Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Астрономия
Методические материалы для кружков

МФТИ

2018

Методические материалы составлены для вас преподавателем кружка астрономии физтех-лицея Сушко Вадимом Александровичем.

В пособии представлен конспект практических занятий по астрономии ракетно-космической смены проекта «Наука в регионы». Материал разделён на шесть разделов и включает в себя теоретические материалы, а также задачи с решениями. Уровень заданий варьируется от простейшего, на определения, до непростых заданий из муниципального этапа астрономических олимпиад.

Данное руководство будет полезно для проведения практических уроков по астрономии, а также при подготовке школьников к ЕГЭ по физике и к астрономическим олимпиадам.

Редактор: А.Д. Рыбаков

Содержание

1 Небесная механика

Первая космическая

Закон всемирного тяготения:

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

Из него выводится круговая скорость по орбите (*первая космическая скорость*):

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

а также период обращения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Конфигурации

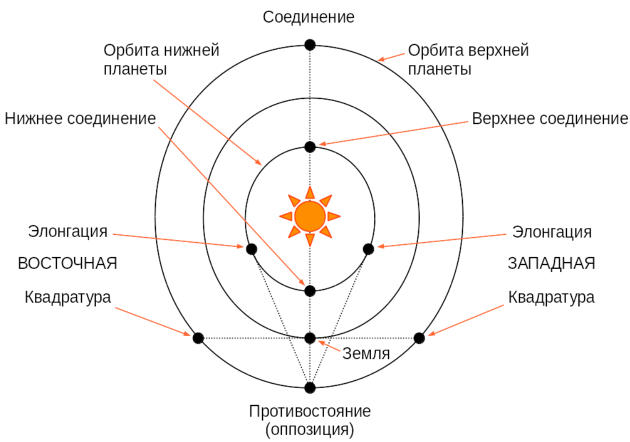

Рис. 1: Конфигурации планет по отношению к Земле

По отношению к Земле планеты делят на внутренние и внешние.

Определение. Элонгация планеты — это угол между планетой и Солнцем в данный момент. У внутренних планет максимально возможная элонгация $\delta_{max} < 90°$, а у внешних $\delta_{max} = 180°$.

Синодический период

Определение. Период повторения конфигурации (например, верхнего соединения) называется синодическим периодом.

Определение. Обычный орбитальный период обращения называют сидерическим периодом.

Важно понимать, что синодический период определен для пары планет. Например, высказывние «синодический период Венеры» — некорректно. Правильным будет «синодический период Венеры при наблюдении с Земли».

Сидерический же период обращения определен для каждой планеты отдельно.

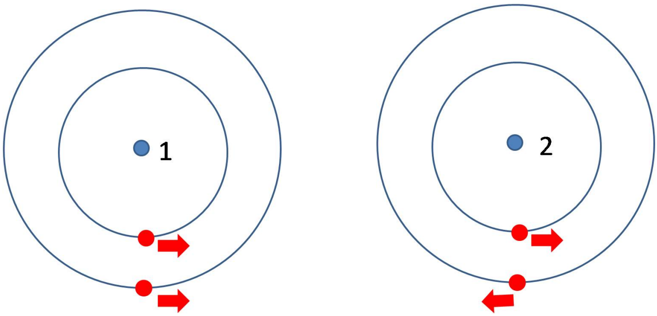

Рис. 2

В случае 1 (обращение в одну сторону) синодический период считается из формулы:

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|.$$

В случае 2 (обращение в разные стороны) формула меняется:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Случай 2 довольно редко встречается в природе, но в задачах на олимпиадах такая ситуация встречается.

С помощью синодических периодов выводится разница между:

- солнечными и звездными сутками;
- периодом обращения Луны и периодом ее смены фаз.

Эллипс

Определение. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов является постоянной.

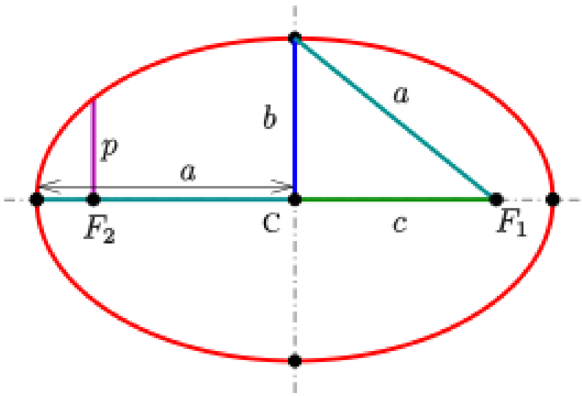

Рис. 3: Эллипс

Основными характеристиками эллипса для астрономов являются:

- a — большая полуось;
- b — малая полуось;
- c — фокусное расстояние;
- $e = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет;
- $r_a = a(1+e)$ — расстояние в афелии (дальняя точка орбиты);
- $r_p = a(1-e)$ — расстояние в перигелии (ближняя точка орбиты).

Свойство эллипса, полезное при решении геометрических задач:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Площадь эллипса:

$$S = \pi ab.$$

Движение по эллипсу

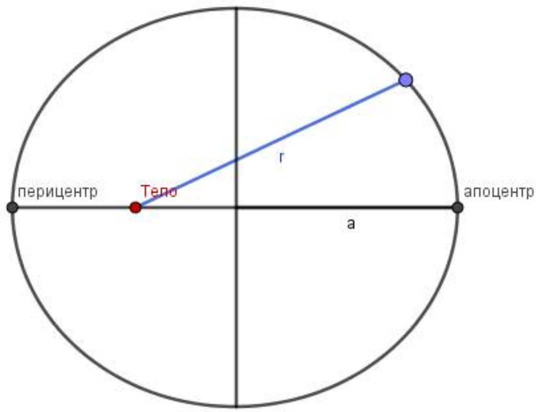

Рис. 4

Формула для периода обращения очень похожа на соответствующую для кругового движения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

То есть орбитальный период зависит от большой полуоси, но не от эксцентриситета.

Скорость в точке орбиты с большой полуосью a, удалённой на r от центрального тела:

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Подставив расстояние, равное перигелийному, получим скорость тела в перигелии:

$$V_p = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}}.$$

Аналогично получим скорость тела в афелии:

$$V_p = \sqrt{\frac{GM(1-e)}{a(1+e)}}.$$

Законы Кеплера

Первый закон: каждое из гравитационно взаимодействующих небесных тел обращается вокруг общего центра масс по траектории, являющейся коническим сечением (окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой), причем центр масс находится в ее фокусе.

Второй закон: за равные промежутки времени радиус-вектор заметает равные площади. Иными словами, величина $Vr\sin\alpha$ является постоянной (α — это угол между направлением скорости и направлением на центр масс).

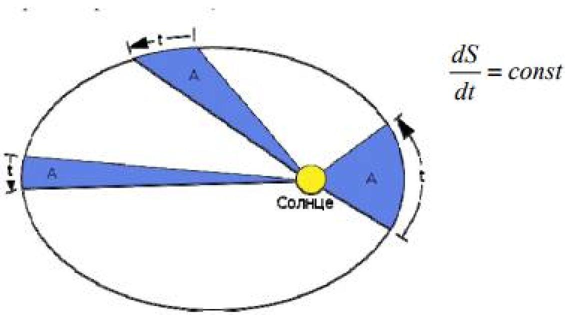

Рис. 5

Третий закон: период обращения двойной системы вокруг общего центра масс равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M_1+M_2)}}.$$

За a здесь берется сумма больших полуосей эллисов, по которым обращаются небесные тела.

Вторая космическая

В этом разделе нам понадобится закон сохранения энергии. При движении по орбите полная энергия тела сохраняется:

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{r} = const.$$

В зависимости от знака энергии можно получить разные типы орбит:

- $E < 0$ — траектория замкнутая (*эллипс или окружность*);
- $E = 0$ — *парабола*, тело улетает бесконечно далеко;
- $E > 0$ — *гипербола*, тело улетает бесконечно далеко (быстрее, чем по параболе).

Если энергия равна нулю, то получаем значение для *второй космической скорости*:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

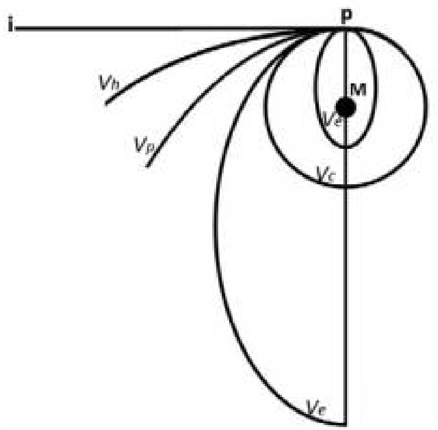

Рис. 6

На рисунке 6 представлены примеры возможных траекторий тела относительно центрального (точка M), если начальная скорость направлена вдоль прямой pi перпендикулярно pM. При $V > V_2$ тело движется по гиперболе, при $V = V_2$ — по параболе, а при $V < V_2$ — по эллипсу.

Задачи

Задача 1. В каких основных конфигурациях видна Земля с Меркурия и Марса, и на какое наибольшее угловое расстояние удаляется Луна от Земли при наблюдении с этих планет?

