Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

НАУКА В РЕГИОНЫ

Методические материалы по физике для 8 класса

Фонд развития Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ

2021

Авторы и составители:

Селина Любовь Владимировна, аспирант МФТИ, методист репетиторского центра

Содержание

Повторение тем по физике за 7 класс

Современная физика изучает огромное количество различных процессов и явлений. Чтобы добиться единообразия при их описании, необходимо ввести основные понятия, которые используются в физике. Начнём с самих понятий «физическое явление» и «физический процесс». *Физическими* называются *явления*, при которых не происходит превращений одних веществ в другие. Физические явления можно разделить на несколько основных групп: механические, тепловые, электрические, магнитные, оптические и атомные. Каждый круг явлений изучается в соответствующем разделе физики. *Физическим процессом* в самом общем смысле называется ход или развитие какого-либо физического явления, последовательная смена состояний в его развитии. Например, процесс движения тела или процесс нагревания воды.

Чтобы описывать физические процессы и явления не только качественно, но и количественно, вводятся физические величины. *Физической величиной* называют характеристику материальных тел или физических процессов, которую можно выразить количественно в соответствующих единицах. Причинная взаимосвязь между различными физическими величинами и их изменениями устанавливается посредством *физических законов.*

Обычно все физические величины измеряются в Международной системе единиц, имеющей сокращенное название СИ, которая расшифровывается как «система интернациональная». Такая система единиц была построена в 1960–1983 годах. Она основана на семи основных единицах: метр, килограмм, секунда, моль, кельвин, ампер и кандела. Физические величины, их единицы измерения в СИ и краткие обозначения представлены в таблице 1.

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с

Таблица 1: Физические величины в системе СИ.

Единицу измерения длины и времени ввели еще в 1790. В то время «метр» определялся как одна десятимиллионная часть четверти земного меридиана. Секунда определялась как 1/86400 часть средних солнечных суток. В настоящее время метр и секунда определяются более сложно, но зато и более точно. Об этом вы узнаете в старших классах. Килограмм равен массе международного прототипа килограмма, который хранится в Международной палате мер и весов во Франции в г. Севре.

Чтобы было удобнее измерять «большие» физические величины, используют кратные единицы, которые в 10, 100, 1000 и т. д. раз больше основных единиц измерения. Напротив, чтобы измерять «маленькие» физические величины, используют дольные единицы, которые в 10, 100, 1000 и т. д. раз меньше основных единиц измерения. Для обозначения кратных и дольных единиц используют специальные приставки, некоторые из которых приведены в таблице 2.

Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение	
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	1000 или 10^3
гекто	г	100 или 10^2
дека	дк	10 или 10^1
нано	н	10^{-9}
микро	мк	10^{-6}
милли	м	0,001 или 10^{-3}
санти	с	0,01 или 10^{-2}
деци	д	0,1 или 10^{-1}

Таблица 2: Кратные единицы.

Пример 1. Рассмотрим некоторые примеры использования кратных и дольных единиц:

1. длина: 1 км = 1000 м = $1{\cdot}10^3$ м = 10000 дм = $1{\cdot}10^5$ см = $1{\cdot}10^6$ мм;
2. длина: 3 нм = 0,000000003 м = $3 \cdot 10^{-9}$ м;

3. время: 1 мс $= 0{,}001$ с $= 1 \cdot 10^{-3}$ с.

Как видно из примеров, писать много нулей неудобно. Лучше использовать для записи больших и малых чисел степень десяти, как это было показано выше. Это может оказаться для вас непривычным, но такую запись надо обязательно освоить — потом будет гораздо проще.

Зачастую на практике кроме основных единиц, используемых в СИ (метр, секунда, килограмм, Па и т. д.), применяются и другие единицы измерения. Их обычно называют внесистемными. Некоторые внесистемные единицы, которые будут встречаться нам при решении задач, приведены в таблице 3.

Величина	Единица (её обозначение)	Связь с единицами СИ
Время	минута (мин) час (ч) сутки (сут)	60 с 3600 с $= 3{,}6 \cdot 10^3$ с 86400с $= 8{,}64 \cdot 10^4$ с
Масса	тонна (т)	1000 кг $= 1 \cdot 10^3$ кг
Давление	миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.) физическая атмосфера (атм)	133 Па $1{,}01 \cdot 10^5$ Па

Таблица 3: Связь внесистемных и системных единиц измерения.

Пример 1. Приведём некоторые примеры использования внесистемных единиц:

1. масса: 4 т $= 4 \cdot 1000$ кг $= 4000$ кг или масса 4 т $= 4 \cdot 10^3$ кг;
2. объем: 30 л $= 30 \cdot 0{,}001$ м^3 $= 0{,}03$ м^3 или 30 л $= 30 \cdot 10^{-3}$ м^3 $= 3 \cdot 10^{-2}$ м^3;
3. время: 2 ч $= 2 \cdot 3600$ с $= 7200$ с или 2 ч $= 2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3$ с $= 7{,}2 \cdot 10^3$ с.

Механическое движение

Механика — раздел физики, изучающий механическое движение тел. Согласно общепринятому определению *механическое движение* — это изменение положения тела относительно других тел в пространстве с течением времени. Чтобы решить *основную задачу механики*: определить положение тела в любой момент времени, вводят систему отсчета, в которой рассматривают движение тела. *Система отсчёта* состоит тела отсчёта, связанной с ним системы координат и прибора для измерения времени.

Простейшим видом механического движения является равномерное движение, когда тело движется с постоянной скоростью. В данной главе мы подробно остановимся на этом виде движения, рассмотрим связь различных механических характеристик друг с другом, обсудим графическое представление зависимостей физических величин.

Равномерное движение тел

Раздел механики, который изучает различные виды движения без выяснения причин его возникновения, называется *кинематикой*. Ключевыми понятиями в кинематике являются путь, перемещение, время, скорость, ускорение. Познакомимся с ними более подробно.

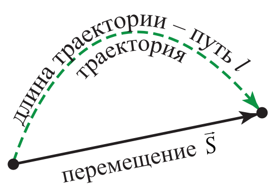


Рис. 1: Траектория, путь, перемещение.

