x в третьей степени была равна трем x во второй.

Интересная производная у функции экспоненты: она равна ей же самой. То есть производная e в степени x — это функция e в степени x.

Вопросы для обсуждения.
Теперь мы знаем, как выглядят производные простых функций вида x в степени n, синус x, логарифм x и подобных. Но что делать с более сложными функциями? Например, вот с этой. Как понять, что её производная действительно равна функции, которая изображена справа?

Ответы обучающихся.
Для этого мы изучим правила сложения, умножения и деления производных.

Для начала изучим простое правило умножения на константу. Пусть наша функция f(x) имеет вид f(x) равно f1(x) умножить на C. Здесь f1(x) — функция, C — константа, какое-то число. Пусть мы знаем производную функции f1. Тогда производная функции f равна C умножить на производную функции f1.

Пример: пусть f(x) равно 2 умножить на x в четвёртой степени. Тут f1 равно x в четвёртой, а C равно двум. По правилу выше производная такой функции f равна 2 умножить на производную функции x в четвёртой. А производную x в

		четвёртой мы знаем из таблицы на предыдущем слайде: она равна четыре умножить на x в третьей степени. Итого производная функции f равна два умножить на четыре x в третьей степени, то есть восемь x в третьей. **Далее:** правило сложения. Пусть функция f имеет вид f1(x) плюс f2(x), где f1 и f2 — некоторые функции. То есть функцию f можно представить в виде суммы двух функций. Тогда производная функции f равна сумме производных функций f1 и f2. **Пример:** функция f(x) равно 2 умножить на x в четвёртой плюс e в степени x. Это сумма двух функций — 2 на x в четвёртой и e в степени x. Производные обеих этих функций мы знаем: производная 2 на x в четвёртой равна восемь x в третьей — это мы вычислили на прошлом слайде. А производная e в степени x равна e в степени x — это мы знаем из таблицы. В итоге f'(x) равно восемь x в третьей плюс e в степени x. Правило сложения работает и тогда, когда функция f — это сумма большего количества функций, не только двух. Если f — это сумма пяти других функций, то её производная будет равна сумме производных этих пяти функций. Теперь мы можем вычислить производную функции, которую мы рассматривали на одном из первых слайдов. Действительно, эта функция есть сумма трёх более простых функций, которые вы видите на экране. Производную каждой из них мы можем вычислить. В итоге производная f'(x) будет равна сумме производных этих функций. Вы можете перемотать видео этого урока в начало и убедиться, что посчитанная нами производная совпадает с той, что мы видели тогда на слайде.	Для справки:

		Идём дальше. Правило умножения. Если функция f представляется в виде произведения двух функций f1 и f2, то производную f нужно вычислять так: умножить производную функции f1 на функцию f2 и прибавить к этому функцию f1, умноженную на производную от f2. Посмотрим на примере, чтобы было понятнее: пусть функция f равна x в четвёртой степени умножить на логарифм x. Эту функцию можно представить в виде произведения двух функций попроще: f1(x) равно x в четвёртой и f2(x) равно логарифм x. Производные обеих этих функций легко вычисляются: производная логарифма — это табличная функция, она равна одному делить на x, производная x в четвертой — это четыре x в третьей. Тогда производная функции f — это четыре x в третьей умножить на логарифм x плюс x в четвёртой умножить на один, делить на x. Вы можете убедиться, что формула на экране посчитана правильно. Ещё одно правило — правило деления. Если наша функция f — это частное двух функций, то есть f равно f1 делить на f2, то производная функции f вычисляется по формуле на экране. Формула выглядит громоздко, но ничего сложного в ней нет. Давайте посмотрим на пример вычисления такой производной. Пусть функция f — это синус x делить на x квадрат. Производные функций синус x и x квадрат мы знаем: это косинус x и 2x. Тогда по формуле для производной частного мы можем вычислить производную для f. Процесс вычисления и	Сайт: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3954/main/201015/

итоговая формула показаны на экране, вы можете самостоятельно убедиться в их верности.

Правило, о котором мы поговорим, касается вычисления производной композиции функций.

Для начала напомню, что такое композиция функций.
Пусть у нас есть функция f равно логарифм x в квадрате. Обозначим логарифм x через g. Тогда мы можем рассматривать функцию f как функцию от переменной g; f(g) равно y в квадрате. А g — это тоже функция: g(x) равно логарифм x.

Для того, чтобы получить значение функции f для некоторого значения x, нужно сначала этот x подать на вход функции g, а полученное значение уже подать на вход функции f(g). Таким образом, функция f(x) является композицией двух более простых функций: g(x) и f(g). Можно написать, что f(x) равно f(g(x)).