Решение. По отношению к Меркурию Земля является верхней планетой и поэтому периодически бывает в соединении, противостоянии и квадратурах. Период смены этих конфигураций Земли равен синодическому периоду обращения Меркурия, наблюдаемому с Земли, т.е. в среднем 116 дней. По отношению к Марсу Земля является нижней планетой и поэтому периодически бывает в верхнем и нижнем соединениях с Солнцем и в наибольших элонгациях. Период повторения этих конфигураций равен синодическому периоду обращения Марса и в среднем составляет 780 дней. Если из a_e и a_M — большие полуоси орбит Земли и Марса, то среднее значение наибольшей элонгации Земли для Марса составляет

$$A = \arcsin\left(\frac{a_e}{a_M}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}524}\right) = 41^\circ.$$

Большая полуось орбиты Меркурия $a_{Me} = 0{,}387$ а.е., а эксцентриситет $e_{Me} = 0{,}206$. Значит афелийное расстояние этой планеты

$$Q_{Me} = a_{Me}(1 + e_{Me}) = 0{,}467 \text{ а.е.} = 70 \text{ млн км},$$

а её наименьшее расстояние от Земли $r_{min} = 1$ а.е. — $Q = 80$ млн км. Поскольку большая полуось лунной орбиты $a_l = 384400$ км, а эксцентриситет $e_l = 0{,}055$, то апогейное расстояние Луны составляет

$$Q_l = a_l(1 + e_l) = 405500 \text{ км}.$$

С Меркурия это расстояние видно под углом (в радианах) $\alpha = Q_l / r_{min} = 0{,}0051$. Это примерно равно радиусу лунного диска, наблюдаемого с Земли.

Учитывая эксцентриситет марсианской орбиты $e_{Me} = 0,0934$, легко найти перигелийное расстояние планеты:

$$q_{Me} = a_{Me}(1 - e_{Me}) = 1{,}382 \text{ а.е.},$$

а её наименьшее расстояние от Земли (в великом противостоянии)

$$r_{min} = q_{Me} - a_e = 0{,}382 \text{ а.е.}.$$

С такой дистанции угловое расстояние Луны от Земли составляет $\alpha = 24'$.

Задача 2. Синодический период внешней планеты составляет 417 суток. Каково ее среднее расстояние от Солнца? Что это за планета?

Решение. По формуле, связывающей синодический и сидерический периоды обращения

$$\frac{1}{T_{sin}} = \frac{1}{1 \text{ год}} - \frac{1}{T_{sid}},$$

находим $T_{sid} \approx 8$ лет. Применив третий закон Кеплера, выражая период в годах находим, что $a \approx 4$ а.е. Очевидно, что это малая планета астероид, так как находится в поясе астероидов.

Задача 3. Наблюдается небесное тело, имеющее синодический период 1,25 года. Каков его сидерический период? Между орбитами каких планет оно движется?

Решение. По известной формуле находим, что сидерический период составляет

$$T_{sid} = \frac{T_{sid}}{T_{sin} - 1 \text{ год}} = 5 \text{ лет}.$$

Большая полуось орбиты определяется из третьего закона Кеплера:

$$a = T^{2/3} = 2{,}92 \text{ а.е.}.$$

Следовательно, расстояние перигелия может составлять от 0 до 2,92 а.е., а расстояние афелия — от 2,92 до 5,84 а.е. при условии, что в сумме они составляют 5,84 а.е. По таблице орбитальных элементов планет легко определить, что наше небесное тело может двигаться между орбитами: Меркурия и Юпитера, Меркурия и Сатурна, Венеры и Юпитера, Земли и Юпитера, Марса и Юпитера.

Задача 4. Космический корабль опустился на астероид диаметром 1 км и средней плотностью 2,5 г/см^3. Космонавты решили объехать астероид по экватору на вездеходе за 2 часа. Смогут ли они это сделать?

Решение. Нет, не смогут. Вездеход должен двигаться со скоростью не больше первой космической, иначе он оторвется от поверхности и потеряет опору. Найдем время облета астероида по низкой орбите с этой предельной скоростью:

$$T = \frac{2\pi R}{V_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Учтем, что плотность астероида выражается как: $\rho = 3M/4\pi R^3$. Тогда

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Это очень важная формула. Она показывает, что время оборота по низкой орбите зависит не от размера притягивающего тела, а только от его средней плотности. Для поиска численных значений удобно помнить, что у низколетящего спутника Земли $T = 1{,}5$ часа, и плотность Земли $\rho_e = 5{,}5$ г/см^3. Тогда для планеты плотности ρ получим:

$$T = 1{,}5\ \text{час}\sqrt{\frac{5{,}5\ \text{г/см}^3}{\rho}} = \frac{3{,}5\ \text{час}}{\rho}.$$

Зная плотность астероида, определим $= 3{,}5/\sqrt{2{,}5} = 2{,}2$ часа. Значит вездеход не сможет объехать астероид за 2 часа. За такое время его нельзя облететь даже на ракете с выключенными двигателями.

До сих пор мы предполагали что астероид не вращается. Но если он вращается вокруг оси (а большинство астероидов вращается, и довольно быстро, с периодами в несколько часов), то двигаясь в сторону, противоположную вращению, космонавты могли бы объехать астероид за указанное время, не оторвавшись от его поверхности.

Задача 5. Решено направить ракету из Солнечной системы к центру Галактики. С какой скоростью и в каком направлении ее нужно запустить?

Решение. Солнечная система обращается вокруг галактического центра со скоростью около 250 км/с практически по круговой орбите. Вектор скорости лежит в плоскости Галактики и направлен в точку с галактическими координатами $l = 90°$, $b = 0°$ (созвездие Лебедя, недалеко от Денеба). Очевидно, чтобы ракета с круговой орбиты перешла на сильно сжатую эллиптическую (практически на радиальную) орбиту и начала падать к центру Галактики, необходимо погасить круговую скорость Солнечной системы, т.е. нужно сообщить ракете такую же по величине скорость, но в обратном направлении. Это направление с координатами $l = 270°$, $b = 0°$ лежит на южном небе в центре созвездия Парусов.

Однако запустить ракету со скоростью 250 км/с невероятно сложно. Поэтому для полета к центру Галактики необходимо применить гравитационный маневр.

Задача 6. Как изменится продолжительность года на Земле, когда Солнце превратится в белый карлик с массой $M = 0{,}6 M_{sun}$?

Решение. Пусть M_s — современная масса Солнца, а M_d — его масса после превращения в белый карлик. Поскольку это превращение происходит постепенно, в виде медленной потери газа на стадии красного гиганта, то орбита Земли останется круговой с современным моментом вращения (ведь никакие силы, кроме центральных, на Землю не действовали). Масса Земли неизменна, поэтому сохраняется удельный момент вращения, равный rV, где $V = \sqrt{GM/r}$ — орбитальная скорость, M — масса звезды, и r — радиус орбиты. Из условия

$$1\ \text{а.е.}\sqrt{\frac{GM_s}{1\ \text{а.е.}}} = r\sqrt{\frac{GM_d}{r}}$$

найдем радиус новой орбиты Земли: $r = 1\ \text{а.е.} \cdot (M_s/M_d)$. Тогда из Третьего закона Кеплера получим новый орбитальный период Земли:

$$T = \left(\frac{M_s}{M_d}\right)^2\ \text{лет}.$$

Для данного отношения масс получаем $T = 2{,}8$ современного года.

Задача 7. Космический корабль запущен таким образом, что освободившись от земного притяжения, он начал свободно падать на Солнце практически по прямой линии. Сколько дней продлится это падение?

Решение. Падение по радиусу к Солнцу с расстояния r_e можно представить как движение по предельно сжатому эллипсу с большой полуосью $a = r_e/2$. Тогда время падения t, равное половине орбитального периода T на этой орбите, согласно Третьему закону Кеплера, равно

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_s}} = T_e \cdot 2^{-5/2},$$

где

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{r_e^3}{GM_s}} = 1 \text{ год}.$$

Следовательно, $t = 0{,}18$ года $= 65$ суток.

2 Небесная сфера

Склонения

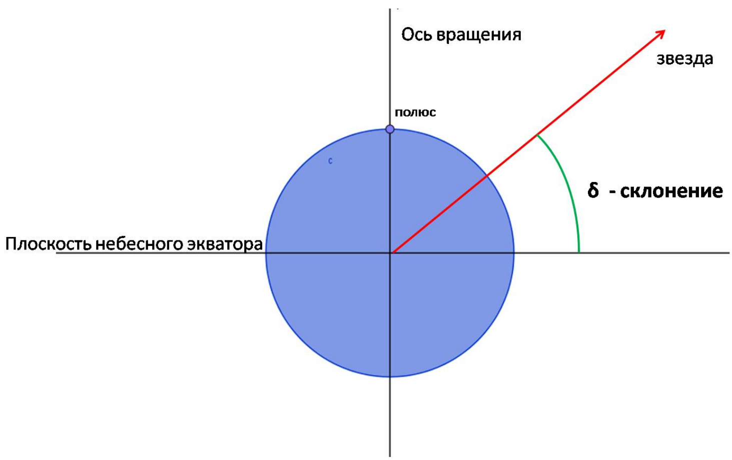

Рис. 7

Звёзды в задачах на небесную сферу всегда считают «стрелочками», то есть направлениями в пространстве.