Траекторией называется линия, вдоль которой движется тело. *Путь* — это длина траектории, а *перемещение* — вектор, соединяющий начальное и текущее положения тела. Более подробно с векторами вы познакомитесь в 9 классе. Траектория, путь и перемещение наглядно показаны на рисунке 1. Как видно, путь и перемещение не всегда одинаковы. Путь — скалярная физическая величина, которая обычно обозначается буквами L или S. Слово «*скалярная*» означает, что рассматриваемая физическая величина не имеет определённого направления в пространстве, в отличие от *векторной* величины, которая характеризуется величиной и направлением. Измеряется путь в международной системе единиц (СИ) в метрах [м].

Время — скалярная физическая величина, являющаяся мерой длительности процесса. Приборами для измерения времени являются часы, секундомер, метроном и так далее (рис. 2). Часы бывают песочные, механические, электронные.

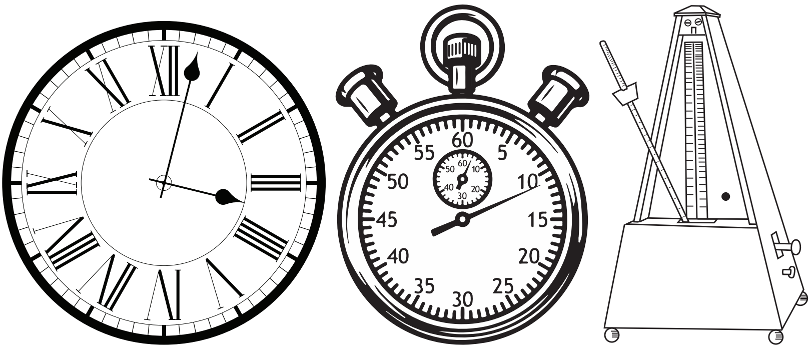


Рис. 2: Приборы для измерения времени: а) часы; б) секундомер; в) метроном.

Познакомимся более подробно с понятием скорости. Скорость показывает, насколько быстро перемещается тело в пространстве. В каждый момент времени она имеет определённое направление. Таким образом, *скорость* — это векторная физическая величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, за которое перемещение произошло. Помимо скорости перемещения тела в физике также говорят о путевой скорости. *Путевой скоростью* называется скалярная физическая величина, равная отношению пути к промежутку времени, за которое он был пройден. Скорость обычно обозначается буквой v и в системе СИ измеряется в метрах в секунду [м/с]:

$$v = \frac{S}{t}.$$

Также скорость часто измеряют в километрах в час [км/ч]. Переведём 1 км/ч в м/с: $1\dfrac{\text{км}}{\text{ч}} = 1\cdot\dfrac{1000\ \text{м}}{3600\ \text{с}} = \dfrac{1}{3{,}6}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. То есть:

$$v_1 = x\frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{x}{3{,}6}\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad v_2 = y\frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}6\cdot y\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Пример 2. Скорость первого объекта 15 м/с, а второго — 72 км/ч. Скорость какого объекта больше?

Решение. Чтобы ответить на данный вопрос, переведём скорости обоих тел в одинаковые единицы измерения. Например, переведём 72 км/ч в м/с: $v_2 = 72$ км/ч $= 72\cdot\dfrac{1}{3{,}6}$м/с $= 20$ м/с. Можно, наоборот, 15 м/с перевести в км/ч: $v_1 = 15$ м/с $= 54$ км/ч. Таким образом, скорость второго объекта больше.

Если тело движется *равномерно*, т. е. за любые равные промежутки времени проходит одинаковые расстояния, то его скорость остаётся постоянной. Рассмотрим несколько задач на равномерное движение тел.

Пример 3. Поезд движется со скоростью 90 км/ч. За какое время мимо неподвижно стоящего на платформе пассажира проедут первые три вагона, если длина каждого вагона равна 24 м, а расстояние между вагонами равно 1 м? Ответ выразите в секундах.

Решение. Длина первых трёх вагонов с промежутками между ними равна: $L = 3l_1 + 2l_2 = 74$ м. Здесь мы ввели обозначения: $l_1 = 24$ м, $l_2 = 1$ м. Скорость дана в км/ч, поэтомуу переведём её в систему СИ: $v = 90$ км/ч $= 25$ м/с. Время, за которое они проедут мимо пассажира, равно: $t = \dfrac{3l_1 + 2l_2}{v} = 2{,}96$ с.

Пример 4. Состав длиной 1 км входит в тоннель длинной 3 км. Найти время, в течение которого какая-либо часть поезда будет находиться в тоннеле, если скорость поезда 72 км/ч.

Решение. Когда состав полностью выйдет из тоннеля, он от места входа начала состава в туннель пройдёт расстояние: $L = l_1 + l_2 = 4$ км. Здесь $l_1 = 1$ км – длина поезда, $l_2 = 3$ км — длина тоннеля. Тогда время, которое состав затратит на проезд, равно:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{4\ \text{км}}{72\ \text{км/ч}} = \frac{4000\ \text{м}}{20\ \text{м/с}} = 200\ \text{с}.$$

Пример 5. Карлсон купил квартиру на крыше семнадцатиэтажной новостройки на высоте $H = 55$ м над землей. За вареньем теперь ему приходится летать в соседний магазин, который находится на расстоянии $L = 100$ м от его дома. В горизонтальном полете Карлсон развивает скорость v, при вертикальном спуске $2v$, а при вертикальном подъеме $\frac{v}{2}$. Определите, чему равна скорость v, если на полет до магазина и обратно Карлсон тратит ровно $t = 5$ мин.

Решение. В задаче неявно предполагается, что магазин расположен на высоте 0 (например, в полуподвальном этаже здания), а самого Карлсона можно считать материальной точкой (т. е. пренебречь его размерами по сравнению с расстояниями, указанными в задаче).

Поскольку движение Карлсона, согласно условию задачи, может быть только горизонтальным или вертикальным, построим путь движения Карлсона в магазин из 4 этапов:

- Горизонтальный полет длины L на высоте H;
- Спуск к магазину с высоты H;
- Горизонтальный полет длины L на высоте 0;
- Подъем на крышу на высоту H.

