Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

НР
НАУКА В РЕГИОНЫ

Педогогические технологии на уроках математики

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ

2021

Авторы и составители: Брославская О. Н.

В «Концепции модернизации российского образования на период до 2020 года» отмечается, что одной из основных задач образовательной политики в России в настоящее время является задача формирования профессиональной элиты, выявления и поддержки наиболее одаренных, талантливых детей и молодежи. В связи с этим стала актуальной проблема развития одаренности у школьников.

В рамках реализации подпрограммы «Одаренные дети» Федеральной целевой программы «Дети России» была разработана «Рабочая концепция одаренности». Ее авторы (Д. Б. Богоявленская, В. Д. Шадриков, Н. С. Лейтес и др.) рассматривают одаренность как системное, развивающееся в течение жизни качество психики, определяющее возможность достижения человеком более высоких результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

В «Рабочей концепции одаренности» отмечается, что уровень, качественное своеобразие и характер развития одаренности — это всегда результат сложного взаимодействия наследственности (природных задатков) и социокультурной среды, опосредованного деятельностью ребенка.

В основе развития одаренности лежат психологические механизмы саморазвития личности и собственная активность ребенка.

Психологические исследования таких понятий как «одаренность» и «способность» (Ю. З. Гильбух, В. Н. Дружинин, В. А., Крутецкий, В. В. Клименко, Н. С. Лейтес, С. Л. Рубинштейн, А. И. Савенков, Б. М. Теплов, М. А. Холодная и др.) показывают:

- понятия «одаренность», «способность» определяются разными учеными по-разному;
- понятия «одаренность», «способность», «задатки» тесно связаны между собой и часто определяются одно через другое;
- в предлагаемых исследователями определениях понятий «одаренность», «способность» можно выделить ряд общих существенных признаков: высокий уровень умственной деятельности (интеллекта), определенные качества личности, которые обеспечивают достижения в той или иной деятельности.

В. Н. Дружининым, В. В. Клименко, А. М. Мустафиным и др. показано, что постоянная тренировка обеспечивает развитие способностей ребенка в различных направлениях.

Специальные математические способности наиболее полно исследованы В. А. Крутецким. Математические способности проявляются в высоком уровне развития основных познавательных процессов (представление и воображение, память, мышление, восприятие, речь, умение учиться), а также в увлеченности математическими вычислениями, символами, обобщениями, поиском изящных решений, ясностью и быстротой математической деятельности.

В. Д. Шадриков так определяет понятие «способность»: «Способность это свойства функциональных систем, реализующих отдельные психические функции, которые имеют индивидуальную меру выраженности, проявляющуюся в успешности и качественном своеобразии освоения и реализации деятельности». И далее: «Специальные способности есть общие способности, приобретшие черты оперативности под влиянием требований деятельности».

В. А. Крутецкий так определяет понятие «специальные способности»: «Специальные способности (математические) — это индивидуально психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности, и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениям и навыками в области математики».

Ю. М. Колягин, исследуя понятие «математическое мышление», выделяет следующие его качества: гибкость, оригинальность, глубина, целенаправленность, рациональность, широта, активность, критичность, доказательность мышления, организованность памяти, четкость и лаконичность речи и записи.

Работа учителя с математически одаренными и способными учащимися в условиях массовой общеобразовательной школы «...требует математической дифференциации и индивидуализации их обучения и воспитания».

Наиболее эффективным средством развития учащихся в процессе обучения служит самостоятельная учебная деятельность по решению специально подобранных учебных задач.

А. Н. Колмогоров отмечал: «В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т. п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной».

Успешность освоения учебного материала, темп овладения им, прочность осмысления знаний, уровень развития учащихся зависит не только от деятельности учителя, но и от познавательных возможностей и способностей учащихся, обусловленных многими факторами, в том числе особенностями восприятия, памяти, мыслительной деятельности и физическим развитием.

Следовательно, перед каждым учителем постоянно стоит задача создавать такие условия, при которых стало бы возможным использование фактических и потенциальных возможностей каждого ученика в классе.

Главное на уроке — работа учеников. И основная задача учителя — обеспечить полную загрузку каждого ученика в течение всего урока целесообразными действиями. Знания, которыми мы вооружаем учащихся, те умения и навыки, которые они приобретают во время учебных занятий, возникают не в результате прямых действий педагога, а лишь как следствие определённой организованной деятельности учащихся.

Педагог на уроке, прежде всего организатор учебной деятельности учеников. Планируя урок, я прежде всего планирую деятельность своих учеников. Характер и содержание учебной деятельности учащихся должны быть педагогически целесообразными, т. е. отвечать основным учебно-воспитательным задачам. При этом особенно важны два момента: чему научатся учащиеся, выполняя те или иные задания, и к чему они приучаются в процессе указанной деятельности.

Основной направляющей своих уроков я считаю развитие критического мышления учащихся. Развитие мыслительных навыков учащихся, необходимых для учёбы и обычной жизни (умение принимать взвешенные решения, работать с информацией, анализировать, рассматривать различные стороны решения). Для критического мышления характерно построение логических умозаключений, создание согласованных между собой логических моделей и принятие обоснованных решений, касающихся того, отклонить какое-либо суждение, согласиться с ним или временно отложить его рассмотрение. Когда мы мыслим критически, мы оцениваем результаты своих мыслительных процессов — насколько правильно принятое нами решение или насколько удачно мы справились с поставленной задачей. Критическое мышление также включает в себя оценку самого мыслительного процесса — хода рассуждений, которые привели к нашим выводам, или тех факторов, которые мы учли при принятии решения. Критическое мышление иногда называют еще и направленным мышлением, поскольку оно нацелено на получение желаемого результата.

Согласно выше сказанному я и выбираю формы работы на уроке, соответствующие развитию критического мышления учащихся.

В процессе использования технологии развития критического мышления формируется самостоятельное мышление, ученик вооружается методами и способами самостоятельной работы, получает возможность сознательно управлять образовательным процессом в системе «учитель-ученик», позволяет влиять на результат и цели образовательного процесса.

Методика критического мышления состоит из трех этапов или стадий.

Это «Вызов — Осмысление — Рефлексия».

Рассмотрим некоторые методические приёмы критического мышления, которые я применяю на своих уроках.

Лекция — хорошо знакомый и часто используемый педагогический прием. Особенности ее использования в технологии критического мышления заключается в том, что она читается дозировано. После каждой смысловой части обязательно делается остановка. Во время «стопа» или идет обсуждение проблемного вопроса, или коллективный поиск ответа на основной вопрос темы, или дается какое-то задание, которое выполняется в группах или индивидуально.

Критическое мышление: способствует взаимоуважению партнеров, пониманию и продуктивному взаимодействию между людьми; облегчает понимание различных «взглядов на мир»; позволяет учащимся использовать свои знания для наполнения смыслом ситуаций с высоким уровнем неопределенности, создавать базу для новых типов человеческой деятельности.

Предлагается фрагмент урока-лекции.

Урок. Геометрия 10 класс.

Тема: «Параллельность в пространстве».

Тип урока: изучение нового материала.

Форма урока: урок-лекция.

Цель урока: получить знания о параллельных и скрещивающихся прямых, параллельных плоскостях, о параллельности прямой и плоскости, научиться применять их на практике.

Задачи урока: Образовательные (формирование познавательных УУД):

- осуществлять поиск необходимой информации;
- проводить исследования взаимного положения прямых, прямой и плоскости, плоскостей делать выводы, формулировать и доказывать признак и свойства, применять их при решении задач;
- сформировать понятие параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в пространстве; параллельных плоскостей и прямой и плоскости;
- научить определять взаимное расположение двух прямых в пространстве;
- познакомить с признаками параллельных и скрещивающихся прямых, параллельных плоскостей, прямой и плоскости и их свойствами.