Определение. Склонение звезды — это угол между направлением на звезду и плоскостью небесного экватора.

Склонение считается положительным, если направление на звезду лежит севернее экватора, иначе оно считается отрицательным. Таким образом, у полярной звезды склонение равно $\delta = 90°$, у южной полярной $\delta = -90°$, у звёзд, лежащих в плоскости экватора (на небесном экваторе) $\delta = 0°$.

Простейшие свойства, которые следуют из определения склонения:

- высота полярной звезды постоянна и равна широте места
- через зенит проходят звезды со склонением, равным широте места

Для решения задач надо уметь рисовать такие картинки:

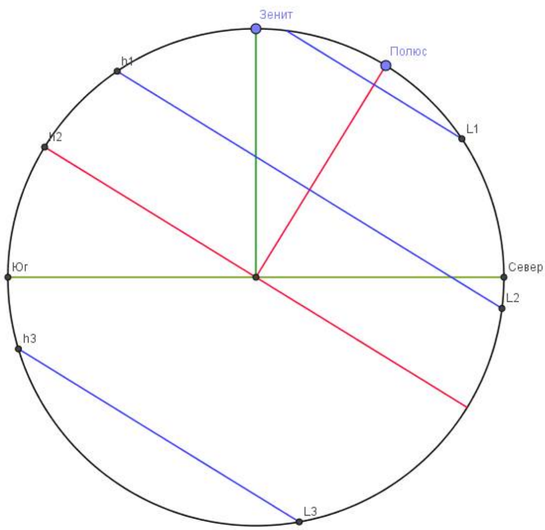

Рис. 8: Проекция небесной сферы на небесный меридиан.

На рисунке 8 зеленым показана горизонтальная система: горизонт и полукруг запад-зенит-восток (первый вертикал). Красным цветом показана соответсвующая экваториальная система: небесный экватор и полукруг запад-полюс-восток. Синим показаны суточные треки звезд: незаходящей (1), восходяще-заходящей (2) и невосходящей (3).

При решении задач надо еще указать угол широты и угол склонения:

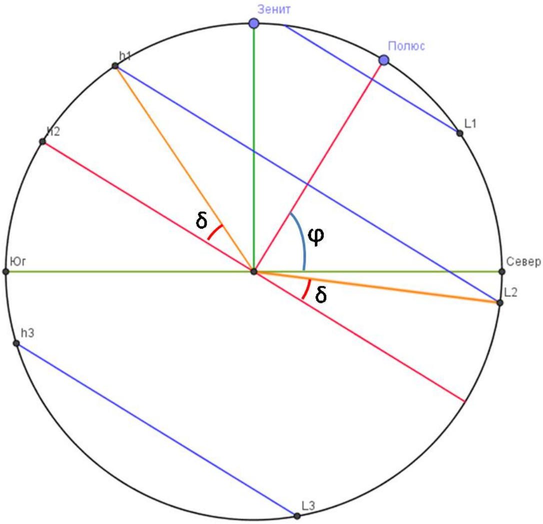

Рис. 9

Определение. Зенитным расстоянием звезды называют угол между звездой и зенитом. Другими словами, $z = 90° - h$, где h — высота. Зенитное расстояние может составлять от 0° до 180°.

Определение. Северным полярным расстоянием звезды называют угол между ней и северным полюсом. Другими словами, $p = 90° - \delta$, где δ — склонение. Полярное расстояние может составлять от 0° до 180°.

Формула для высоты звезды в верхней кульминации:

$$h_{\max} = 90° - |\phi - \delta|,$$

в нижней:

$$h_{\min} = |\phi + \delta| - 90°,$$

где ϕ — широта места наблюдения, а δ — склонение наблюдаемой звезды.

Прямое восхождение

Звёзды с одинаковым склонением в течение звездных суток проходят по одинаковым трекам. Чтобы эти звезды различить, вводят вторую координату — прямое восхождение.

Определение. Прямое восхождение звезды — мера того, на какой долготе на экваторе эта звезда находится в верхней кульминации.

Удобно представлять эту меру с помощью картинки, изображенной на рисунке 10 (годится для звезд около небесного экватора):

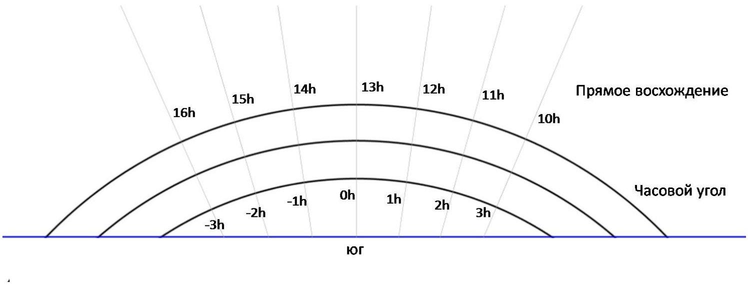

Рис. 10

Или на рисунке 11 (хороша для звезд с очень большим по модулю склонением):

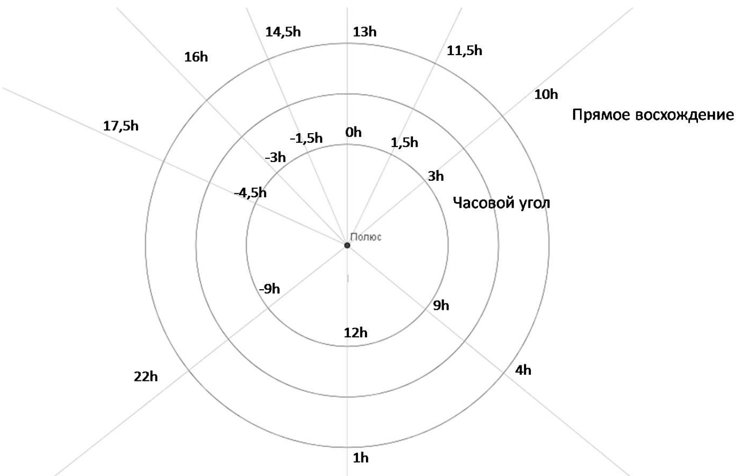

Рис. 11

В связи с этой координатой вводят такие определения:

- Звёздное время (в данном месте) — прямое восхождение звёзд, которые кульминируют в данный момент.
- Часовой угол (звезды в данном месте) — время, которое прошло с момента ее последней верхней кульминации.

Стоит заметить, что все три величины для удобства расчетов могут быть и отрицательными (например, $\alpha = 22^h$ и $\alpha = -2^h$ это одно и то же)

Основная формула, связывающая три определения:

$$S = \alpha + t,$$

где S — звёздное время, α — прямое восхождение, t — часовой угол.

Полезно помнить, чем отличается *звездное время* от *солнечного*. По среднему солнечному времени, Солнце находится в верхней кульминации в 12:00 (полдень) и в нижней кульминации в 00:00 (полночь).

Звездное время проходит свои сутки за $23^h56^m4^s$, поэтому оно обгоняет солнечное на примерно 4 минуты каждые сутки. Эти два времени совпадают в день осеннего равноденствия.

Также полезно помнить, чем отличается солнечное время от *гражданского*.

Гражданское время — это то, что показывают часы.

Разницу гражданского и солнечного времени можно посчитать через долготу места и его часовой пояс.

Задачи

Задача 8. В каких случаях угловая высота светила над горизонтом не изменяется в течение суток?

Решение. Высота звезд (но не Солнца, Луны и планет) не изменяется в течение суток для наблюдателей, находящихся на полюсах Земли. Для наблюдателя в любой точке Земли не изменяется высота светил, расположенных точно в полюсах мира.

Задача 9. В Москве ($\phi = 55°45'$) наблюдалась верхняя кульминация двух звезд: первой на высоте $27°14'$, а второй на высоте $51°43'$. Определите склонение этих звезд.

Решение. Если звезда проходит точку верхней кульминации на высоте $h < \phi$, то это происходит к югу от зенита, но если $h > \phi$, то звезда в этот момент может находиться как к югу, так и к северу от зенита (именно такова ситуация со второй звездой). Высота точки пересечения небесного экватора и меридиана на юге $h_e = 90° - \phi$. Соответственно, склонение первой звезды

$$\delta_1 = h_1 - h_e = h_1 + \phi - 90° = -16°18'.$$

А склонение второй звезды может быть как

$$\delta_2^S = h_2 - h_e = h_2 + \phi - 90° = 8°11',$$

так и

$$\delta_2^N = h_2 - h_e = \phi + 90° - h_2 = 84°45'.$$

Задача 10. Можно ли в Москве ($\phi = 56°$) наблюдать в верхней и нижней кульминациях в течение одних суток следующие звезды: Денеб ($\alpha = 20^h 40^m, \delta = +45°$) и Бетельгейзе ($\alpha = 6^h, \delta = +7°$)?