Общее время движения:

$$t = \frac{L}{v} + \frac{H}{2v} + \frac{L}{v} + \frac{H}{\frac{v}{2}} = \frac{2L}{v} + \frac{5H}{2v} = \frac{1}{v}\left(2L + \frac{5H}{2}\right).$$

Отсюда находим скорость движения:

$$v = \frac{1}{300\ \text{с}}\left(2 \cdot 100\ \text{м} + 2{,}5 \cdot 55\ \text{м}\right) = 1{,}1\ \text{м/с}.$$

Отдельного внимания заслуживают задачи, в которых движутся несколько тел. Например, два тела могут двигаться в одном направлении или в противоположные стороны.

Пример 6. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля: грузовой из пункта A и легковой из пункта B. Известно, что встреча автомобилей произошла на расстоянии $L_1 = 15$ км от пункта A. Определите скорость легкового автомобиля, если расстояние между городами $L = 40$ км, а скорость грузового автомобиля $v_1 = 14$ м/с. Скорости автомобилей считать постоянными.

Решение. Скорость легкового автомобиля равна: $v_2 = \dfrac{L_2}{t} = \dfrac{L - L_1}{t}$, здесь t — время движения автомобилей до встречи, которое можно найти по формуле: $t = \dfrac{L_1}{v_1}$. Тогда скорость легкового автомобиля равна:

$$v_2 = \frac{L - L_1}{L_1} v_1 = \frac{40 - 15}{15} \cdot 14 \cdot 3{,}6 = 84 \text{ км/ч}.$$

Пример 7. Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 28 км/ч и на нем нельзя ехать вдвоем. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 8 км/ч, а второго — 7 км/ч. Расстояние до деревни 77 км.

Решение. Обозначим расстояние до деревни за $S = 77$ км. Поскольку ребята не могут ехать на велосипеде вдвоем, чтобы существенно сократить время движения, им надо ехать на нем по очереди. Пусть один из них проехал первую часть пути длиной S_0 на велосипеде со скоростью $v_0 = 28$ км/ч, а оставшуюся часть пути длиной $(S - S_0)$ прошел со скоростью $v_1 = 7$ км/ч. Тогда второй сначала шел со скоростью $v_2 = 8$ км/ч, а потом ехал на велосипеде. Чтобы как можно раньше добраться до деревни, надо найти такой путь S_0, при котором они прибыли бы в деревню одновременно:

$$t = t_{1\text{в}} + t_{1\text{п}} = t_{2\text{п}} + t_{2\text{в}}, \quad \text{или} \quad \frac{S_0}{v_0} + \frac{S - S_0}{v_1} = \frac{S_0}{v_2} + \frac{S - S_0}{v_0}.$$

Выражая S_0, получаем:

$$S_0 = \frac{S\left(\dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_0}\right)}{\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{2}{v_0}\right)} = \frac{5}{11}S.$$

Тогда время движения:

$$t = \frac{S}{11}\left(\frac{5}{v_0} + \frac{6}{v_1}\right) = 6{,}5 \text{ ч.}$$

Если в формулу для времени подставить выражение для S_0 в общем виде, то получим:

$$t = S\left(\frac{1}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_0^2}\right)\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{2}{v_0}\right).$$

Но в данном случае удобней сначала найти S_0, а затем t.

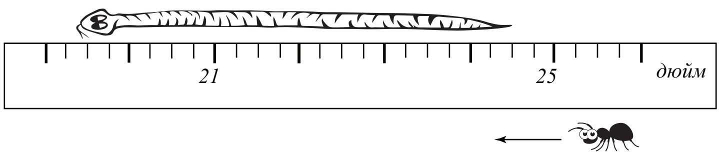
Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Скорость Гулливера при спокойной ходьбе составляет 100 глюмглеффов в секунду, а максимальная скорость маленького гепарда из страны Лилипутии — 1200 блестрег в час. Кто быстрее: Гулливер или гепард-лилипут? Известно, что 70 глюмглеффов равны 6 футам, 5000 блестрег равны 12 милям, в одной миле — 5280 футов. (ВОШ, 7 класс, ШЭ, 2018/19)

Задача 2. 14 ноября 1889 года журналистка Нелли Блай отправилась налегке в кругосветное путешествие по маршруту: Нью-Йорк — Лондон — Париж — Бриндизи — Суэц — Цейлон — Сингапур — Гонконг — Йокогама — Сан-Франциско — Нью-Йорк с целью повторить рекорд Филеаса Фогга. Она финишировала в Нью-Йорке, преодолев 24899 мили (1 миля = 1,6 км) перемещаясь со средней скоростью 6,38128 м/с. Определите время ее путешествия, которое было зафиксировано в редакции газеты (с точностью до секунды).

Задача 3. С помощью рисунка определите как можно точнее, за какое время маленькая букашка пробежит вдоль спящей змейки, если 1 дюйм = 2,54 см. Букашка движется с постоянной скоростью

0,1 км/ч. Ответ получите в секундах и округлите до десятых долей. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2018/19)



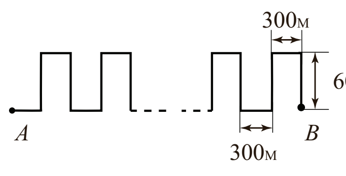
Задача 4. Автомобиль, двигаясь равномерно, проходит путь равный $S_1 = 100$ м за время $t_1 = 10$ с. Какой путь пройдет автомобиль за время $t_2 = 30$ с, двигаясь в 2 раза быстрее?

Задача 5. Автобус, на котором Виталий ездит в школу, проезжает расстояние 8 км за 23 минуты. Скорость автобуса 40 км/ч. Сколько времени этот автобус тратит на остановки? (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2013/14)

Задача 6. Состав длиной 1 км входит в тоннель длинной 2 км. Найти время, в течение которого какая-либо часть поезда будет находиться в тоннеле, если скорость поезда 36 км/ч.