Развивающие (формирование регулятивных УУД):

- понимать учебную задачу урока, осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя, контролировать свои действия в процессе его выполнения, обнаруживать и исправлять ошибки, оценивать свои достижения;
- развивать пространственное, логическое и критическое мышление;
- развивать умение слушать и слышать друг друга;
- способствовать развитию пространственного воображения, способствовать развитию коммуникативных умений;
- развивать самостоятельное формирование познавательных целей;
- развивать регулятивные умения (самоанализ своей деятельности, рефлексия), самоконтроль

Воспитательные:

- прививать интерес к предмету математики;
- воспитывать культуру устной и письменной речи;
- показать связь математики с окружающим миром;
- воспитание чувства коллективизма;
- формирование у учащихся навыков самостоятельной работы;
- воспитание аккуратности, графической грамотности.

План лекции.

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
2. — Не скажите мне, пожалуйста, была бы у нас та геометрия, которой меня учили в школе, если бы материи не было вообще, и пересекались бы тогда параллельные?

— Параллельные не пересекались бы, — подтвердил профессор, — но ни одно материальное существо не могло бы проверить это.

Г. Гамов. Приключение мистера Томпкинса

3. Параллельность плоскостей.

4. Ветреный летний день.

   Прижавшееся к стене дерево и его тень.

   И тень интереснее мне.

   И. Бродский. Сидя в тени.

Первая стадия — вызов.

Ее присутствие на каждом уроке обязательно. Эта стадия позволяет:

- актуализировать и обобщить имеющиеся у ученика знания по данной теме или проблеме;
- вызвать устойчивый интерес к изучаемой теме, мотивировать ученика к учебной деятельности;
- побудить ученика к активной работе на уроке и дома.

Каким образом высказывание пункта 2 связано с нашей темой урока?

В чем заключается смысл отрывка из стихотворения И. Бродского и темы урока?

Как вы понимаете 2 и 3 пункты нашего плана урока?

О чем мы будем говорить в пункте 2, в пункте 3?

Какие знания нам необходимы из планиметрии при изучении данной темы?

Какие знания нам необходимы для изучения данной темы из предыдущих тем стереометрии?

На какие вопросы вы хотели получить еще ответы при изучении данной темы? (Можно вопросы задавать после каждого пункта лекции или в конце лекции).

На какие пункты нашей лекции вы можете ответить сами, не прибегая к помощи учителя? Вы сможете поделиться своими знаниями по данному вопросу?

Что необходимо включить в каждый пункт плана, чтобы изучение материала было полным по данному вопросу?

После рассмотрения этих вопросов возможно учителю придется изменить изложение материала, так как очень часто учащиеся объясняют некоторые вопросы сами (самостоятельно, для аудитории), появляются новые запросы, на которые учитель отвечает по ходу лекции или в конце лекции, если это объемный вопрос, то на следующем уроке.

После обсуждения всех вопросов подводится итог данного этапа, учащиеся еще раз проговаривают цели и задачи, которые они ставят перед собой при изучении данной темы.

Учащимся дается задание, что итогом урока является составление кластера по теме урока (работа в парах).

Вторая стадия — осмысление.

Здесь другие задачи. Эта стадия позволяет ученику:

- получить новую информацию;
- осмыслить ее;
- соотнести с уже имеющимися знаниями.

После рассмотрения каждого пункта лекции целесообразно проверить, как усваивается материал учащимися, есть ли дополнения по изученному материалу, замечания. Этого не надо бояться, а надо выслушать все дополнения, замечания по данному вопросу, обсудить вместе с учащимися.

И, если это имеет право на жизнь, сделать вывод и записать, если нет, то надо показать, где была допущена ошибка.

После рассмотрения каждого пункта плана задаю вопросы учащимся. Всегда даю время для самостоятельного решения данного вопроса, если есть варианты ответов, рассматриваем все, делаем выводы.

Примеры вопросов, задаваемых после изучения первого пункта плана:

1. Доказать, что две прямые скрещиваются, пользуясь определением скрещивающихся прямых.

   Этим вопросом я пытаюсь учащихся оградить от типичной ошибки, допускаемой в дальнейшем при решении задач.

2. Докажите, что все параллельные прямые, пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

По ответам можно определить уровень усвоения материала, сделать коррекцию.

Третья стадия — рефлексия.

Здесь основным является:

- целостное осмысление, обобщение полученной информации;
- присвоение нового знания, новой информации учеником;
- формирование у каждого из учащихся собственного отношения к изучаемому материалу.

Результатом этого этапа является кластер, составленный по теме урока (работа в парах).

Основным критерием оценки результата является критичность мышления, которая может быть раскрыта через следующие показатели:

- оценка (Где ошибка?);
- диагноз (В чем причина?);
- самоконтроль (Каковы недостатки?);
- критика (Согласны ли вы? Опровергните. Приведите контраргументы.);
- прогноз (Постройте прогноз).

При проведении повторительно-обобщающих уроков использую такой прием: «Найти и исправить ошибку».

Цель работы: развитие критического мышления, самоконтроля, внимания, умения обосновать свою точку зрения.

Все учащиеся класса делятся на несколько групп (иногда работают в парах), зависит от сложности задания, цели урока. Каждой группе (паре) выдаются одни и те же задания с математическими примерами и определениями, в которых допущены ошибки, с таким расчетом, чтобы число заданий было равно числу участников каждой из групп. При составлении заданий используется картотека типичных ошибок.

Та группа (пара), которая первой успела подготовиться, дает свою версию ошибки. Если её ответ был неверным, с точки зрения других групп (пар) или учителя, то другим группам (парам) дается возможность доказать свою точку зрения. За верный ответ группе (паре) присваивается балл (или несколько баллов, в зависимости от сложности задания). Побеждает та группа (пара), которая наберет больше баллов.

Приведем пример такого приема на уроке алгебры в 11 классе.

Урок 11 класс. Алгебра.

Тема: «Решение уравнений и неравенств».

Тип урока: повторительно-обобщающийся.

Форма урока: урок-практикум.

Цель урока: Найдите ошибки в предложенных заданиях, объясните причины ошибок, предложите свои решения.

1. Задание

   а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение: 13.

а) $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

$9 \cdot \left(9^2\right)^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:
$9t^2 - 28t + 3 = 0$
$D = (-28)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 784 - 108 = 676$

$t_1 = \dfrac{28-26}{2 \cdot 9} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}; \qquad t_2 = \dfrac{28+26}{2 \cdot 9} = \dfrac{54}{18} = 3$
Вернемся к замене:

$9^{\cos x} = \dfrac{1}{9}$ или $9^{\cos x} = 3$

$\cos x = -1$
$x = \pi + \pi d,\ d \in \mathbb{Z}$

$\left(3^2\right)^{\cos x} = 3^1$
$2\cos x = 1$
$\cos x = \dfrac{1}{2}$
$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$

1) $\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant 4\pi$

$\dfrac{5}{2} \leqslant \dfrac{1}{3} + 2n \leqslant 4,\ n \in \mathbb{Z}$

$2\dfrac{1}{6} \leqslant 2n \leqslant 3\dfrac{2}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

$1\dfrac{1}{12} \leqslant n \leqslant 1\dfrac{5}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

n —нет чисел

2) $\dfrac{5\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 4\pi$

$\dfrac{5}{2} \leqslant -\dfrac{1}{3} + 2k \leqslant 4,\ k \in \mathbb{Z}$

$2\dfrac{5}{6} \leqslant 2k \leqslant 4\dfrac{1}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

$$1\frac{5}{12} \leqslant k \leqslant 2\frac{1}{6},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 2$$
$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

3) $$\frac{5\pi}{2} \leqslant \pi + \pi d \leqslant 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leqslant 1 + d \leqslant 4,\ d \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{2} \leqslant d \leqslant 3,\ d \in \mathbb{Z}$$

$$d = 2,\ 3$$
$$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$$
$$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$$

Ответ:

а) $x = \pi + \pi d,\ d \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

б) $x_1 = \dfrac{11\pi}{3}; \quad x_2 = 3\pi; \quad x_3 = 5\pi.$

Критерии оценки:

Нашли ошибку — 1б;

Объяснили причину ошибки — 3б;

Предложили свое решение — 3б.