Решение. Рассчитаем высоту Бетельгейзе в нижней кульминации при наблюдении из Москвы:

$$h = \phi + \delta - 90° \approx 56° + 7° - 90° = -27°.$$

Таким образом, в момент нижней кульминации Бетельгейзе находится под горизонтом. Следовательно, описанная в условии ситуация невозможна.

Задача 11. Две слабые звезды с координатами $\alpha_1 = 18^h$, $\delta_1 = +40°$ и $\alpha_1 = 6^h$, $\delta_1 = +10°$ наблюдались одновременно на одном альмукантарате, одна — в верхней кульминации, а другая — в нижней. На какой широте, в какой момент звёздного времени и в какое время года это было?

Решение. Сделав чертёж и соединив указанные долготы на одном меридиане альмукантаратом, мы увидим, что место наблюдения может находиться только в северном полушарии, в его высоких широтах (поскольку зенит близок к полюсу мира). При этом в верхней кульминации должна находиться вторая звезда, а в нижней — первая.

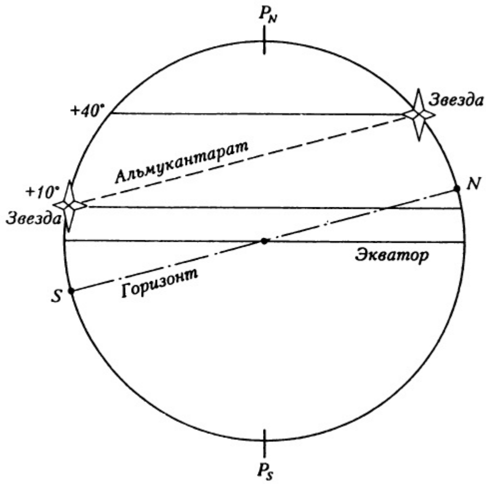

Рис. 12

Точное значение широты определим из условия равенства высот соответствующих кульминаций:

$$\phi - 90^\circ + \delta_1 = 90^\circ - \phi + \delta_2,$$

откуда $\phi = 75^\circ$. Поскольку в верхней кульминации была звезда с $\alpha = 6^h$, то это и есть значение звездного времени. Учитывая, что звезды слабые, заключаем, что наблюдения проводились глубокой ночью, скажем, вблизи полуночи. Значит Солнце имело в этот момент $\alpha = 18^h$, т.е. это была зима.

Задача 12. Измерения полуденной высоты Солнца 22 июня дали $h_1 = 57^\circ$, а 22 декабря $h_2 = 10^\circ$. Определите широту места наблюдения и склонение Солнца в эти дни.

Решение. Из наблюдений известно, что 22 июня Солнце имеет максимальное склонение $\delta = +\varepsilon$, а 22 декабря — минимальное: $\delta_2 = -\varepsilon$. Поскольку $h_1 = 90^\circ - \phi + \varepsilon$, а $h_2 = 90^\circ - \phi - \varepsilon$, то получим:

$$\varepsilon = (h_1 - h_2)/2 = 23{,}5^\circ,$$

$$\phi = 90^\circ - (h_1 + h_2)/2 = 56{,}5^\circ.$$

Таким образом, мы узнали не только склонение Солнца и широту места, но и наклон эклиптики к экватору.

Задача 13. Солнце на Северном полюсе взошло на московском меридиане. Где оно взойдет следующий раз?

Решение. Следуюший раз Солнце взойдет через год. Поскольку продолжительность года 365,24 дня, то совершив 365 целых оборотов, точка восхода (точка весеннего равноденствия) передвинется еще на четверть круги, и Солнце взойдет на 90° западнее, чем в предыдущий раз.

Задача 14. Как должен быть выставлен телескоп на экваториальной монтировке для наблюдения звезды с координатами $\alpha 13^h 52^m, \delta = 30^\circ$, если звездное время $S = 12^h 19^m$? Если часовой механизм выключен, то как долго эта звезда будет пересекать поле зрения телескопа диаметром $45'$?

Решение. На круге склонений поставить 30°, а на круге часовых углов поставить $t_s - \alpha = -1^h 33^m$. То есть, от меридиана к востоку $1^h 33^m$ или по шкале $24^h - 1^h 33^m = 22^h 27^m$.

Если звезда будет двигаться через центр поля зрения, то это продлится

$$\frac{24 \cdot 45'}{360^\circ \cdot \cos(30^\circ)} = 3{,}5 \text{ мин.}$$

3 Яркость объектов

Светимость и освещенность

Все источники света (звезды, лампочки, даже люди) имеют свою мощность излучения. Она измеряется в $[\text{Вт}] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{с}}\right]$.

Определение. Светимостью астрономического объекта называется его мощность излучения.

От этих объектов свет, как правило, распространяется равномерно во все стороны (исключениями, например, являются фары автомобиля, лазеры). Так как площадь сферы равна $4\pi r^2$, то через каждый квадратный метр нормальной площадки, удаленной на r от источника, каждую секунду проходит количество световой энергии, равное

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right].$$

Определение. Величина E в предыдущем уравнении называется освещённостью.

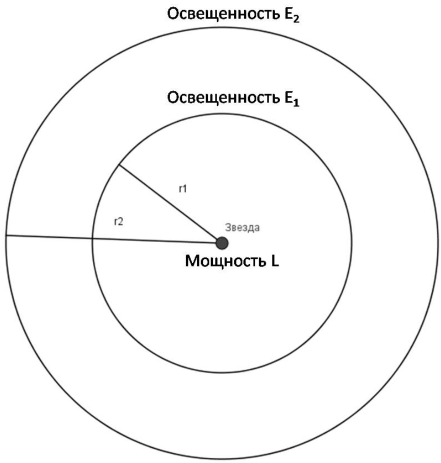

Рис. 13

Яркость объекта падает как квадрат расстояния до него, то есть для освещённостей на картинке справедливо

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Звёздные величины

Звёздные величины — традиционная логарифмическая шкала яркостей звёзд в астрономии. По освещенности (которая измеряется в $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$) можно определить звездную величину, и наоборот.

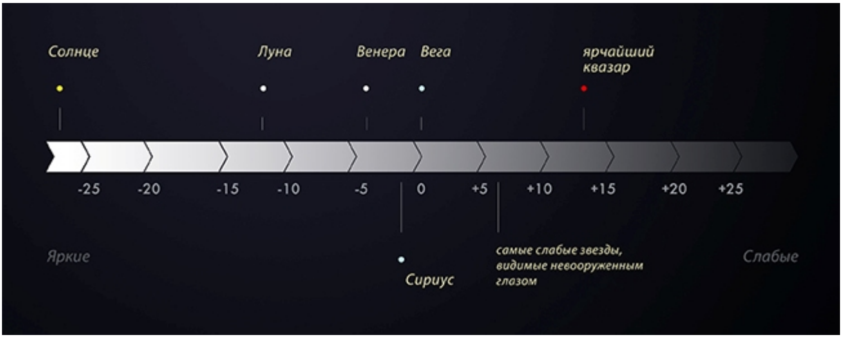

Рис. 14

Звездная величина — просто другой способ записать освещенность от объекта. Есть и другой способ записать светимость — абсолютная звездная величина.

Определение. Звёздная величина звезды, видимая на расстоянии в 10 пк от нее, называется абсолютной звёздной величиной.

Отношение освещенностей определяет *разницу* звездных величин по следующим формулам:

$$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1},$$

$$m_1 - m_2 = 2{,}5 \lg\left(\frac{E_2}{E_1}\right).$$

Здесь E_1 и E_2 — освещённости первого и второго объекта, m_1 и m_2 — звёздные величины первого и второго тела соответственно.

Не стоит забывать, что складывать или перемножать звездные величины абсолютно бессмысленно. Складывать надо освещенности.

Задачи

Задача 15. Расстояние до Сириуса (2,7 пк) уменьшается на 8 километров ежесекундно. Через сколько лет яркость Сириуса возрастет вдвое?

Решение. Выведем сначала общую формулу. Пусть R — расстояние до звезды, v — скорость в направлении наблюдателя, n — число, показывающее, во сколько раз увеличится блеск звезды. Учитывая, что освещенность изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, можно написать:

$$n = \left(\frac{R}{R - vt}\right)^2,$$

Где t — время, за которое освещенность изменится в n раз. Отсюда

$$t = \frac{R}{v}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}}\right).$$

Если R выразить в километрах и v — в километрах за год, то t будет выражено в годах. Подставив числовые данные, получаем, что блеск Сириуса возрастает вдвое через 97 тысяч лет.

Задача 16. Шаровое скопление содержит миллион звезд главной последовательности, каждая из которых имеет абсолютную звездную величину $M = 6^m$, а также 10 тыс. красных гигантов с величинами $= 1^m$. Можно ли увидеть это скопление невооруженным глазом с расстояния в 10 кпк?

Решение. Численные данные в этой задаче выбраны так, что решить ее можно без сложных формул. Пусть количество звёзд главной последовательности $N = 10^6 = 100 \cdot 100 \cdot 100$, тогда их суммарная абсолютная звёздная величина на $5^m + 5^m + 5^m = 15^m$ меньше, чем у одной такой звезды, и составляет $6^m - 15^m = -9^m$. Для красных гигантов $N_g = 10^4 = 100 \cdot 100$, значит и их суммарная величина равна $1^m - 5^m - 5^m = -9^m$. Кстати, в реальных шаровых скоплениях приблизительно такая же ситуация: сравнительно немногочисленные красные гиганты излучают столько же света, сколько все прочие звезды скопления.