Задача 7. Пассажир, сидящий в поезде, обратил внимание на то, что мост «проехал» мимо него за время $t_1 = 20$ с. Поезд двигался по мосту равномерно в течение времени $t_2 = 70$ с (это время, которое прошло от момента въезда на мост локомотива до момента съезда с моста последнего вагона). Во сколько раз длина поезда больше длины моста? Получите ответ в виде формулы и затем найдите численный ответ. (ВОШ, 8 класс, ШЭ, 2016/17)

Задача 8. Почтальон Печкин, двигаясь на велосипеде с постоянной скоростью, объехал одну за другой улицы деревни, доставляя корреспонденцию. Линия, вдоль которой двигался почтальон, показана на рисунке. Во сколько раз быстрее проехал бы Печкин расстояние от A до B, если бы двигался с вдвое большей скоростью по прямой? (ВОШ, 7 класс, ШЭ, 2017/18)



Задача 9. Муравей отправился на разведку. Стартовав от муравей-

ника, он в течение времени $t = 10$ с полз на восток со скоростью $V = 1$ см/с. Затем муравей повернул и в течение времени $2t$ двигался со скоростью $2V$ на север. Потом он бежал на запад в течение времени t со скоростью $3V$ и, наконец, повернув на юг, мчался с максимально возможной скоростью $4V$ ещё в течение времени t. После этого его движение в точности повторялось. Через 20 мин поиска муравей обнаружил добычу. Какое минимальное время потребуется ему для возвращения в муравейник, если при движении с добычей муравей может развивать скорость, в 3 раза меньшую максимально возможной? (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2016/17)

Задача 10. Спортивная парусная яхта вышла в плавание с попутным ветром. Ей предстояло пройти расстояние 250 км. В первые 10 часов пути яхта двигалась со скоростью 15 км/ч, затем ветер переменился, и остаток пути яхта прошла со скоростью 10 км/ч. Сколько часов занял весь путь? (ВОШ, 7–8 класс, МЭ, 2014/15)

Задача 11. Емеля пошёл из деревни в город со скоростью $v_1 = 5$ км/ч. Начался сильный снегопад, и он снизил скорость до $v_2 = 3$ км/ч. Когда снегопад кончился, Емеля вновь пошёл со скоростью v_1. В результате он прибыл в город на $\tau = 30$ минут позже запланированного, затратив на весь путь время $t = 2$ часа. 1) Чему равно расстояние от деревни до города? 2) Сколько времени шёл снегопад? (МОШ, 7 класс, 2016/17)

Задача 12. Подвернув ногу, снежный барс вызвал доктора Айболита домой, куда вело две дороги: короткая — длиной $S_1 = 27$ км и длинная — $S_2 = 52$ км. Айболит поехал по короткой дороге, и навигатор рассчитал, что доктор приедет в $t_1 =$ 13:30. Однако, проехав $S = 10$ км, Айболит обнаружил, что дорогу замело снегом. Айболит сразу поехал обратно и, вернувшись, поехал по длинной дороге. К барсу он прибыл в $t_2 =$ 14:00. Найдите скорость Айболита, считая, что она была постоянной. (МОШ, 7 класс, 2017/18)

Задача 13. Школьник Ярослав и пёс Барбос идут по дороге, двигаясь по ней к вершине холма. Ярослав идёт со скоростью 2 км/ч. С самого начала подъёма на холм Барбос начал бегать от Ярослава до вершины, затем назад до школьника и так далее, пока тот не взобрался на холм. Какой путь пробежит Барбос до того момента, как Ярослав взберётся на самую вершину? Скорость Барбоса 9 км/ч, а длина пути до вершины холма 400 м. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2014/15)

Задача 14. От станции Простоквашино до дома, в котором живёт кот Матроскин, расстояние $S = 1{,}2$ км. Дядя Фёдор с Шариком приехал на станцию Простоквашино и пошёл домой вниз по склону со скоростью $V_ф = 4$ км/ч, а Шарик побежал со скоростью $V_{Ш,1} = 12$ км/ч. Добежав до дома Шарик повернул обратно и побежал вверх по склону навстречу дяде Фёдору со скоростью $V_{Ш,2} = 8$ км/ч. Так пёс бегал вперед и назад между дядей Фёдором и домом вплоть до момента прибытия мальчика домой. Какой путь больше: суммарный путь S_1, который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома или S_2 который он пробежал, перемещаясь в обратном направлении? Определите S_1 и S_2. (Максвелл, 7–8 класс, РЭ, 2018/19)

Задача 15. Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед на котором можно ехать со скоростью 20 км/ч, и на нем нельзя ехать вдвоем. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 5 км/ч, а второго 6 км/ч. Расстояние до деревни 32 км. (Курчатов, 7 класс, 2018/19)

Задача 16. Петя и Вася поспорили, кто быстрее преодолеет расстояние $l = 3{,}0$ км от дома до поляны с земляникой. Первую часть пути они бежали по лесу, а вторую плыли по озеру. Петя бежал со скоростью $v_1 = 10$ км/ч, а Вася с $v_2 = 11$ км/ч, но плыл Петя с $v_3 = 2{,}0$ км/ч, а Вася с $v_4 = 1{,}0$ км/ч. Какое расстояние Петя плыл по озеру, если до поляны мальчики добрались одновременно? (МОШ, 7–8 класс, 2016/17)

Задача 17. Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живёт в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром — 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идёт по дороге со скоростью 5 км/ч. Могут ли все трое добраться до бабушки за 3 часа?

Задача 18. Выйдя из дома, папа с дочкой Машей и сыном Ваней бегут к автобусной остановке, расстояние до которой $S = 430$ м. Скорость Вани равна $V = 2$ м/с, скорость Маши — $2V$, а скорость папы — $4V$. Если папа сажает любого из детей на шею, то его скорость уменьшается до $3V$. Двоих детей одновременно папа нести не может. Через какое минимальное время вся семья сможет оказаться на остановке? Можно считать, что посадка детей на папину шею, а также разгон и торможение происходят быстро. (МОШ, 7 класс, 2016/17)

Относительная скорость движущихся тел

Часто в задачах, где движутся несколько тел, при решении оказывается удобным переходить из одной системы отсчёта в другую и находить скорость их относительного движения. Например, когда два поезда движутся навстречу друг другу или легковой автомобиль обгоняет грузовой, бывает полезным найти скорость их сближения или отдаления друг от друга. Такая скорость, в общем случае, называется их *относительной скоростью* и связана с абсолютными скоростями тел $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ относительно неподвижной системы отсчёта преобразованием Галилея для скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2,$$

здесь $\vec{v}_{12}$ — скорость первого тела относительно второго.