2. Задание

   а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ 0\right].$

Решение: 13.

а) ОДЗ: $\begin{array}{l} 4\sin x > 0 \\ \sin x > 0 \end{array}$

Для таких x решим методом интервалов.

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$; $\qquad t \geqslant 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$D = 25 - 16$

$D = 9$

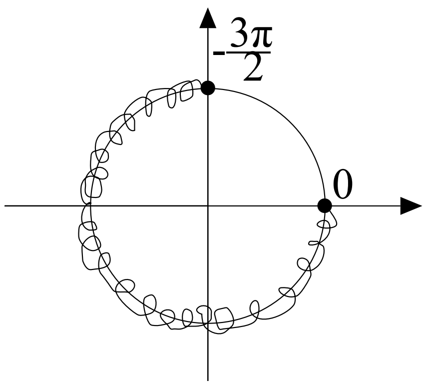
$t_1 = \dfrac{5+3}{2} \qquad t_1 = 4$

$t_2 = \dfrac{5-3}{2} \qquad t_2 = 1$

Обратная замена

$$\begin{array}{lcl} \log_4(4\sin x) = 1 & \text{или} & \log_4(4\sin x) = 4 \\ 4\sin x = 4 & & 4\sin x = 256 \\ \sin x = 1 & & \sin x = 64 \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} & & \text{нет решений} \end{array}$$

б) Произведем отбор по единичной окружности



$-\dfrac{3\pi}{2}$

Ответ:

а) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $-\dfrac{3\pi}{2}$.

Критерии оценки:

Нашли ошибку — 1б;

Объяснили причину ошибки — 2б;

Предложили свое решение — 3б.

3. Задание

Решите неравенство: $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geqslant\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение: 15. $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geqslant\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$

ОДЗ: $x>0, \qquad x\in(0;+\infty)$

$$\frac{\log_4(64)+\log_4(x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64)+\log_4(x)}-\frac{4\log_4 x+16}{\log_4^2 x-9}\geqslant 0$$

$$\frac{3+\log_4(x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{3+\log_4(x)}-\frac{4\log_4 x+16}{\log_4^2 x-9}\geqslant 0$$

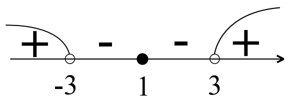
Пусть $\log_4 x=t$, тогда

$$\frac{3+t}{t-3}+\frac{t-3}{3+t}-\frac{4t-16}{t^2-9}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2+3t+3t+9+t^2-3t-3t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geqslant 0$$



$$\log_4 x<-3 \qquad \log_4 x=1 \qquad \log_4 x>3$$

$$x<\frac{1}{64} \qquad x=4 \qquad x>64$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{64}\right)\bigcup\{4\}\bigcup(64;+\infty)$.

Критерии оценки:

Нашли ошибку — 2б;

Объяснили причину ошибки — 3б;

Предложили свое решение — 4б.

4. Задание

Решите неравенство: $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\leqslant 3^x+5$.

Решение:

$$\begin{array}{ll} 3^x-9>0 & 3^x-5>0 \\ 3^x=9 & 3^x=5 \\ x>2 & x>\log_3 5 \end{array}$$

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\leqslant 3^x+5$$

$$\frac{3^{2x}-2\cdot 3^x\cdot 3+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^x\cdot 3-51}{3^x-9}\leqslant 3^x+5$$

Пусть $3^x=t$

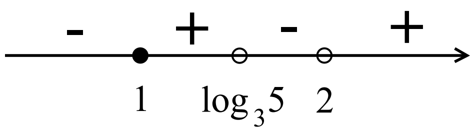
$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}+\frac{6t-51}{t-9}\leqslant t+5$$

$$\frac{\left(t^2-6t+4\right)\cdot(t-9)+(6t-51)(t-5)}{(t-5)(t-9)}\leqslant (t+5)(t-5)(t-9)$$

$$t^3-6t^2+4t-9t^2+54t-36+6t^2-30t-51t+255\leqslant t^3-25t-9t^2+225$$

$$\cancel{t^3}-\cancel{6t^2}+4t-\cancel{9t^2}+54t-36+\cancel{6t^2}-30t-51t+255-\cancel{t^3}+25t+\cancel{9t^2}-225\leqslant 0$$

$$\begin{array}{ll} 2t-6=0 & 3^x=3 \\ 2t=6 & x=1 \\ t=3 & x\leqslant 1 \end{array}$$



Ответ: $(-\infty;1]\bigcup(\log_3 5;2)$.

Критерии оценки:

Нашли ошибку — 2б;

Объяснили причину ошибки — 3б;

Предложили свое решение — 4б.

5. Задание

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение: 18. $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$.

Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$|3x| - 2x - 2 - a = 0$

Возведем уравнение в квадрат.

$(|3x|)^2 = (2x + 2 + a)^2$

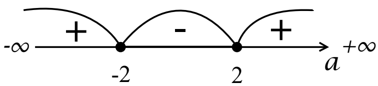
$5x^2 + x(-8 - 4a) - 4a - 4 = 0$

$D = (-8 - 4a)^2 - 4 \cdot 5(-(a^2 + 4a + 4)) = a^2 + 4a + 4$

Чтобы уравнение имело 2 решения D должен быть > 0

$a^2 + 4a + 4 > 0$

$(a - 2)^2 > 0$



$\Rightarrow a \in (-\infty; -2); (2; +\infty)$.

Теперь разберемся с ОДЗ.

$x^2 - 2x - a \neq 0 \Rightarrow$ Нам не подходят варианты, когда $x^2 - 2x - a = 0$ (если $x^2 - 2x - a = 0$ уравнение имеет менее одного корня)

$D = 4 + 4a$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}$$

Если $a \in (-\infty; -2)$, то $x^2 - 2x - a \neq 0$

Если $a \in (2; +\infty)$, то $x^2 - 2x - a = 0 \Rightarrow a \in (2; +\infty)$ не подходит.

Ответ: $a \in (-\infty; -2)$.

Критерии оценки:

Нашли ошибку — 3б;

Объяснили причину ошибки — 3б;

Предложили свое решение — 4б.

Задания на урок были взяты из «Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года».

Изменения, происходящие в мире, вызвали необходимость разработки новых подходов в системе обучения и воспитания, внедрения государственных стандартов второго поколения. Перед учителем поставлены новые цели: формирование универсальных учебных действий и мотивации к обучению. Содержание образования не сильно меняется, существенно изменяется роль учителя, которому необходимо будет выстраивать процесс обучения не только как систему усвоения знаний, умений и навыков, но и как процесс развития личности. Учитель должен не только понимать, чему и как учить, но и организовывать процесс таким образом, чтобы дети задавались вопросами «Чему мне нужно научиться?», «Как мне этому научиться?». Обучение должно быть построено как процесс «открытия» каждым школьником конкретного знания. Из пассивного слушателя ученик должен превратиться в самостоятельную, критически мыслящую личность. Сегодня важно обеспечить общекультурное, личностное и познавательное развитие ребенка. Содержание образования обогащается новыми процессуальными умениями, развитием способностей, оперированием информацией, творческим решением проблем науки и рыночной практики с акцентом на индивидуализацию образовательных программ.

Главная задача каждого преподавателя — не только дать учащимся определённую сумму знаний, но и развить у них интерес к учению, научить учиться. Без хорошо продуманных методов обучения трудно организовать усвоение программного материала. Учителю необходимо не только доступно все рассказать и показать, но и научить ученика мыслить, привить ему навыки практических действий. По моему мнению этому могут способствовать активные формы и методы обучения.