Теперь определим видимую величину скопления. Поскольку расстояние 10 кпк в 1000 раз превышает то расстояние, на котором определяются абсолютные величины (10 пк), то видимый блеск звезд будет в 1000^2 раз меньше абсолютного. Представив это число как $100 \cdot 100 \cdot 100$, найдем разность блеска в звёздных величинах: $5^m + 5^m + 5^m = 15^m$.

Значит суммарный блеск красных гигантов и звезд главной последовательности по отдельности будет равен $-9^m + 15^m = 6^m$. Все скопление будет казаться в 2 раза ярче звезды 6^m, т.е. вполне доступно нормальному глазу на темном небе. Разумеется, все это так только при отсутствии межзвездного поглощения света.

Задача 17. Какая из двух звезд ярче на земном небе: звезда видимой величины $m = 2$ или звезда с абсолютной величиной $M = -5$, находящаяся на расстоянии 100 пк от Земли?

Решение. Поскольку вторая звезда в 10 раз дальше того расстояния (10 пк), на котором определяются абсолютные звездные величины, то поток света от нее в $10^2 = 100$ раз слабее, чем от звезды с видимой величиной $m = -5^m$. Ослабление потока в 100 раз соответствует увеличению звездной величины на 5^m. Следовательно, вторая звезда имеет видимую величину

$$-5^m + 5^m = 0^m$$

и она ярче первой звезды.

Задача 18. Звёзд от 3^m до 4^m на небе около 400, а от 4^m до 5^m — около 1100. Какие из них в сумме ярче освещают Землю?

Решение. Суммарный блеск первой группы звёзд составляет около

$$m_1 = 3{,}5^m - 2{,}5^m \lg 400 = -3{,}0^m,$$

а второй группы около

$$m_2 = 4{,}5^m - 2{,}5^m \lg 1100 = -3{,}1^m.$$

Значит, обе группы практически равноценны по суммарному блеску. Любопытно, что такая закономерность сохраняется вплоть до очень больших m. Например, звёзд между 17^m и 18^m на небе порядка 150 миллионов. Их суммарный блеск

$$m_{17-18} = 17{,}5^m - 2{,}5 \lg(1{,}5 \cdot 10^8) = -2{,}9^m.$$

Астрономы считают, что продвинувшись до 30^m, мы практически сможем наблюдать все звёзды Галактики. Оценим их полный блеск, предполагая, что найденное соотношение выполняется для всех звёздных величин:

$$m_{0-30} = -3^m - 2{,}5\lg 30 = -6{,}7^m.$$

Таким образом, все звёзды Галактики освещают Землю в 100 млн раз слабее Солнца.

Задача 19. Шаровое скопление M92 в Геркулесе имеет угловой диаметр $\alpha = 8'$ и видимый блеск $m = 6^m$, а расстояние до него $r = 10$ кпк. Найти абсолютную звездную величину скопления и его линейный диаметр. Полагая, что скопление состоит из звезд типа Солнца, найти число звезд в скоплении, их среднюю пространственную плотность и среднее расстояние между ними.

Решение. Переведя угловой диаметр в радианную меру, найдём линейный диаметр скопления:

$$d = \alpha D = \frac{8' \cdot 10\ \text{кпк}}{3438'} = 23\ \text{пк}.$$

Абсолютная величина скопления при нулевом межзвёздном поглощении

$$M = m + 5 - 5\lg r = -9^m$$

Тогда число звёзд определим по светимости скопления:

$$N = \frac{L}{L_{sun}} = 2{,}512^{(M_{sun}-M)} = 4 \cdot 10^5.$$

Приняв объём скопления $V = \pi d^3/6$, найдём среднюю пространственную плотность звёзд:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{6N}{\pi d^3} = 63\ \text{пк}^{-3},$$

т.е. в каждом кубическом парсеке скопления в среднем находится 63 звезды.

Если среднее расстояние между звёздами L, то средний объём пространства на одну звезду L^3. Тогда число звёзд на единицу объёма $1/L^3 = n$. Следовательно, $L = n^{-1/3} = 0{,}25$ пк.

Задача 20. Сириус превосходит Солнце по светимости в 22 раза. На каком расстоянии от Солнца наблюдатель, летящий к Сириусу, сможет отметить, что Солнце и Сириус имеют одинаковый блеск? (Параллакс Сириуса равен $\pi = 0{,}373''$.)

Решение. Пусть $D = 1/\pi$ — расстояние между Солнцем и Сириусом, X — расстояние наблюдателя от Солнца, L_S и L_s — светимости Солнца и Сириуса, причем $L_S = 22L_s$. Тогда, в соответствии с фотометрическим законом обратных квадратов, условие задачи запишем так:

$$\frac{L_s}{X^2} = \frac{L_S}{(D-X)^2},$$

откуда легко получить квадратное уравнение:

$$21X^2 + 2DX - D^2 = 0.$$

У этого уравнения два корня: 0,47 пк и $-0{,}73$ пк.

Смысл двух решений очевиден, одна из точек лежит между звездами (она-то нам и нужна), а другая — в стороне от Солнца, противоположной Сириусу. Если бы путешественник ошибся направлением и полетел в другую сторону, то в этой точке он тоже обнаружил бы равенство блеска Солнца и Сириуса.

Задача 21. Американский художник Артур Вудс предлагает создать на околоземной орбите «Скульптуру мира» — надувной тор из тонкой алюминированной пленки, отражающей 70% света. Диаметр тора предполагается 800 м, а толщина 50 м. Оцените блеск этой скульптуры, считая, что она движется по солнечно-синхронной орбите высотой 1000 км.

Решение. Солнечно-синхронной называется такая близкая к полярной орбита, плоскость которой из-за нецентрального характера гравитационного поля Земли поворачивается (прецессирует) со скоростью около 1° в сутки. При этом плоскость орбиты составляет постоянный угол с плоскостью терминатора, которая поворачивается с той же скоростью вследствие орбитального движения Земли.

Если плоскость солнечно-синхронной орбиты составляет небольшой угол с плоскостью терминатора, то скульптура будет видна жителям Земли по вечерам на фоне сумеречного или ночного неба, обращаясь с периодом около 2 часов по своей орбите. Спутник на такой орбите виден с поверхности Земли в полосе шириной около 7000 км, а за 2 часа Земля на экваторе поворачивается на 3670 км. Поэтому каждый ясный вечер эту космическую скульптуру могли бы наблюдать все жители Земли.

Сравним блеск скульптуры с блеском Луны ($m = -12{,}7^m$). Максимальный телесный угол, под которым может быть видна скульптура, составляет

$$W = 2\pi RH\left(\frac{57{,}3^o}{h}\right) = 4\cdot 10^{-4}\ \text{кв. гр.},$$

где R и H — радиус и толщина тора, а h — высота орбиты. Телесный угол лунного диска $\Omega \approx 0{,}2$ кв. гр.. Следовательно, с учётом десятикратной разницы в альбедо, отношение потоков света от Луны и скульптуры составляет

$$\frac{E_m}{E} = 0{,}1\frac{\Omega_m}{\Omega} = 50.$$

В звездных величинах это соответствует $dm = 2{,}5\lg 50 = 4{,}2$. Следовательно, максимальный блеск скульптуры $4{,}2^m - 12{,}7^m = -8{,}5^m$. Учитывая, что она не всегда будет видна на кратчайшем расстоянии (т.е. в зените) и не всегда будет полностью освещена Солнцем (в большинстве случаев фазовый угол «Солнце — скульптура — зритель» будет около 90°), можно оценить ее ожидаемый блеск в -7^m. Значит, Скульптура мира стала бы самым ярким ночным светилом, за исключением Луны. Правда, ее угловой размер не превысил бы $2R/h \approx 3'$. Поэтому большинству людей, не обладающих очень острым зрением, скульптура казалась бы невероятно яркой движущейся звездой. Однако в даже простейший бинокль отчётливо была бы видна её форма.

4 Телескопы

Классификация

По типу оптических поверхностей телескопы делят на:

- линзовые;

- зеркальные;
- зеркально-линзовые.

Монтировки, на которые устанавливают телескопы, делят на:

- альт-азимутальные (движение происходит по азимуту и высоте);
- экваториальныме (движение происходит по склонению и прямому восхождению).

Наблюдения могут проводиться как глазом, так и через фотоаппарат или пзс-матрицу.