Чтобы не рассказывать преждевременно о векторах в физике, достаточно отметить, что для решения задач, которые могут нам встре-

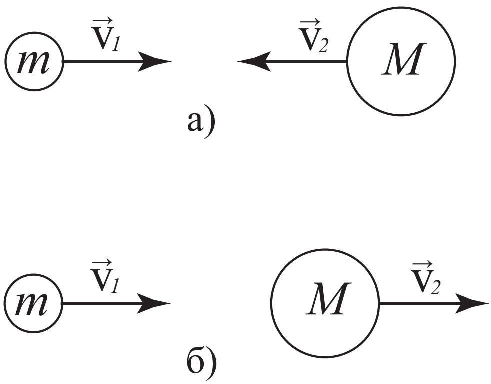


Рис. 3: Движение тел а) в противоположных направлениях; б) в одном направлении.

титься на механическое движение в 7–8 классах, используется формула $v_{12} = v_1 + v_2$ в случае, когда тела движутся в противоположных направлениях, и формула $v_{12} = |v_1 - v_2|$, когда тела движутся в одном направлении (рис. 3).

Рассмотрим несколько задач, при решении которых оказывается удобным использование формулы для относительной скорости движущихся тел.

Пример 8. Сколько времени пассажир, сидящий у окна поезда, движущегося со скоростью $v_1 = 36$ км/ч, будет видеть обгоняющий скорый поезд длиной $L = 100$ м, идущий со скоростью $v_2 = 72$ км/ч?

Решение. Найдём скорость обгоняющего поезда относительно пассажира: $v_{21} = v_2 - v_1 = 36$ км/ч $= 10$ м/с. Тогда время, за которое скорый поезд пройдёт мимо человека, равно: $t = \dfrac{L}{v_{\text{отн}}} = \dfrac{100\text{ м}}{10\text{ м/с}} = 10$ с.

Пример 9. По двум параллельным сторонам дороги едут навстречу друг другу грузовик и мотоцикл со скоростями $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 54$ км/ч соответственно. В течение какого времени грузовик проезжает мимо мотоцикла, если длина грузовика $L_1 = 20$ м, а длина мотоцикла $L_2 = 2$ м?

Решение. Грузовик полностью проедет мимо мотоцикла, когда пройдёт расстояние, равное сумме их длин: $L = L_1 + L_2$. Скорость грузовика относительно мотоцикла равна: $v_{12} = v_1 + v_2$, здесь $v_2 = 54$ км/ч $=$ 15 м/с. Тогда время, которое грузовик затратит на проезд, равно:

$$t = \frac{L_1 + L_2}{v_1 + v_2} = \frac{22\text{ м}}{25\text{ м/с}} = 0{,}88\text{ с.}$$

Пример 10. Два семиклассника движутся навстречу друг другу так, что за каждые $t_1 = 10$ с расстояние между ними уменьшается на $s_1 =$ 16 м. Если же семиклассники будут двигаться в одном направлении, то за каждые $t_2 = 5$ с расстояние между ними будет увеличиваться на $s_2 = 3$ м. Найдите скорости семиклассников.

Решение. Когда семиклассники движутся навстречу друг другу, их относительная скорость равна сумме скоростей семиклассников, а когда в одном направлении — их разности:

$$\begin{cases} v_{12} = v_1 + v_2 = \dfrac{S_1}{t_1}; \\ v'_{12} = v_1 - v_2 = \dfrac{S_2}{t_2}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим ответ:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2}\right) = 1{,}1 \text{ м/с}, \qquad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{t_1} - \frac{S_2}{t_2}\right) = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Пример 11. За время $t_1 = 1{,}5$ ч моторная лодка проходит против течения расстояние $l = 18$ км. За какое время она пройдет в обратном направлении вдвое большее расстояние, если скорость течения реки $u = 3$ км/ч.

Решение. Когда лодка движется против течения, её скорость относительно земли равна разности скорости лодки относительно воды и скорости реки $v_1 = v - u = \dfrac{l}{t_1}$, а когда по течению — сумме: $v_2 = v + u = \dfrac{2l}{t_2}$. Выражая из первого уравнения скорость лодки относительно воды $v = u + \dfrac{l}{t_1}$ и подставляя её во второе уравнение, получаем выражение: $\dfrac{l}{t_1} + 2u = \dfrac{2l}{t_2}$, откуда выражаем время:

$$t_2 = \frac{2l}{\dfrac{l}{t_1} + 2u} = 2 \text{ ч}.$$

Пример 12. Рыбак плыл на моторной лодке по реке, зацепился шляпой за мост, и она свалилась в воду. Рыбак поплыл дальше, но через полчаса решил повернуть обратно за шляпой. Лодка догнала ее на 4 км от моста. Чему равна скорость течения реки?

Решение. Перейдем в систему координат, связанную с течением реки, в которой шляпа неподвижна. В этой системе модуль скорости не зависит от направления движения моторной лодки, следовательно, на возвращение к шапке рыбак затратил столько же времени, сколько на отдаление от нее — 30 мин.

Так как шляпа движется со скоростью течения и за 1 час удалилась от моста на 4 км, то скорость течения равна 4 км/ч.

Пример 13. Товарный поезд проезжает мимо станции «Счастье» со скоростью $v_1 = 36$ км/ч. Через промежуток времени $t_0 = 30$ мин мимо этой станции в том же направлении проезжает экспресс со скоростью $v_2 = 144$ км/ч. На каком расстоянии от станции «Счастье» экспресс догонит товарный поезд?

Решение.

1) За время t_0 товарный поезд проедет расстояние $S_0 = v_1 t_0$.

2) Экспресс догоняет товарный поезд с относительной скоростью $v_{21} = v_2 - v_1$.

3) Поезда встретятся через время $t = \dfrac{S_0}{v_{21}} = \dfrac{v_1 t_0}{v_2 - v_1}$.

4) За это время экспресс отъедет от станции на расстояние

$$S = v_2 t = \frac{v_1 v_2 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 60}{40 - 10} = 24000 \text{ м} = 24 \text{ км}.$$

Пример 14. Два поезда выехали из города A в город B с одинаковыми скоростями $v_1 = 60$ км/ч, причем один отправился через $t_1 = 10$ мин после другого. Экспресс, идущий из города B в город A, повстречал эти поезда через $t_2 = 4$ мин один после другого. Найти скорость экспресса.

Решение.

1) Найдём расстояние между поездами, выехавшими из пункта A: $S_1 = v_1 t_1$.