При работе с детьми с высокой мотивацией изучения математики необходимо менять подходы работы с детьми. Больше уделять внимания самостоятельной работе детей на уроке. Чтобы они умели применять свои знания при решении задач более высокого уровня, применять теоретические знания не только в конкретной ситуации, а при решении задач разного направления.

Поэтому учителю в своей работе с такими детьми следует придерживаться таких принципов деятельности:

- принцип максимального разнообразия предоставленных возможностей для развития личности;

- принцип возрастания роли внеурочной деятельности;
- принцип индивидуализации и дифференциации обучения;
- принцип создания условий для совместной работы учащихся при минимальном участии учителя.

Вследствие этого возникает необходимость постоянно совершенствовать структуру учебного процесса, использовать интерактивные формы и методы обучения, вносить элементы новизны в способы и ход выполнения учебных задач. Не получая всех знаний в готовом виде, учащиеся должны на основе принципиальных установок учителя приобретать значительную их часть самостоятельно в ходе поиска, решения проблемных ситуаций и другими средствами, активизируя познавательную деятельность обучающих.

При развитии самостоятельности у учащихся необходимо придерживаться следующих правил:

- в любом задании *узнавать* изученное ранее;
- обучение *деятельности*;
- «включение» *ребят в разнообразную познавательную деятельность.*

Задача учителя — организация работы в классе таким образом, чтобы ученики не только много трудились самостоятельно, но и делали это с достаточной долей удовольствия. Только работая самостоятельно, можно чему-либо научиться.

Самостоятельность в учениках надо развивать постоянно, постепенно, соблюдая определенные принципы.

При реализации данных задач я использую активные методы обучения.

Активные методы обучения — это методы, которые побуждают учащихся к активной мыслительной и практической деятельности в процессе овладения учебным материалом. **Активное обучение** предполагает использование такой системы методов, которая направлена главным образом не на изложение преподавателем готовых знаний, их запоминание и воспроизведение, а на самостоятельное овладение учащимися знаниями и умениями в процессе активной мыслительной и практической деятельности.

Особенности активных методов обучения состоят в том, что в их основе заложено побуждение к практической и мыслительной деятельности, без которой нет движения вперед в овладении знаниями.

Примеры активных методов обучения учащихся, которые применяю на своих уроках.

Постановка и решение проблемных вопросов, создание проблемных ситуаций.

Типы проблемных ситуаций, используемых на уроках:

- ситуация неожиданности;
- ситуация конфликта;
- ситуация несоответствия;
- ситуация неопределенности;
- ситуация предположения;
- ситуация выбора.

Фрагмент урока

Урок. Алгебра и начала анализа. 10 класс

Тема: «Применение производной к исследованию функции».

Девиз нашего урока:

Неужели не хочется вам,
Натыкаясь на скалы и мели,
Тем не менее, плыть по волнам?

В бурном море людей и событий,
Не щадя живота своего,
Совершите вы массу открытий,
Иногда не желая того!
Из х/ф "Двенадцать стульев"

Тип урока: изучение нового материала.

Вид урока: урок-исследование.

Форма организации деятельности: групповая.

Групповая работа способствует более прочному и глубокому усвоению знаний, развитию индивидуальных способностей, развитию самостоятельного творческого мышления. Также при совместной работе учащиеся приучаются сотрудничать друг с другом при выполнении общего дела, формируются положительные нравственные качества. Учащийся при этом чувствует себя раскованно, развивается ответственность, формируется адекватная оценка своих возможностей, каждый имеет возможность проверить, оценить, подсказать, исправить, что создает комфортную обстановку на уроке.

Цели урока: сформировать умения исследовать функции на монотонность и экстремумы, необходимые для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин.

Задачи урока:

1. Дать представление о связи свойств функции с её производной, учить чтению и анализу графиков функций.

2. Развивать умение анализировать, сопоставлять, сравнивать, формулировать выводы по результатам собственной деятельности.

3. Развивать навыки использования компьютера и мультимедийных учебных программ для организации собственной познавательной и исследовательской деятельности.

4. Развивать такие качества личности как ясность и точность мысли, логическое мышление, алгоритмическая культура, интуиция, критичность.

5. Развивать навыки работы в группе.
6. Развивать умение работать в проблемной ситуации.
7. Воспитывать средствами математики культуру личности: умения выслушать и принимать во внимание взгляды других людей, умение справляться с неопределённостью и сложностью.

Сегодня на протяжении всей работы на уроке мы будем следовать девизу нашего урока. Как вы понимаете девиз урока?

Класс разбит на 4 группы. Вниманию учащихся предложены четыре задания.

1. Задание.

   В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

   Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

2. Задание.

   Решите уравнение: $x^3 + x - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$.

3. Задание.

   Найти все значения α, при которых уравнение $\sin \mathrm{x} = (4\alpha - 2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{1-4\alpha}{27\alpha^4}$ являются целыми.

4. Задание.

> Найдите все значения ρ, при которых уравнение
> $8\sin^3 x = \rho - 7\cos 2x$ не имеет корней.

Ставится задача: Каждой группе выбрать одно задание из предложенных и решить его. Обычно представитель от группы вытягивает номер задачи. Дается время для обсуждения решений. После анализа условий задач представители от групп сообщают, что с ходу решить задачи не удается, не хватает каких-то определенных знаний для решения задач. Но все согласны в одном, что при решении данных заданий используются свойства функций, которые они пока не знают в полном объеме, чтобы решить задания.

Какие свойства функций вам надо знать? Перечисляют свойства функций.

Свойства знаем. Проблема — как применить эти свойства, что для этого надо знать, уметь.

На основе данных рассуждений учащиеся ставят перед собой цель урока, при реализации которой смогут ответить на поставленные вопросы и решить задачи.

Попробуем установить или предсказать связь между характером монотонности функции, точками экстремума и знаками её производной.

Приступаем ко второму этапу урока: реализации цели урока.

Учащиеся работают в группах. Каждой группе предложены задания исследовательского характера. При выполнении своей работы группы составят так называемые «математические портреты» функции и её производной, то есть «откроют» зависимость между свойствами монотонности функции, экстремумами и знаками производной.

Для каждой группы предложен план проведения практической работы и каждая группа по окончанию должна сделать выводы по своему вопросу и всем объяснить материал так, чтобы все его поняли. Представитель каждой группы представляет результат своей работы. Подводим итоги работы каждой группы. После этого каждая группа предлагает задания (1–2) по своему вопросу другим группам. Члены группы оказывают помощь, консультируют, отвечают на вопросы, которые возникают при выполнении данных заданий, проверяют выполнение заданий. И только после этого делаем вывод о усвоении материала по данному вопросу. Будет рассмотрено четыре типа заданий.

Приведем примеры заданий для двух групп.

Задание первой группе. Рассмотрите функцию f и такую точку x_0 интервала $(a;b)$, что $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 1а). На рис. 1б изображён график функции g такой, что $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.

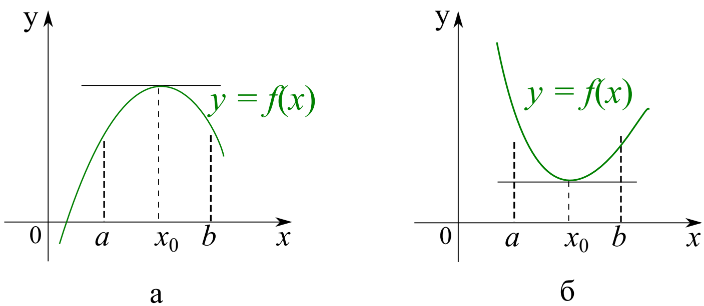


Рис. 1

Сделать вывод на основании рассмотренных графиков. Проиллюстрировать вывод с помощью механической интерпретации. Полученный вывод подтверждает теорема Ферма (подводит итог учитель и формулирует теорему Ферма).