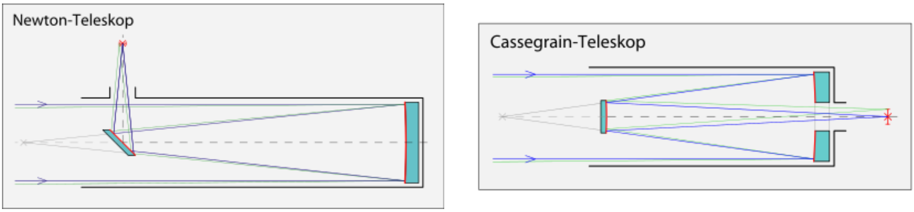

Рис. 15: Оптические системы Ньютона и Кассегрена

Основные характеристики

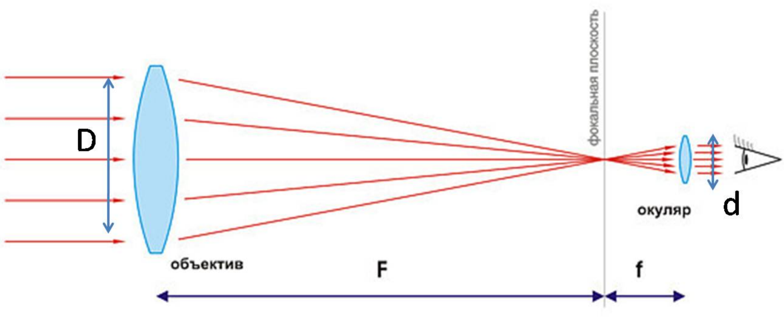

Рис. 16

На рисунке 16 обозначены: D — диаметр главной линзы или зеркала, F — его фокусное расстояние, f — фокусное расстояние окуляра, d — выходной пучок.

Определение. Увеличение телескопа — отношение визуальных угловых размеров объекта без телескопа и с телескопом.

Пример: если в реальности угловой диаметр галактики равен 1°, а увеличение телескопа равно 20, то через окуляр наблюдателю покажется, что у галактики угловой диаметр 20°.

Из подобия треугольников на рисунке 16 можно вывести формулу для увеличения:

$$\Gamma = \frac{F}{f} = \frac{D}{d}.$$

Нельзя забывать, что увеличение имеет смысл только при наблюдении глазом.

Определение. Угловое разрешение — минимальный угол, который теоретически позволяет различить данный телескоп. Объекты, находящиеся друг к другу ближе, чем угловое разрешение, сливаются в одну точку.

Из-за дифракции на объективе телескопа имеет место предел углового разрешения:

$$\beta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\ \ [\text{рад}]\,.$$

Основной характеристикой телескопа является именно диаметр, так как принимающая способность пропорциональна собирающей площади.

Определение. Предельной звёздной величиной называют минимальную яркость, которую можно различить глазом при наблюдении в данный телескоп.

Считая диаметр зрачка глаза равным 6 мм, получаем формулу для предельной звёздной величины:

$$m = 6 + 2{,}5\lg\left(\frac{D}{6\ \text{мм}}\right)^2.$$

Важно помнить, что эта формула верна только в случае, когда весь свет попадает в глаз. Если выходной пучок d больше диаметра зрачка, то предельная звездная величина будет меньше. В этом случае формула имеет вид

$$m = 6+2{,}5\lg\left(\frac{D}{6\ \text{мм}}\right)^2-2{,}5\lg\left(\frac{d}{6\ \text{мм}}\right)^2 = 6+2{,}5\lg\left(\frac{D}{d}\right)^2 = 6+2{,}5\lg(\Gamma)^2.$$

При фотографировании матрицу фотоаппарата ставят в фокальную плоскость главного зеркала (или линзы). Там формируется изображение неба с некоторым масштабом.

Определение. Масштабом телескопа называют отношение линейных размеров изображения объекта в фокальной плоскости к его угловым размерам на небе.

Этот масштаб связан с фокусным расстоянием следующим соотношением:

$$M = F\,\mathrm{tg}(1'') \quad \left[\frac{\text{мм}}{\text{угл сек}}\right].$$

С помощью масштаба можно посчитать, каким будет по размеру изображение объектов в фокальной плоскости, сколько пикселей на фотографии оно займет. У звезд, несмотря на их очень малый угловой размер, в силу волновых эффектов будет изображение размера

$$L_s = F \cdot 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

Определение. Полем зрения телескопа называют угловое расстояние между крайними видимыми точками неба в окуляре или на изображении.

Поле зрения может быть рассчитано с использованием масштаба. Также масштаб позволяет посчитать поле зрения телескопа при наблюдении глазом:

$$\omega = \frac{2f\,\mathrm{tg}(q/2)}{M} = \frac{2f\,\mathrm{tg}(q/2)}{F\,\mathrm{tg}(1'')} \;\; [\text{угл сек}]\,.$$

В этой формуле q — поле зрения окуляра.

При наблюдении протяженных объектов нам важна не просто яркость, а поверхностная яркость. Поверхностная яркость пропорциональна квадрату диаметра и обратно пропорциональна площади изображения в фокальной плоскости (F^2). Поэтому для астрофотографов важно знать относительное отверстие.

Определение. Относительным отверстием оптической системы называют отношение диаметра к фокусному расстоянию:

$$A = \frac{D}{F}.$$

Чем больше эта величина, тем лучше видны протяженные объекты (галактики, туманности).

Задачи

Задача 22. Как изменится на фотографии вид полной Луны, если закрыть правую половину объектива телескопа?

Решение. Половина объектива строит изображение так же, как и целый объектив, но собирает вдвое меньше света. Поэтому изображение Луны не изменится, а лишь станет вдвое менее ярким.

Задача 23. Космический телескоп способен зарегистрировать значительно менее яркие звёзды, чем наземный телескоп такого же размера. Почему?

Решение. Наблюдению слабых звезд мешает атмосфера Земли. Во-первых, она поглощает свет звезды, ослабляя его почти вдвое. Во-вторых, атмосферное размытие искажает изображение звезды, превращая практически точечный источник в диск диаметром $1'' - 2''$. А это плохо, потому что, в третьих, ночное небо не абсолютно темное: оно светится из-зз рассеяния промышленного и городского света пылинками, из-за химических реакций в верхней атмосфере, и тп. Яркость ночного неба у поверхности Земли соответствует излучению примерно одной звезды 21^m с квадратной секунды небосвода; на лучших высокогорных обсерваториях мира она снижается до 22^m /кв.сек. Поэтому изображения звезд $23^m - 24^m$ почти не отличаются по яркости от соседних беззвездных участков ночного неба. Это очень затрудняет их обнаружение с земли: требует больших телескопов и больших экспозиций.

В космосе нет поглощения света атмосферой и примерно вдвое ниже яркость неба. Но главное — там нет атмосферного дрожания, поэтому изображения звезд могут иметь дифракционный размер, который для телескопов диаметром $2 - 3$ м составляет всего $0{,}05''$. Такая площадка космического неба светит как звезда 29^m. К тому же, и длительность экспозиции в космосе не ограничена продолжительностью земной ночи. Поэтому в космосе можно регистрировать более слабые звезды, чем на земле.

Задача 24. Оцените предельную звёздную величину и угловое разрешение телескопа Кека с диаметром главного зеркала $D = 10$ м. Какое увеличение надо для этого использовать?

Решение. Максимальная проницающая сила достигается при увеличении не меньше равнозрачкового, которое равно отношению диаметра зеркала ($D = 10$ м) к диаметру зрачка глаза ($d = 6$ мм) и составляет $\frac{D}{d} = 1700$. Тогда формально поток света от звезды в глаз возрастет пропорционально $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ и предельная величина станет

$$m = 6^m + 5\lg\frac{D}{d} = 22^m.$$

Замечание. Но в действительности такая проникающая сила не может быть достигнута, поскольку при увеличении в 1700 раз изображение звезды перестанет быть для глаза точечным. На высокогорной обсерватории Мауна-Кеа, где сооружен этот телескоп, размер изображений звезд нередко бывает $0{,}3''$, т.е. при увеличении более 350 раз диаметр изображения звезды становится больше разрешающей способности глаза. Для протяженных же обьектов использованная выше формула неприменима, поскольку собранный свет распределяется между многими элементами сетчатки глаза.

Если ограничиться увеличением $350 - 400$, то поток света, попадающего в зрачок, уменьшится по сравнению с формально вычисленным раз в 20, и предельная величина станет порядка 19^m. А если еще учесть потери света при отражении от зеркал и прохождении через линзы окуляра, то следует ожидать предельной величины около $18{,}5^m$.

Легко заметить, что при заданном качестве изображений, определяемом величиной атмосферного дрожания на месте установки телескопа, для наблюдения звезд глазом существует оптимальный диаметр объектива, дающий максимальную проницающую силу. Дальнейший рост диаметра не приводит к усилению чувствительности, поскольку дополнительный свет все равно проходит мимо зрачка. Следует ожидать, что на Мауна-Кен можно достигнуть $18{,}5^m$ и с двухметровым телескопом.

Эти вычисления косвенно подтверждаются экспериментом: на обсерватории Маунт Паломар, где изображения обычно не бывают лучше $0{,}5''$, с помошью пятиметрового телескопа удается увидеть звезды до $17{,}5^m$.

Задача 25. Какой из двух телескопов с диаметром объектива D и фокусным расстоянием F нужно использовать для фотографирования двойной звезды с расстоянием между компонентами $0{,}8''$, если размер зерна фотоэмульсии 30 мкм:

1. $D = 35$ см, $F = 4$ м,
2. $D = 10$ см, $F = 12$ м?