2) Экспресс движется относительно поездов со скоростью

$$v_{21} = v_1 + v_2.$$

3) Тогда время проезда экспресса между поездами равно:

$$t_2 = \frac{S_1}{v_{21}} = \frac{v_1 t_1}{v_1 + v_2},$$

откуда получаем ответ:

$$v_2 = v_1 \left(\frac{t_1}{t_2} - 1\right) = 60 \cdot \left(\frac{10}{4} - 1\right) = 90 \text{ км/ч}.$$

Пример 15. Два мальчика идут навстречу друг к другу, со скоростью $u = 3{,}6$ км/ч каждый. В момент, когда расстояние между ними составляло $L = 200$ метров, первый мальчик отпускает собаку, которая начинает бегать со скоростью $v = 8$ м/с между мальчиками, почти мгновенно разворачиваясь в точках встреч с мальчиками. Оцените, какое расстояние пробежит собака к моменту времени, когда мальчики встретятся?

Решение. Поскольку скорость каждого из мальчиков постоянна и равна 1 м/с, то дистанцию в 200 метров они пройдут за 100 секунд. Собака бегает с постоянной скоростью 8 м/с, и за то же время пробежит расстояние 8 м/с $\times$ 100 с $=$ 800 м.

Пример 16. Во время гран-при Формулы-1 в Лапландии машина команды Лада обгоняет машину команды Мерседес каждые $t_1 = 8$ минут, а команды Феррари — каждые $t_2 = 12$ минут. Как часто Феррари обгоняет Мерседес? Считать, что все машины едут с постоянными скоростями.

Решение. Если машины периодически обгоняют друг друга, значит они движутся по замкнутой траектории. Пусть длина трассы равна l. Тогда можно записать:

$$l = (v_\text{л} - v_\text{м})\, t_1, \quad l = (v_\text{л} - v_\text{ф})\, t_2, \quad l = (v_\text{ф} - v_\text{м})\, t_3,$$

здесь $v_\text{л}$, $v_\text{м}$ и $v_\text{ф}$ — скорости Лады, Мерседеса и Феррари соответственно. Выразим относительные скорости машин из формул, записанных выше:

$$v_\text{л} - v_\text{м} = \frac{l}{t_1}, \quad v_\text{л} - v_\text{ф} = \frac{l}{t_2}, \quad v_\text{ф} - v_\text{м} = \frac{l}{t_3}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$v_\text{ф} - v_\text{м} = \frac{l}{t_1} - \frac{l}{t_2}.$$

Подставляя полученное выражение в третье уравнение, получаем:

$$\frac{l}{t_3} = \frac{l}{t_1} - \frac{l}{t_2},$$

откуда

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = \frac{8 \cdot 12}{12 - 8} = 24 \text{ мин.}$$

Пример 17. Спортсмены бегут колонной длины L со скоростью v. Навстречу бежит тренер со скоростью $u < v$. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад с той же по модулю скоростью v. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой тренер неподвижен. В ней спортсмены движутся по направлению к тренеру со скоростью $u + v$, а от него — со скоростью $v - u$ (скорость положительная из-за $u < v$). Разница между моментами времени, когда первый и последний спортсмены добегут до тренера, равна

$$\Delta t = \frac{L}{v + u}.$$

Первый спортсмен за это время удалится от тренера на расстояние

$$L_1 = (v - u)\Delta t = L\frac{v - u}{v + u}.$$

Что и будет длиной новой колонны.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 19. В течение какого времени скорый поезд длинной 300 м, идущий со скоростью 72 км/ч, будет проходить мимо встречного товарного поезда длинной 600 м, идущего со скоростью 36 км/ч?

Задача 20. По правой полосе прямой дороги едет автобус со скоростью $v_1 = 10$ м/с. По левой полосе его обгоняет автомобиль, движущийся со скоростью $v_2 = 72$ км/ч. В течение какого времени автомобиль проезжает мимо автобуса, если длина автобуса $l_1 = 20$ м, а длина автомобиля $l_2 = 4$ м?

Задача 21. Первый пешеход проходит расстояние $S = 4$ км между пунктами A и B за время $t_1 = 1$ ч, в второй — за время $t_2 = 3$ ч. На каком расстоянии от пункта A встретятся пешеходы, если выйдут одновременно: первый из пункта A в направлении B, второй из B в направлении от A? Скорости пешеходов постоянны.

Задача 22. Пассажирский катер проходит расстояние 150 км по течению за 2 часа, против течения за 3 часа. Какова скорость катера в стоячей воде?

Задача 23. За время $t_1 = 3$ ч моторная лодка проходит по течению расстояние $l_1 = 48$ км. За какое время она пройдет в обратном направлении половину этого расстояния, если скорость течения реки $U = 5$ км/ч?

Задача 24. На полный обгон теплоходом каравана барж потребовалось $t_1 = 2$ мин, а катер обгонял теплоход $t_2 = 1$ мин. Какое время t_3 потребуется катеру на обгон каравана барж? Известно, что катер совсем маленький, а длина каравана в три раза больше длины теплохода. Все суда идут равномерно. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2016/17)

Задача 25. Поднимаясь по движущемуся со скоростью 0,75 м/с вверх эскалатору, человек насчитал 80 ступенек. Сколько ступенек он насчитает, поднимаясь по неподвижному эскалатору, если скорость человека относительно эскалатора 1,5 м/с? (МОШ, 7 класс, заочный тур, 2018/19)

Задача 26. От остановки отправился автобус со скоростью 75 км/ч. Через время 0,5 ч в том же направлении, от той же остановки отправился автомобиль со скоростью 100 км/ч. На каком расстоянии L от остановки автомобиль догонит автобус?

Задача 27. Из Лобни в сторону Москвы с интервалом в 15 минут выехали два мотоциклиста со скоростью 40 км/ч. Найти скорость встречного велосипедиста, если он встретил этих мотоциклистов с интервалом в 8 минут.