На рисунке 2 изображен график функции f, дифференцируемой на промежутке $[a;b]$, которая в точках a и b принимает одинаковые зна-

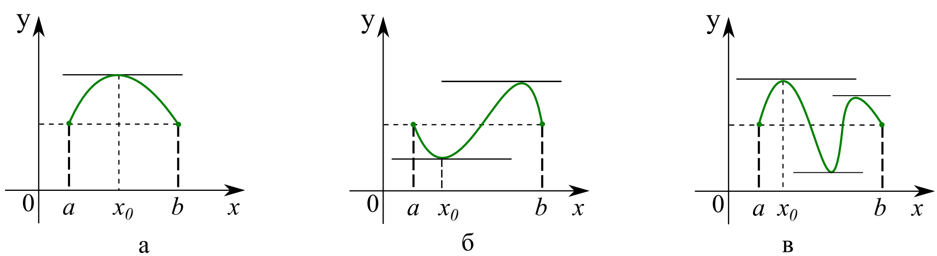


Рис. 2

чения.

Сделать вывод на основании рассмотренных графиков. Проиллюстрировать вывод с помощью механической интерпретации. Полученный вывод подтверждает теорема Ролля (подводит итог учитель и формулирует теорему Ролля).

На рисунке 3 изображен график функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$.

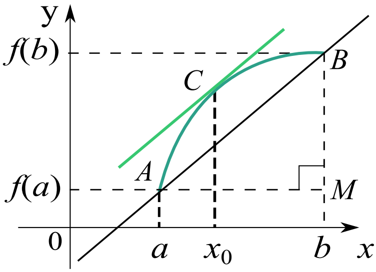


Рис. 3

Сделать вывод на основании рассмотренного графика. Проиллюстрировать вывод с помощью механической интерпретации. Полученный вывод подтверждает теорема Лагранжа (подводит итог учитель и формулирует теорему Лагранжа).

Задание группе 2.

Установите зависимость между свойствами монотонности функции и знаками производной (укажите промежутки монотонности (возраста-

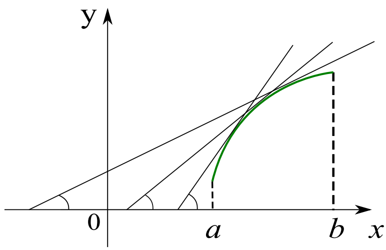


Рис. 4

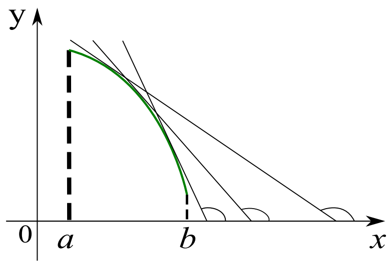


Рис. 5

ние, убывание)).

На рис. 4 и рис. 5 изображены графики некоторой функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$.

Сделать вывод на основании рассмотренного графика. Проиллюстрировать вывод с помощью механической интерпретации. Полученный вывод подтверждает теоремы (подводит итог учитель: связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы и формулирует признак возрастания функции, признак убывания функции).

Задания групп выполнены, подведены итоги работы класса на этом этапе.

Можно вернуться к вопросу, который был задан в начале урока: «Выполните предложенные задания». Идут обсуждения в группах. Каждая группа сообщает о готовности выполнять задание. Если группа говорит, что не может выполнить свое задание, разрешается попросить помощь у других групп, учителя, обменяться заданиями с другой группой (если есть такие варианты).

Идет работа в группах, задания решены. Представитель группы предлагает свое решение (с помощью веб-камеры выводит свое решение на экран). При объяснении решения обязательно обратить внимание на применение знаний, которые они получили на уроке при изучении нового материала.

Вывод: Полученные новые знания на уроке позволили решить задания более высокого уровня, разной направленности.

Учащиеся не опровергли тот факт, что данные задания можно было решить другими способами. Но применение теоретического материала данного урока позволило решить задания более рационально, наглядно представить решения.

Исследовательская работа активизирует обучение, придает ему творческий характер и, таким образом, передает учащимся инициативу в организации своей познавательной деятельности, развития творческих способностей.

Перевернутый класс — это инновационный метод обучения. Его отличие от традиционного заключается в том, что теоретический материал изучается учащимися самостоятельно до начала урока с помощью ИКТ (видео-лекций, интерактивных материалов, презентаций), а высвобожденное время на уроке направлено на решение проблем, сотрудничество, взаимодействие, применение знаний и умений в новой ситуации и на создание учениками нового учебного продукта.

Основная цель применения технологии «Перевернутый класс» заключается в такой организации учебной работы, при которой происходит:

1. Формирование универсальных учебных действий.
2. Развитие личностных качеств и общей культуры учащегося.
3. Понимание ценности образования, внутренней мотивации и ответственности за свое обучение.
4. Обеспечивается возможность для поддержки развития каждого учащегося, развития важных качеств и умений 21 века таких, как:
    - активность, инициативность и самостоятельность;
    - грамотность в области ИКТ;
    - творческий подход и новаторство;
    - критическое мышление и способность решать проблемы;
    - коммуникабельность и сотрудничество;
    - информационная грамотность;
    - гибкость и способность к адаптации;
    - продуктивность и вовлеченность;
    - лидерство и ответственность.

Перевёрнутое обучение (перевёрнутый класс или «переворот») — это современная технология осуществления процесса обучения, при котором учащиеся с помощью цифровых средств и Интернет-ресурсов прослушивают и просматривают видео-уроки, изучают дополнительные источники информации во внеурочное время, затем совместно обсуждают новые понятия и различные идеи, а учитель помогает применять полученные знания на практике.

Такая организация обучения побуждает учащихся учиться друг у друга. Использование технологии направлено на их вовлечение в **активную учебную деятельность**.

Преимущества для учащихся: осуществляется социализация и понимание учениками важности командной работы; возможность обучения во внеурочное время; более высокая ответственность за свое обучение; учащиеся получают доступные и качественные электронные образовательные ресурсы для изучения нового материала; повышается интерес к учебным предметам, к групповой работе на уроке; учащиеся помогают друг другу в учебе; учатся критически оценивать учебные достижения; создаются условия для развития ИКТ-компетентности.

Геометрия 10 класс.

Тема урока. Расстояние в пространстве.

Тип технологии. Перевёрнутый класс.

План подготовки и проведения урока

1. Определение целей и задач темы урока, предметных и метапредметных результатов.
    - Отработать применение теоретических знаний, связанных с нахождением расстояния между скрещивающимися прямыми.
    - Через решение задач на нахождение расстояний в пространстве разными способами сделать вывод о преимуществе одного из методов для решения ряда задач этого блока.
    - Отработать применение теоретических знаний, связанных с нахождением расстояния между скрещивающимися прямыми.
    - Формировать умения анализировать, выдвигать гипотезы и предположения, строить доказательства, переносить знания в новые ситуации при решении исследовательских задач.

- Тренировать пространственное воображение.
- Создать условия для развития уверенности в себе, самостоятельности мышления.
- Готовность работать над чем-либо спорным и вызывающим беспокойство, способность принимать решения, способность слушать других людей и принимать во внимание то, что они говорят, воспитывать стремление к приобретению новых знаний, интерес к предмету.

2. Создание или подбор Интернет-ресурсов по теме для самостоятельного изучения учащимися дома. (К этому уроку учащимся делается ссылка на учебное видео. Обучающиеся смотрят данную лекцию дома).

3. Дается инструкция, в соответствии с которой учащиеся должны самостоятельно изучить тему.