Решение. Определим дифракционное разрешение объективов и масштаб изображения в их фокальной плоскости:

1. Разрешение $\alpha = 14''/D(\text{см}) = 14''/35 = 0{,}4''$. Этого достаточно для разделения компонентов двойной звезды. Масштаб $\mu = 206265''/F = 206265''/4\text{м} = 0{,}05''/\text{мкм}$. Значит на одном зерне фотоэмульсии, ограничивающем разрешающую способность фотопластинки, уложится изображение размером $30\,\text{мкм} \cdot 0{,}05''/\text{мкм} = 1{,}5''$. Следовательно изображения обеих компонент попадут на одно зерно эмульсии и раздельно сфотографированы не будут. Такой телескоп не годится.
2. Разрешение $\alpha = 14''/10() = 1{,}4'$'. Этого не достаточно для разделения компонент, хотя фокусное расстояние телескопа, как легко проверить, достаточно велико, чтобы раздельно изобразить звезды на фотопластинке. Итак, оба телескопа не годятся.

Задача 26. От звезды 0^m на 1 см^2 земной поверхности падает около 1 миллиона фотонов в секунду. Сколько фотонов попадает на фотопластинку от звезды 20^m за 1 час, если диаметр объектива телескопа 1 м?

Решение. Разница в 20^m уменьшает поток фотонов в $2{,}512^{20} = 10^8$ раз. Время экспозиции (3600 секунд) и площадь объектива ($\pi D^2/4 = 7854\,\text{см}^2$) увеличивают его в $3600 \cdot 7854 = 2{,}8 \cdot 10^7$ раз (потерь в оптике мы не учитываем). Следовательно на пластинку попадет $0{,}28 \cdot 10^6$ фотонов.

Задача 27. Какого размера будет изображение Луны в фокальной плоскости телескопа с фокусным расстоянием 1000 мм?

Решение. Воспользовавшись справочными данными о Луне (радиус — 1730 км, расстояние до Земли — 380000 км), найдём ее угловой диаметр:

$$\alpha = \arcsin\frac{r}{L} \approx 32'.$$

Размер в фокальной плоскости можно рассчитать через масштаб телескопа:

$$H = \frac{\alpha}{M} = \frac{32'}{F \cdot \mathrm{tg}(1'')} = 8{,}7 \text{ мм}.$$

Задача 28. Любители астрономии иногда предлагают для повышения увеличения телескопа рассматривать изображение объекта не в окуляр, а в микроскоп. Целесообразно ли это делать?

Решение. Минимальный размер деталей, видимых в телескоп, определяется, как правило, не увеличительной способностью окуляра, а качеством атмосферы и объектива телескопа. Сделав окуляр более мощным, мы лишь сузим поле зрения телескопа, уменьшим его проницающую способность, но не улучшим качество изображения. В сущности, окуляр телескопа как раз и является микроскопом (или сложной лупой — дело не в названии) для рассматривания изображения, созданного в фокальной плоскости объективом. Но задача окуляра не только в том, чтобы увеличить изображение, но также и в том, чтобы не допустить потери света, и не сузить поле зрения.

5 Система Земля–Солнце

Эклиптика

Определение. Эклиптика — это плоскость орбиты Земли. Также эклиптикой называют линию из точек на небесной сфере, в которых может находиться Солнце.

Рис. 17

Основными известными точками на эклиптике являются точки равноденствий и солнцестояний.

- весеннее $\delta = 0°$, $\alpha = 0^h$ в Рыбах;
- весеннее $\delta = +23{,}5°$, $\alpha = 6^h$ в Близнецах;
- весеннее $\delta = 0°$, $\alpha = 12^h$ в Деве;
- весеннее $\delta = -23{,}5°$, $\alpha = 18^h$ в Стрельце.

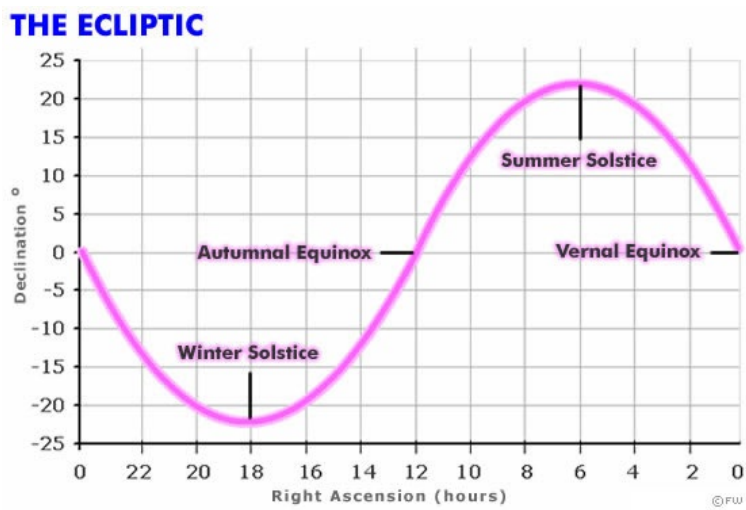

Рис. 18

В задачах можно считать, что прямое восхождение Солнца меняется равномерно (увеличивается) в течение года. А вот изменение склонения напоминает синусоиду. Формулой это можно записать так:

$$\delta = 23{,}5\sin(360^\circ\cdot\frac{x}{365{,}25}).$$

Здесь x — число дней, прошедшее с момента весеннего равноденствия.

Солнечное время

На самом деле, даже на Гринвическом меридиане истинный полдень не всегда наступает в 12:00. Это связано с эллиптичностью орбиты и наклоной земной оси. Полдень на самом деле может наступить раньше или позже примерно на 15 минут. Эту разницу истинного солнечного и среднего солнечного времени называют уравнением времени.

Определение. Уравнение времени — поправка, равная разнице истинного и солнечного времени для Земли в данный момент. Так выглядит график этой поправки в течение года:

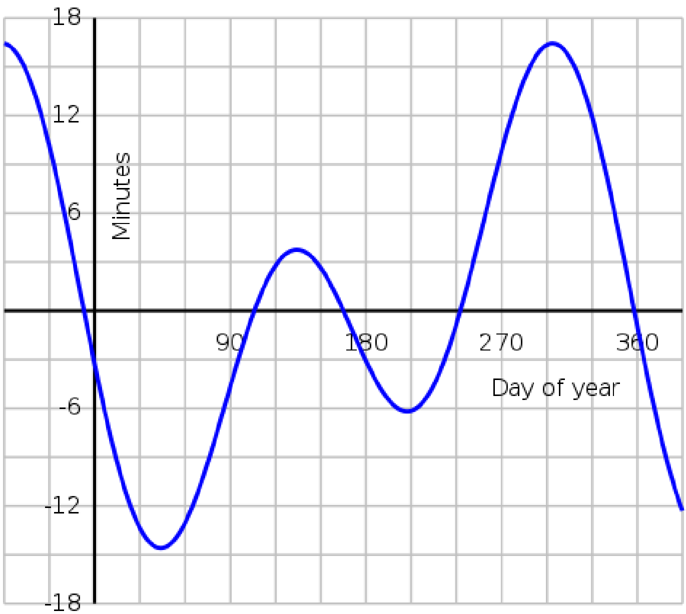

Рис. 19

Сумерки

Время до восхода или после заката, когда в целом светло, но Солнце под горизонтом, называют сумерками. В зависимости от высоты Солнца, их называют:

- $0°$ до $-6°$ — гражданскими;
- $-6°$ до $-12°$ — навигационными;
- $-12°$ до $-18°$ — астрономическими.

Продолжительность сумерек легко считать, зная, что путь Солнца пересекает горизонт примерно под углом $90° - \phi$.

6 Система Земля–Луна

Фазы

В зависимости от взаимного положения Солнца и Луны наш спутник можно увидеть в разных фазах. Чем сильнее различаются эклиптические долготы Луны и Солнца, тем большая часть Луны является освещённой.

Рис. 20

Основные фазы Луны:

- новолуние $\Phi = 0$;

- первая четверть $\Phi = 0.5$;
- полнолуние $\Phi = 1$;
- последняя четверть $\Phi = 0.5$.

Для остальных моментов фаза тоже является числом, считается по следующей формуле:

$$\Phi = \frac{1 + cos(\psi)}{2},$$

где угол ψ — угол при Луне.

Затмения

Иногда случаются, ситуации, что Солнце, Земля и Луна выстраиваются ровно по одной линии. В таких случаях, в каких-то частях Земли Луна может закрывать собой Солнце. В этих случаях говорят, что наблюдается солнечное затмение. Аналогично, если Луна попадает в тень Земли, то наблюдается лунное затмение.

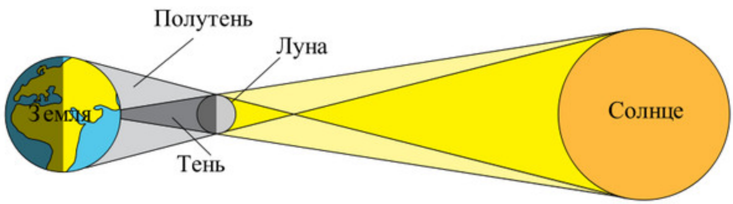

Рис. 21

При любом солнечном затмении наблюдатель может попасть в зону тени или полутени Луны. В зависимости от этого он становится свидетелем полного, кольцеобразного или частного затмения.