Задача 28. Два товарных поезда отправляются из Москвы в Санкт-Петербург с интервалом в 20 мин и едут с одинаковыми постоянными скоростями. Из Санкт-Петербурга в Москву с интервалом в 40 мин отправляются два рейсовых поезда, которые тоже едут с одинаковой постоянной скоростью. Машинист рейсового поезда заметил, что машинисты товарных поездов проехали мимо него с разницей в 8 мин. С каким интервалом проедут мимо машиниста товарного поезда машинисты рейсовых поездов? (МОШ, 7 класс, нулевой очный тур, 2018/19)

Задача 29. Школьники Витя и Юра плавают в бассейне на соседних дорожках (длина бассейна 25 м). Они стартуют одновременно с одной стороны бассейна и затем плывут с постоянной скоростью (каждый со своей). Витя преодолевает дистанцию 800 м за 13 мин 7 с, а Юра — дистанцию 1500 м за 24 мин 12 с. Сколько раз за время заплыва ребята проплывали мимо друг друга? Момент старта не считайте. (ВОШ, 7–8 класс, МЭ, 2015/16)

Задача 30. Вдоль длинной дороги с постоянной скоростью на равных расстояниях друг от друга колонной ползут черепахи. Мимо стоящего Ахиллеса в минуту проползает $n_1 = 5$ черепах. Если Ахиллес побежит трусцой в сторону движения колонны, то он будет обгонять в минуту $n_2 = 45$ черепах, а если он поедет на велосипеде навстречу колонне, то в минуту ему будет встречаться $n_3 = 105$ черепах. Какое расстояние L успеет проползти черепаха за то время, за которое Ахиллес трусцой пробежит $S = 100$ м? Во сколько раз скорость Ахиллеса на велосипеде больше, чем при беге? (ВОШ, 7 класс, РЭ, 2016/17)

Задача 31. Экспериментатор Глюк наблюдал за встречным движением скорого поезда и электрички. Оказалось, что каждый из поездов прошёл мимо Глюка за одно и то же время $t_1 = 23$ с. А в это время друг Глюка, теоретик Баг, ехал в электричке и определил, что скорый поезд прошёл мимо него за $t_2 = 13$ с. Во сколько раз скорый поезд длиннее электрички? (ВОШ, 8 класс, РЭ, 2008/09)

Задача 32. Коля, Маша и Вася расположились на одной прямой дороге, как показано на рисунке. Коля и Вася побежали одновременно навстречу друг другу со скоростями 5 м/с и 7 м/с соответственно. Куда и с какой скоростью должна бежать Маша, чтобы все ребята встретились за наикратчайшее время? Все бегут только в выбранном направлении, и при встрече двух участников они останавливаются. (МОШ, 8 класс, заочный тур, 2016/17)

Задача 33. Друзья Вася и Петя, живущие в деревнях Липовка и Дёмушкино, были в гостях у своего друга Саши, который живёт в деревне Малиновка, расположенной точно посередине между деревнями Липовка и Дёмушкино. Нагостившись у Саши, Вася и Петя одновременно вышли и отправились каждый в свою деревню, чтобы вернуться домой через $t_0 = 60$ мин. Спустя $\frac{t_0}{6} = 10$ мин после выхода своих друзей Саша обнаружил, что каждый из них забыл у него дома свои вещи. Саша решил догнать каждого из них по очереди и отдать им вещи. С какой минимальной скоростью u должен бежать Саша, чтобы успеть догнать каждого из своих друзей до того, как они вернутся в свои деревни? Скорости Васи и Пети одинаковы и равны $v = 5$ км/ч. (МОШ, 8 класс, второй тур, 2009/10)

Средняя скорость

Если тело в процессе движения изменяет свою скорость, то вводят понятие *средней скорости* движения тела, которая равна отношению всего пути, пройденного телом, ко времени, за которое данный путь был пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t}.$$

здесь $S = S_1 + \ldots + S_n$, $t = t_1 + \ldots t_n$. $S_1, \ldots, S_n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — участки пути и промежутки времени, пройденные с постоянными скоростями $v_1, \ldots, v_n$ соответственно. Рассмотрим некоторые задачи на среднюю скорость.

Пример 18. Теплоход по течению двигался со скоростью 15 км/ч, а против течения — со скоростью 10 км/ч. С какой средней скоростью теплоход прошел весь путь туда и обратно, если расстояние между двумя пристанями равно 8 км?

Решение. Средняя скорость равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{2S_0}{t_1 + t_2}.$$

Здесь $t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S_0}{v_0}$, $t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{S_0}{v_2}$, S_0 — расстояние между пристанями. Подставляя выражения для времени в уравнение для средней скорости, в итоге получаем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = 12 \text{ км/ч}.$$

Пример 19. Автомобиль 2 ч двигался со скоростью 15 м/с, а затем проехал еще 72 км со скоростью 20 м/с. Определите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

Решение. Средняя скорость равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}.$$

Здесь $t_1 = 2$ ч, $S_2 = 72$ км, $S_1 = v_1t_1$, $t_2 = \dfrac{S_2}{v_2}$, $v_1 = 15$ м/с $= 54$ км/ч, $v_2 = 20$ м/с $= 72$ км/ч. Подставляя выражения для отрезков пути и времени в выражение для средней скорости, получаем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1t_2+S_2}{t_1+\dfrac{S_2}{v_2}} = \frac{54\cdot 2+72}{2+\dfrac{72}{72}} = 60 \text{ км/ч}.$$

Пример 20. Автомобиль проехал две трети всего времени движения со скоростью $v_1 = 54$ км/ч, а остальное время — со скоростью $v_2 = 12$ м/с. Определите среднюю скорость автомобиля за все время движения.

Решение. 1) Средняя скорость автомобиля равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2}{t} = \frac{v_1t_1+v_2t_2}{t} = \frac{v_1\dfrac{2}{3}t+v_2\dfrac{1}{3}t}{t} = \frac{2}{3}v_1+\frac{1}{3}v_2.$$

Здесь $v_1 = 54$ км/ч $= 15$ м/с, $v_2 = 12$ м/с. Подставляя эти значения в выражение для средней скорости, получаем: $v_{\text{ср}} = 14$ м/с.

Пример 21. Расстояние от города *А* до города *Б* равно 120 км. На одной четверти дороги идет ремонт, и скорость машин на этом участке вдвое меньше, чем на отремонтированных участках дороги. С какой скоростью едут машины на отремонтированных участках дороги, если путь из города A в город $Б$ занимает 2 часа? Считать, что скорость машин на отремонтированных и неотремонтированных участках дороги постоянна.