- Просмотри объяснение новой темы по ссылке.
- Запиши в тетрадь определение расстояния от точки до прямой. Сделай рисунок.
- Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости.
- Запишите определение расстояния от прямой до параллельной ей плоскости. Сделайте рисунок.
- Запишите определение между скрещивающимися прямыми. Сделайте рисунок.
- Дан куб $\mathrm{ABC}D\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1D_1$ найти расстояние между прямыми AA_1 и C_1D_1.
- Докажите, что для любых двух скрещивающихся прямых существует отрезок, перпендикулярный этим прямым, концы которого лежат на этих прямых.
- Записать определение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. Сделать рисунок.
- Дан куб $\mathrm{ABC}D\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1D_1$ найти расстояние между прямыми $\mathrm{B}D$ и CC_1.

- Ребро куба $\mathrm{ABC}D\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$ и $\mathrm{B}_1\mathrm{C}$.

- Запишите вопросы, которые возникли у вас после изучения данной темы и решения задач.

Таким образом ученик изучил самостоятельно тему и, если возникли вопросы, их можно задать на уроке учителю.

4. Проведение урока.

Урок начинается с мотивации к деятельности. Учитель активизирует уже имеющиеся знания по самостоятельно изученной теме. Учащиеся отвечают на вопросы. Постановка учащимися цели урока как собственной учебной задачи. На данном этапе урока используется устное диагностическое оценивание. Обязательно нужно поинтересоваться какие затруднения испытали учащиеся при подготовке домашнего задания.

Погружение в тему урока.

Для этого класс делится на 4 группы.

Задание группам.

Представить способ или способы нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (о данных способах говорилось в лекции). На работу дается 7 минут. Необходимо сформулировать способ, сделать рисунок, рассказать методику нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

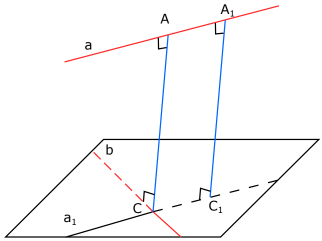
Группы представляют результаты работы на доску. Идет обсуждение. Подводим итоги.

Делаем выводы.

Записываем все способы в тетрадь.

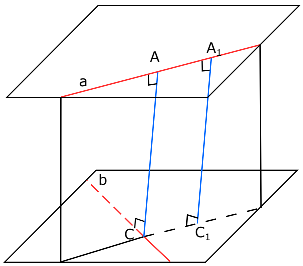
Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой.



Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

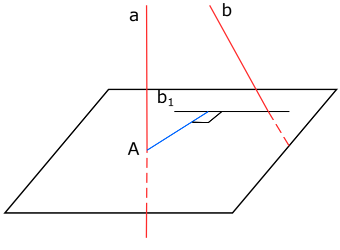
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.



Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

Метод ортогонального проектирования:

1. Построим плоскость, перпендикулярно прямой a.
2. Прямую b спроектируем на эту плоскость.
3. $\rho(a;b)=\rho(A;b_1)$.



Был предложен четвертый способ.

Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пусть прямые a и b скрещиваются. Требуется найти расстояние $\rho(a, b)$ между этими прямыми.

Способ 1 (векторный). Пусть $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ — направляющие векторы прямых a и b. Пусть MN — общий перпендикуляр этих скрещивающихся прямых, причем $\cdot M \in a$, $\cdot N \in b$. Выберем точки $\cdot A \in a$, $\cdot B \in b$. Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{p} + \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{q},$$

где λ и μ — коэффициенты, которые определяются из условий $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ и $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Тогда $\rho(a, b) = |\overrightarrow{MN}|$.

Способ 2 (координатный). Пусть α и β — параллельные плоскости, проходящие через прямые a и b. Тогда эти плоскости будут иметь уравнения

$$\alpha : \; Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$

$$\beta : \; Ax + By + Cz + D_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\rho(a, b) = (\alpha, \beta) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Работа в парах.

Решить задачи, используя предложенные способы. Необходимо научиться применять все три метода. Полезно решать одну и ту же задачу различными способами. Первым этапом при решении задач правильно сделать рисунок. Культура построения рисунка к задаче.

Задача 1.

Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями AB_1 и $\mathrm{B}C_1$ смежных граней $\mathrm{AA}_1\mathrm{B}_1\mathrm{B}$ и $\mathrm{BB}_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$ куба $\mathrm{ABC}D\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1D_1$, если ребро куба равно 12.

Задача 2.

В правильном тетраэдре PABC с ребром равным 4, точки M и K — середины ребер соответственно PB и CP, точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние между прямыми: а) MK и OP; б) AP и BC; в) AB и MK.

Решаем задачи. Проверяем. Делаем выводы.

Подводим итог урока.

Домашняя работа задается по группам, задания разного уровня сложности. Выполнение первого этапа решения задачи обязательно.

Реализация **личностно-ориентированного и индивидуально-дифференцированного** подхода к учащимся, **организация групповой деятельности школьников** (работа в парах, в группах постоянного состава, в группах сменного состава) и **самостоятельной работы детей**.

В своей практике использую групповую работу и работу в паре. В условиях групповой работы осуществляется позитивная зависимость группы учащихся друг от друга, т. к. члены группы рассматривают успех (неуспех) как результат их коллективной деятельности. При этом снижается уровень тревожности, усредняется положительное (отрицательное) влияние индивидуальных способностей и возможностей на результат деятельности, таким образом происходит сдвиг в оценке своей деятельности со способностей на усилия, формируется чувство самоуважения. Групповая форма работы позволяет активизировать познавательную деятельность учащихся, продуктивное, творческое усвоение знаний и умений, создавая положительный эмоциональный фон через активный диалог, анализ проблемных ситуаций, деловые игры, мозговой штурм. При такой форме работы ученик учится сопоставлять, сравнивать, наконец, оспаривать другие точки зрения, доказывать свою правоту. Умение сопоставлять различные способы позволит ученику не только анализировать, но и прогнозировать свою деятельность, что в свою очередь влияет на формирование самостоятельности, овладения способами самообразования. Развитие умений планировать, ставить задачи находится в прямой зависимости от мотивации.

Работа в паре «ученик–ученик» особенно важна в сфере самоконтроля и самооценки. При реализации данного подхода провожу различные самостоятельные работы, уроки-практикумы.

Самостоятельной работе на уроке я отвожу большую роль. В ходе её выполнения наблюдаю за учащимися, фиксирую быстроту выполнения задания, выявляю те элементы задания, которые оказались наиболее трудными для учащихся, чтобы своевременно ответить на вопросы учеников. Сразу же после выполнения задания организуем проверку результатов и обсуждение различных способов решения.

Самостоятельные работы по степени самостоятельности учащихся я подразделяю на виды:

- самостоятельные работы по образцу;
- самостоятельные работы с указанием по их выполнению;
- самостоятельные работы повышенной сложности.

Это могут быть также: самостоятельное воспроизведение известных учащимся выводов формул, доказательства теорем, составления таблиц и т. п., составление задач и упражнений самими учащимися, организация работы над ошибками.

Задания для самостоятельной работы должны быть подобраны таким образом, чтобы ученик мог с ними справиться. Если речь идет о новом материале, задание должно быть в «зоне ближайшего развития» ребенка, чтобы он мог самостоятельно или с небольшой помощью решить поставленную проблему.

Основная цель уроков-практикумов состоит в том, чтобы выработать у учащихся умения и навыки в решении задач определенного типа или вида, в овладении новыми математическими методами. Первый этап подготовки к таким урокам состоит в математическом и дидактическом анализе теоретического и практического материала темы. При анализе практического материала, необходимо выполнить следующие шаги:

- Установить соответствие практического материала изученной теории;
- Выявить функции каждой задачи (дидактическая, познавательная, развивающая, практическая);
- Выявить новые для учащихся типы задач, примеры и методы их решения;
- Отобрать ключевые задачи на применение изученной темы;
- Выделить задачи, допускающие несколько способов решения;
- Составить работу, учитывающую уровень развития каждого ученика.

На уроках практикумах я стараюсь развивать самостоятельность учащихся при решении задач.