Стоит помнить, что у затмений выделяют особые моменты — *первый, второй, третий и четвертый контакт.*

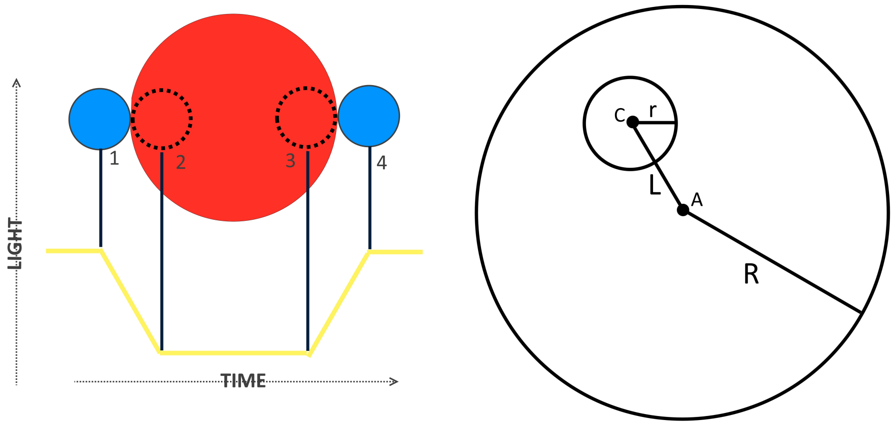

Рис. 22

У затмений тоже бывает своя фаза. Формула:

$$\Phi = \frac{R + r - L}{2R}.$$

Задачи

Задача 29. Во время солнечного затмения путешественник заметил, что ущербление диска Солнца началось прямо снизу. Где и когда это могло быть?

Решение. Это могло произойти в экваториально–тропических странах во второй половине дня. Орбитальное движение Луны проявляется в ее видимом движении относительно звезд с запада на восток с периодом 27,34 сут (сидерический месяц). Орбитальное движение Земли проявляется в видимом движении Солнца также с запада на восток с периодом 1 год. Поэтому лунный диск во время полного затмения догоняет солнечный диск и касается его западной стороны. При частном затмении точка касания будет сдвинута к северу или югу, и решение усложнится, поэтому будем считать, что затмение полное.

Западная область на диске Солнца может оказаться «внизу» только во второй половине дня в странах, не очень далеких от экватора. Максимальную широту этих мест легко вычислить: она будет равна максимальному углу между плоскостями лунной орбиты и земного экватора, т.е.

$$23{,}5^\circ + 5{,}5^\circ = 29^\circ.$$

Если затмение произошло через несколько часов после полудня, то можно даже приблизительно сопоставить сезон года и широту местности: летом и зимой это могло наблюдаться только вблизи экватора, весной (имеется в виду весна Северного полушария) — вблизи Северного тропика, а осенью — вблизи Южного.

Задача 30. Почему солнечные затмения в целом на Земле чаще бывают в зимние месяцы северного полушария, а не наоборот?

Решение. Вследствие небольшой эллиптичности земной орбиты расстояние Земли от Солнца изменяется в течение года: Земля дальше от Солнца в период лета в северном полушарии и ближе к нему в зимний период. Поэтому угловой размер Солнца летом чуть меньше, чем зимой. По причине же эллиптичности лунной орбиты расстояние Луны от Земли (соответственно, и угловой размер Луны) также испытывает колебания с периодом в лунный месяц и в среднем не связанные с сезоном года. Поэтому летом Луна чаще имеет угловой диаметр больше солнечного и полностью закрывает его диск. Зимой же чаще, чем летом, наблюдаются кольцеобразные затмения.

Задача 31. Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах?

Решение. Во время солнечного затмения лунная тень движется по поверхности Земли приблизительно с запада на восток со скоростью около 1 км/с (в первом приближении это скорость движения Луны по орбите). В ту же сторону, на восток, но с меньшей скоростью, происходит суточное движение земной поверхности: на экваторе его скорость достигает

$$\frac{2\pi R}{24^h} = 0{,}5 \text{ км/с},$$

а на полюсах уменьшается до нуля. Поэтому в районе экватора скорость тени относительно поверхности составляет только 0,5 км/с. Приняв диаметр лунной тени в 200 км, легко вычислить, что в высоких широтах затмение может продолжаться около 3,5 мин, тогда как вблизи экватора — до 7 мин.

Вторая, менее важная причина состоит в том, что размер лунной тени на экваторе чуть больше, чем в полярных областях, поскольку наблюдатель на экваторе, как правило, ближе к Луне.

Задача 32. Можно ли в момент полного лунного затмения наблюдать из одной точки на земной поверхности Луну и Солнце одновременно?

Решение. Можно, если наблюдатель на Земле расположен так, что Луна и Солнце видны вблизи горизонта и Луна к тому же проходит вблизи края земной тени. Тогда Центр Луны будет на расстоянии $25'$ от центра тени, а нижний край Луны будет на расстоянии $180°05'$ от нижнего края Солнца. Однако вследствие атмосферной рефракции нижние края светил у горизонта будут подняты на $35'$, и видимое расстояние между ними составит чуть менее $179°$. Значит, лунный и солнечный диски будут в этот момент над линией математического горизонта. Если наблюдатель находится на вершине горы, то оба светила могут быть существенно выше линии истинного горизонта. Но, разумеется, затемненный диск Луны не будет виден на фоне дневного неба (по крайней мере, в оптическом диапазоне).

Задача 33. На географическом полюсе Земли Солнце полгода находится над горизонтом и полгода — под горизонтом. А Луна?

Решение. Орбита Луны лежит почти в плоскости эклиптики, поэтому видимый путь Луны на небе почти совпадает с траекторией Солнца; только Луна совершает свой оборот не за год, как Солнце, а за один лунный месяц (27,3 сут). Значит при наблюдении с географического полюса Земли Луна будет 2 недели видна над горизонтом и на 2 недели скроется под горизонтом. С учетом атмосферной рефракции Луна будет видна чуть дольше.

Задача 34. Если Луна взошла в 23^h45^m во вторник, то когда произойдет ее следующий восход?

Решение. Луна движется навстречу суточному вращению небесной сферы со скоростью около $13°$ в сутки. Небесная сфера вращается со скоростью $15°$/час. Значит восход Луны будет запаздывать каждый день на

$$60^m \cdot \frac{13°}{15°} = 52^m.$$

После восхода во вторник перед полуночью в среду Луна не взойдет, а появится только в четверг вскоре после полуночи: в 0^h37^m.

Задача 35. В результате приливного эффекта Луна сейчас понемногу удаляется от Земли. В прошлом радиус ее орбиты был меньше. Оцените, какова была продолжительность полных солнечных затмений, когда радиус лунной орбиты был вдвое меньше современного.

Решение. Поскольку ныне Луна едва касается своим конусом тени земной поверхности, очевидно, что при уменьшении радиуса орбиты вдвое диаметр лунной тени вблизи Земли станет равен радиусу Луны (1738 км). Сложнее определить, с какой скоростью будет двигаться при этом лунная тень относительно земной поверхности.

Систему Земля-Луна в механическом смысле можно считать замкнутой, при этом в ней сохраняется суммарный момент импульса. Момент, связанный с суточным вращением Луны, пренебрежимо мал и мы его учитывать не станем. Практически сохраняется сумма орбитального момента Луны и суточного момента Земли:

$$M_l vr + kM_e R_e V = Const,$$

где M_l, r, v — масса, период и орбитальная скорость Луны, а M_e, R_e, V — масса, радиус и скорость вращения на экваторе Земли; коэффициент k зависит от распределения массы внутри Земли. Орбитальная скорость Луны составляет

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}.$$

Из этих уравнений нетрудно найти скорость вращения Земли в прошлом:

$$V = V_0 = 2V_0 \frac{M_l r_0}{M_e R_e} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right),$$

где индекс «0» отмечает современные значения величин. Учитывая, что $M_e = 81M_l$, $r_0 = 60R_e$, $r_0 = 2r$, $V_0 = 0{,}5$ км/с, $v_0 = 1$ км/с, км/с, определяем скорость вращения Земли: $V = 0{,}9$ км/с, и орбитальную скорость Луны: $v = 1{,}4$ км/с.

Скорость лунной тени относительно центра Земли практически совпадает с орбитальной скоростью Луны. Следовательно, относительно поверхности Земли лунная тень будет двигаться со скоростью $v = 1{,}4$ км/с в полярных областях в любое светлое время суток и в экваториальных областях утром и вечером, а на экваторе днем скорость тени составит $v - V = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5$ км/с. Значит продолжительность полной фазы затмения составит

$$\frac{1738 \text{ км}}{0{,}5 \text{ км/с}} = 1241 \text{ с},$$

или от 20 мин до 1 часа в зависимости от географической широты и времени суток.

Легко понять, что в те далекие времена затмения были не только более продолжительными, чем ныне, но и значительно более частыми: ведь лунная тень покрывала существенно большую площадь Земли, чем сейчас.