Как же вычислить производную функции f(x) равно логарифм x в квадрате?

Довольно просто! Нужно проделать три шага.
Первый: вычисляем производную f(g). df по dg равно два g.
Второй: вычисляем производную y(x). dg по dx равно один делить на x.

Третий: умножаем две полученные производные. df по dg умножить на dg по dx равно два g делить на x.

		Последнее: подставляем вместо g его значение, логарифм x. Получаем, что в итоге df по dg умножить на dg по dx равно два логарифма x делить на x. Это и будет производной f'(x). Таким образом, производная композиции двух функций f(g) и g(x) вычисляется как df по dg умножить на dg по dx. В другом формате записи — f'(x) равно f'(g(x)) умножить на g'(x). Рассмотрим ещё один пример вычисления производной композиции функций. Пусть f(x) равно е в степени синус x. В этом случае g(x) равно синус x, а f(g) равно е в степени g. Производные этих функций — g'(x) равно косинус x, f'(g) равно е в степени g. Тогда f'(x) равно g'(x) умножить на f'(g), что равно косинус x умножить на е в степени g. Подставив вместо g синус x, получим f'(x) равно е в степени синус x умножить на косинус x. Итак, мы научились вычислять производные различных функций. Узнали, что для получения производных простых функций вроде x в степени n или синус есть табличные значения. А для вычисления более сложных, составных функций, есть правила. Всего правил 5: правило умножения на константу, правило сложения, умножения, деления и правило вычисления производной композиции функций. Зная эти пять правил и таблицу производных простых функций, можно вычислить производную любой функции	

Закрепление изученного материала	15 мин.	Потренируемся вычислять производные сложных функций, используя совместно несколько изученных нами правил. Рассмотрим функцию f(x), показанную на экране. Она выглядит довольно громоздко, состоит из нескольких различных функций. Но её производную найти довольно просто. Давайте это сделаем. Разобьём функцию на три составляющих: f1, f2 и f3. Найдём производную каждой составляющей отдельно и затем соберём из них итоговую производную функции f. Начнем с f1. f1 — это константа 3 умножить на корень из x. По правилу умножения на константу мы знаем, что f'1(x) равно три умножить на производную корня из x. Корень из x — это ни что иное, как x в степени ½. А производную такой функции мы умеем вычислять из таблицы: мы видели правило вычисления производной функции вида x в степени n. Здесь у нас просто n равно одной второй. Поэтому производная x в степени одна вторая будет равна одной второй умножить на x в степени минус одна вторая. X в степени минус одна вторая — это один делить на корень из x. В итоге f'1 от x равно 3 делить на два корня из x. С f'1 разобрались. Идём дальше: вычислим производную функции f2. f2 — это композиция функций g(x) равно 2x и f_2(g) равно синус g. Производные этих функций — g' равно 2, g2' равно косинус x.	Педагог организует беседу по вопросам

		Тогда по правилу производной композиции f'2 равно косинус от 2x умножить на 2. Отлично. Осталась f3. Здесь, к счастью, всё просто: это табличная производная. f3' от x равно e в степени x. Итак, у нас есть производные всех трёх составляющих. Осталось собрать из них производную f'. Сначала соберём производную f2 умножить на f3. По правилу вычисления производной произведения двух функций это будет равно f2' умножить на f3 плюс f2 умножить на f3'. Подставим значения и получим то, что вы видите на экране. Последний шаг — получение производной f'. По правилу сложения она равна сумме f1' и той формулы, что мы получили для производной f2 умножить на f3. Итоговую формулу для f' вы видите на экране. Вычислять производные больших функций довольно просто. Нужно разбить их на простые составляющие, вычислить отдельно производные, а затем собрать их в итоговую производную с помощью правил, которые мы изучили. Иногда разбиение происходит в несколько этапов: например, функция f может быть равна сумме двух других функций, а эти две функции, в свою очередь, могут быть произведениями, частными или композициями других, ещё более простых функций, и так далее.	

Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	**Вопросы для обсуждения** ● Какие правила нахождения производных существуют? ● Чему я научился? ● С какими трудностями я столкнулся? ● Каких знаний мне не хватает для более глубокого понимания изученного материала? ● Достиг ли я поставленных целей и задач?	Педагог способствует размышлению обучающихся над вопросами
Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Дома повторите основные определения. Выполните упражнения на вычисление производных.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Производная, основные определения и понятия. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/conspect/200979/.
2. Правила дифференцирования. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3954/main/201015/.
3. Производная степенной функции. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4922/start/201042/.
4. Производные элементарных функций. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/start/201073/.