К каждому уроку-практикуму обязательно должна быть инструкция по выполнению работы и критерии оценки.

Пример инструкции.

Алгебра 9 класс.

Инструкция по выполнению практикума по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Выполнить входной тест дома, ответы занести в сетку ответов.

Выполнение входного теста есть допуск к выполнению практикума.

Практикум состоит из заданий трех уровней.

1 уровень — базовый. Выполнение этого уровня обеспечивает получение удовлетворительной оценки.

2 уровень — повышенный — содержит задания повышенной сложности.

3 уровень содержит задания высокого уровня сложности.

Критерии оценки выполнения практикума.

Каждое задание базового уровня оценивается одним баллом.

Каждое задание первого уровня оценивается в два балла.

Каждое задание второго уровня оценивается в три балла.

Оценка «3»

- Выполнен входной контроль.
- Выполнено 3 задания базового уровня.
- Выполнено одно задание первого уровня по теме «Арифметическая прогрессия».
- Выполнено одно задание первого уровня по теме «Геометрическая прогрессия».

Оценка «4»

- Выполнен входной контроль.
- Выполнено 3 задания базового уровня.
- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Арифметическая прогрессия».
- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Геометрическая прогрессия».
- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».
- Выполнено 1 задание второго уровня по теме «Арифметическая прогрессия».
- Выполнено 1 задание второго уровня по теме «Геометрическая прогрессия».

Оценка «5»

- Выполнен входной контроль.

- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Арифметическая прогрессия».
- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Геометрическая прогрессия».
- Выполнено 2 задания первого уровня по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».
- Выполнено 2 задание второго уровня по теме «Арифметическая прогрессия».
- Выполнено 2 задание второго уровня по теме «Геометрическая прогрессия».
- Выполнено 2 задания второго уровня по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Формы проведения уроков-практикумов различны.

Очень часто использую следующую форму проведения урока практикума.

1. Предлагается два пакета заданий: 1 пакет — задания базового уровня, 2 пакет — задания повышенного и высокого уровня. (См. Приложение 1. Пакет заданий второго уровня к уроку-практикуму «Тригонометрические формулы. Алгебра 10 класс»).
2. Учащимся предлагается самостоятельно выбрать пакет заданий определенного уровня. (Задания в пакете учащиеся не видят, каждое задание находится на отдельной карточке, задание берется в произвольном порядке).
3. Учащийся решает задание, сдает учителю, если задание решено не верно, учитель возвращает его ученику. Ученик решает задание.

Условия выполнения практикума.

1. Учащийся выбрал задания второго пакета. Решает, сдает. Задания решены верны. В данном случае он может в любой момент перейти на 1 уровень и продолжить решать задания первого уровня. При условии, что задания выполнены верно, имеет возможность опять перейти на второй уровень.

2. Учащийся выбрал задания второго уровня, три задания решил не верно, не может найти и исправить свои ошибки самостоятельно, он переходит на первый уровень и продолжает работать только на первом уровне.

3. Учащийся выбрал задания первого пакета. Решает, сдает. Решил верно пять заданий базового уровня (обеспечил себе удовлетворительную оценку) имеет право перейти к решению заданий второго уровня, попробовать свои способности на этом уровне. Решил три задания этого уровня — все решены неверно. Возвращается на первый уровень и продолжает работать только на этом уровне. Возможен другой вариант: решил три задания второго уровня, все решено верно. Обеспечил себе оценку «4» по желанию может работать на этом уровне или вернуться на первый.

Это один из вариантов проведения урока-практикума. Форма проведения зависит от цели урока.

К групповой работе можно отнести урок-проект.

Метод проектов предусматривает наличие проблемы требующей поиска, исследований. А также предусматривает развитие познавательных навыков учащихся, умения самостоятельно конструировать свои знания, анализировать полученную информацию и выдвигать гипотезы. Использование этого метода делает учебный процесс творческим, сжатым, а ученика — раскованным и целеустремленным. Обязанность учителя — подготовить всех учащихся к посильной для каждого, но обязательно активной познавательной деятельности. Метод проектов можно применять как на одном уроке, так и на серии уроков.

Проект, который выполняют ученики, должен вызвать в них энтузиазм, увлекать их, идти от души. Любое действие, выполненное индивидуально или в группах, дети должны спланировать, самостоятельно выполнить, проанализировать и оценить.

В результате **у учащихся вырабатываются умения**:

- сформулировать проблему;
- поставить цель и спланировать деятельность;
- самоанализа;
- презентации своей деятельности и результатов;
- поиска нужной информации;
- практического применения знаний умений и навыков;
- проведения исследования (анализа, синтеза, выдвижения гипотезы, детализации и обобщения).

Учебный проект провожу как итоговый урок, как урок подведения итогов изучения большой, значимой темы.

Фрагмент урока-проекта.

Геометрия. 8 класс. **Учебный проект «Пифагор и его великая жизнь».**

<table>
<tr><th>№ группы</th><th>Ф. И.</th><th>Тема</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>Александра</td><td rowspan="4">«Биография Пифагора».
«Пифагор философ».
«Пифагор как педагог».</td></tr>
<tr><td>Анна</td></tr>
<tr><td>Илья</td></tr>
<tr><td>Демид</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td>Анна</td><td rowspan="5">Практическое применение
теоремы Пифагора
(показать разные
области применения).</td></tr>
<tr><td>Александр</td></tr>
<tr><td>Даниил</td></tr>
<tr><td>К. Максим</td></tr>
<tr><td>Юлия</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>Алиса</td><td rowspan="5">Старинные задачи
на применение теоремы Пифагора.</td></tr>
<tr><td>Виктория</td></tr>
<tr><td>Мария</td></tr>
<tr><td>Георгий</td></tr>
<tr><td>Дмитрий</td></tr>
</table>

4	Азарий Арсений Денис Сергей Илья Артем	Решение задач повышенной сложности.
5	Группа-информаты Николай Иван Владимир Арсений Антон	Составить программы на доказательство теоремы Пифагора (разные способы), решения задач на применение теоремы Пифагора.

Критерии выполнения и оформления проекта По теме «Пифагор и его великая жизнь».

	Макс. кол-во баллов	Оценка группы	Оценка учителя	Примечания
ОФОРМЛЕНИЕ И ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОЕКТА				
1. Актуальность выбранной темы и предлагаемых решений	5			
2. Практическая направленность	5			
3. Объем и полнота разработок	5			
4. Уровень творчества оригинальность раскрытия темы	5			
5. Качество презентации, оформление, соответствие стандартным требованиям,	5			

качество эскизов, схем и рисунков				
ЗАЩИТА ПРОЕКТА				
1. Качество доклада: композиция и полнота представления работы, результатов, убедительность и убежденность	5			
2. Объем и глубина знаний по теме, эрудиция, межпредметные связи	5			
3. Педагогическая ориентация: культура речи, манера, чувство времени, удержание внимания аудитории	5			
4. Ответы на вопросы: полнота, аргументированность, дружелюбность	5			
5. Дебаты: ответственное решение, готовность к дискуссии, доброжелательность, контактность	5			

Максимальное кол-во баллов — 50 баллов.

Оценка «5» — 45–50 баллов.

Оценка «4» — 37–45 баллов.

Оценка «3» — 25–37 баллов.

Оценка «2» — менее 25 баллов.

Дебаты.

1. Отклоняйся от дорог исхоженных, используй нехоженые пути.
2. Будь хозяином своему языку прежде всех других вещей, следуя при этом богам.
3. Дует ветер, поклоняйся шуму.
4. Помогай человеку в поднятии тяжести, но не помогай в сложении её.
5. Не говори о делах пифагорейского учения без света.
6. Выйдя из своего дома, не возвращайся, иначе в нем будут обитать фурии.
7. Корми петуха, но не приноси его в жертву, поскольку посвящен он солнцу и луне.
8. Не позволяй ласточкам селиться в своем доме.
9. Не протягивай охотно свою правую руку никому.
10. Поднявшись с постели, сглаь отпечатки тела.
11. Не садись на хлебную меру.
12. Будь с тем, кто ношу взваливает, не будь с тем, кто ношу сваливает.

Группа 1 берет афоризмы 1 и 4.
Группа 2 берет афоризмы 2 и 8.
Группа 3 берет афоризмы 3 и 9.
Группа 4 берет афоризмы 5 и 10.
Группа 5 берет афоризмы 6 и 12.

Дебаты

Группа 1 ________ Группа 3
Группа 2 ________ Группа 4
Группа 5 ________ Группа 3

Защита проекта. Группа информатов.

Создание программы по теме «Теорема Пифагора»

Антон, Николай, Иван, Владимир, Арсений

Цели и задачи

Цель:
Создать программу для решения геометрических задач по теореме Пифагора.

Задачи:

1. Научиться решать задачи по теореме Пифагора.
2. Составить алгоритм программы.
3. Реализовать алгоритм на языке программирования.
4. Протестировать программу на ошибки и устранить их.

Способы реализации алгоритма

Для создания программы мы использовали язык программирования C++, т. к. мы изучаем этот язык на уроках информатики.

Мы создали программу, которая позволит проверить правильность решения задач учеником.

Программа позволит найти:

1. Гипотенузу с помощью катетов.
2. Катет с помощью гипотенузы.
3. Высоту в равнобедренном треугольнике.
4. Высоту с помощью проекций катетов.
5. Катет с помощью его проекции и гипотенузы.

Наш код

```
cout << " Выберите пункт:\n";
cout << "   1 — Найти гипотенузу с помощью катетов; \n";
cout << "   2 — Найти катет с помощью гипотенузы; \n";
cout << "   3 — Найти высоту в равнобедренном треугольнике;\n";
cout << "   4 — Найти высоту с помощью проекций катетов; \n";
cout << "   5 — Найти катет с помощью его проекции и гипотену-
зы; \n";
cout << " Ваш выбор: ";
char c;
for( ; ; )
{
        c = char(getch());
        if (c == '1' || c == '2' || c == '3' || c == '4' || c == '5')
                break;
}
cout << c << "\n\n";
int n = ( c - '0');
double a,b;
if (n == 1)
```

```
{
        cout << " Введите длину 1 катета: \n";
        cin >> a;
        cout << c << "\n";
        cout << " Введите длину 2 катета: \n";
        cin >> b;
        cout << c << "\n";
        if (a*a+b*b < 0 || a <= 0 || b <= 0)
                cout << c << " Такого не существует\n";
        else
                cout << c << " Длина гипотенузы равна " << c <<
sqrt(a*a+b*b);
        cout << c << "\n";
        cout << c << "\n Нажмите любую кнопку, чтобы продол-
жить...";
        getch();
}
else if(n == 2)
{
        cout << " Введите длину катета: \n";
        cin >> b;
        cout << c << "\n";
        cout << " Введите длину гипотенузы: \n";
        cin >> a;
        cout << c << "\n";
        if (b > a || a <= 0 || b <= 0)
                cout << c << " Такого не существует\n";
        else
                cout << c << " Длина 2 катета равна " << c << sqrt(a*a-
b*b);
        cout << c << "\n";
        cout << c << "\n Нажмите любую кнопку, чтобы продол-
жить...";
        getch();
}
```

```
else if(n == 3)
{
        cout << " Введите длину боковой стороны: \n";
        cin >> a;
        cout << c << "\n";
        cout << " Введите длину основания: \n";
        cin >> b;
        cout << c << "\n";
        if (a*a - b*b/4 || a <= 0 || b <= 0)
                cout << c << " Такого не существует\n";
        else
                cout << c << " Длина высоты равна " << c << sqrt(a*a
- b*b/4);
        cout << c << "\n";
        cout << c << "\n Нажмите любую кнопку, чтобы продол-
жить...";
        getch();
}
```

Вывод

Мы создали программу для решения геометрических задач по теореме Пифагора.

1. Мы составили алгоритм для решения задач.
2. Мы реализовали алгоритм в виде кода на языке программирования C++.
3. Протестировали программу и исправили ошибки.

Решение задач расширяет математический кругозор, формирует неординарность мышления, умение применять знания в нестандартных ситуациях, развивает упорство в достижении поставленных целей, прививает интерес к изучению классической математики.

Возможность *решения одной и той же задачи различными способами* демонстрирует непреложность выводов науки математики, подчеркивает красоту учебного предмета, здесь также важны краткость доказательства или решения, неожиданный подход, наглядность, связь между различными темами школьного курса математики. Решение задач различными способами помогает воспитывать интерес к предмету: математика уже не кажется им сухой и скучной наукой, дети видят, что и здесь нужны выдумка, полет фантазии, творческие способности.

Поэтому на уроках стараюсь рассмотреть разные способы решения задач, предложенные учащимися, отметить преимущества. Учащиеся часто предлагают нестандартные способы решения. Надо уметь рассмотреть все решения отметить правильность решения, в отдельных случаях показать ошибки, которые были допущены учеником при решении данной задачи.

Приведем пример решения задачи разными способами.

Фрагмент. Геометрия 11 класс.

Задача.

В правильной треугольной призме все ребра равны 4. Точка M — середина ребра AA_1. Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

Решение:

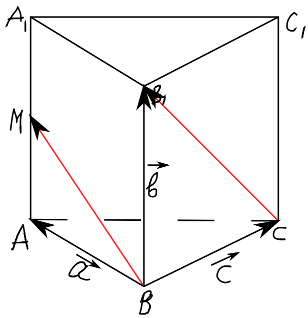
Способ первый.

Введем базис:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}; \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}; \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{b}.$$

Разложим в данном базисе вектора:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}; \quad \overrightarrow{CB_1} = -\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}.$$



Найдем скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \left(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\right) =$$

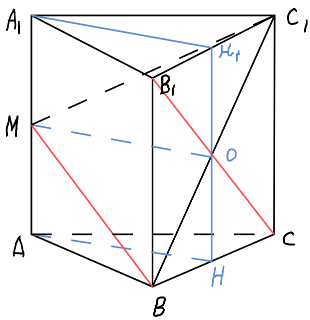
$$= -\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} =$$

$$= -4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$= -8 + 0 + 0 + 8 = 0.$$

Значит BM перпендикулярно CB_1.

Способ второй.



Проведем AH перпендикулярно BC.

BC перпендикулярно AH и BC перпендикулярно HH_1. Значит, BC перпендикулярно плоскости (AHH_1), значит BC перпендикулярно MO.

Рассмотрим плоскость (MBC_1).

MO перпендикулярно BC_1, так как $MB = MC_1$ (все ребра по 4). Значит MO перпендикулярно плоскости грани BB_1CC_1, то есть MO перпендикулярно B_1C.

Получаем B_1C и MO перпендикулярны, B_1C и BC_1 перпендикулярны, а значит, B_1C и MB перпендикулярны.

Или по теореме о трех перпендикулярах: B_1C и BC_1 перпендикулярны, а BO проекция MB на плоскость грани BB_1CC_1, значит и сама наклонная BM перпендикулярна B_1C.

Хороший урок — это урок вопросов и сомнений, озарений и открытий. Его условия:

- Теоретический материал должен даваться на высоком уровне, а спрашиваться по способностям;
- Принцип связи теории с практикой: учить применять знания в необычных ситуациях;
- Принцип доступности: ученик должен действовать на пределе своих возможностей; талант учителя — угадать эти возможности, правильно определить степень трудности;
- Принцип сознательности: ребенок должен знать, что он проходит;
- Установка не на запоминание, а на смысл, задача в центре содержания;
- Принцип прочности усвоения знаний: даются основы запоминания;
- Мышление должно главенствовать над памятью.