Решение. Общее время движения по дороге состоит из времени движения по отремонтированным и не отремонтированным участкам дороги: $t = t_1 + t_2$. Здесь $t_1 = \dfrac{S_1}{v_1} = \dfrac{3S}{4v_1}$, $t_2 = \dfrac{S_2}{v_2} = \dfrac{S}{4v_2}$. Подставляя выражения для t_1 и t_2 в выражение для t и учитывая, что $v_2 = \dfrac{v_1}{2}$, в итоге получаем: $v_1 = \dfrac{5}{4}\dfrac{S}{t} = 75$ км/ч.

Пример 22. Первую часть пути машина проехала со скоростью $2v$, а вторую часть со скоростью $\dfrac{6v}{7}$. В результате всего движения средняя скорость машины оказалась равна v. Во сколько раз вторая часть пути длиннее первой?

Решение. Данная задача иллюстрирует тот факт, что иногда число уравнений может быть меньше количества неизвестных величин.

Пусть S_1 и S_2 — длины первой и второй частей пути, а t_1 и t_2 — времена, затраченные на преодоление этих путей. Они связаны друг с другом соотношениями $t_1 = \dfrac{S_1}{2v}$ и $t_2 = \dfrac{S_2}{\dfrac{6v}{7}}$. Поэтому средняя скорость равна:

$$v = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S_1 + S_2}{\dfrac{S_1}{2v} + \dfrac{S_2}{\dfrac{6v}{7}}}.$$

Отсюда имеем:

$$1 = \frac{1 + \dfrac{S_2}{S_1}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\dfrac{S_2}{S_1}}{\dfrac{6}{7}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} = 3.$$

Пример 23. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $V_1 = 12$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $V_2 = 5$ км/ч, а затем до конца пути шёл пешком со скоростью $V_3 = 3$ км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Решение. Средняя скорость велосипедиста рассчитывается по формуле:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3},$$

здесь $t_1 = \dfrac{S_1}{v_1} = \dfrac{S}{2v_1}$, $t_2 = t_3$ — времена прохождения участков пути. Суммарный путь на втором и третьем участках равен:

$$S_2 + S_3 = S - S_1 = \frac{S}{2}.$$

С другой стороны:

$$S_2 + S_3 = v_2 t_2 + v_3 t_3 = v_2 t_2 + v_3 t_2 = (v_2 + v_3)\, t_2.$$

Сопоставляя выражения для путей, получаем:

$$t_2 = t_3 = \frac{S}{2\,(2v_2 + v_3)}.$$

Подставив выражения для времён в формулу для средней скорости и упрощая вид, получаем конечный ответ:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1\,(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 6 \text{ км/ч}.$$

Пример 24. Скорость автомобиля на первой половине пути равна $v_1 = 20$ м/с, а на второй половине пути — $v_2 = 10$ м/с. Во сколько раз средняя скорость на первых 3/4 пути больше средней скорости на всем пути?

Решение. Найдём среднюю скорость на всём пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{t_1 + t_2}.$$

Здесь $t_1 = \dfrac{S_1}{v_1} = \dfrac{S}{2v_1}$ и $t_2 = \dfrac{S_2}{v_2} = \dfrac{S}{2v_2}$ — время прохождения первой и второй половин пути. Подставляя выражения для t_1 и t_2 в формулу для средней скорости $v_{\text{ср}}$, в итоге получаем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Теперь найдём среднюю скорость на 3/4 всего пути:

$$v_{\text{ср}3/4} = \frac{S_{3/4}}{t_{3/4}} = \frac{\frac{3}{4}S}{t_1+t_3}.$$

Здесь $t_1 = \dfrac{S_1}{v_1} = \dfrac{S}{2v_1}$ и $t_3 = \dfrac{S_3}{v_2} = \dfrac{S}{4v_2}$. Подставляя выражения для t_1 и t_3 в формулу для средней скорости $v_{\text{ср}3/4}$, в итоге получаем:

$$v_{\text{ср}3/4} = \frac{3}{2}\frac{2v_1v_2}{v_1+2v_2}.$$

Тогда отношение средних скоростей на трёх четвёртых и на всём пути равно:

$$\frac{v_{\text{ср}3/4}}{v_{\text{ср}}} = \frac{3}{2}\frac{v_1+v_2}{v_1+2v_2} = \frac{3}{2}\frac{20+10}{20+20} = \frac{9}{8}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 34. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а вторую — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Определить среднюю скорость автомобиля на всем пути.

Задача 35. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Задача 36. Турист часть пути прошёл со скоростью 6 км/ч, затратив на это одну треть времени своего движения. За оставшиеся две трети времени он прошёл остальной путь со скоростью 3 км/ч. Определите среднюю скорость движения туриста.

Задача 37. Первую треть пути велосипедист ехал со скоростью равной 15 км/ч. Средняя скорость велосипедиста равна 20 км/ч. С какой скоростью он ехал оставшуюся часть пути?

Задача 38. Первую треть пути муравей прополз со скоростью 20 см/с, потом одну секунду простоял неподвижно, затем двигался со скоростью 30 см/с. Средняя скорость движения за всё время пути оказалась равна 20 см/с. Найти время путешествия муравья. (МОШ, 7 класс, заочный тур, 2016/17)

Задача 39. Автомобиль, ехавший всё время в одном направлении, двигался первую треть времени с постоянной скоростью 60 км/ч, за вторую треть времени он проехал 35 км, а последний участок пути проехал с постоянной скоростью 80 км/ч. Скорость автомобиля на втором участке пути равнялась средней скорости за весь путь. Найдите: 1) скорость автомобиля на втором участке; 2) полный путь, пройденный автомобилем; 3) время, затраченное на дорогу. (Курчатов, 7 класс, заключительный тур, 2016/17)

Задача 40. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $V_1 = 10$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $V_2 = 8$ км/ч, а затем до конца пути шёл пешком со скоростью $V_3 = 4$ км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Задача 41. Автомобиль на пути из Москвы до Ярославля двигался с переменной скоростью: сначала половину от всего времени движения его скорость составляла 100 км/ч, потом на половине оставшегося пути — 75 км/ч, а на остатке пути — 50 км/ч. Найдите модуль средней скорости автомобиля на всём пути. (ВОШ, 9 класс, ШЭ, 2018/19)

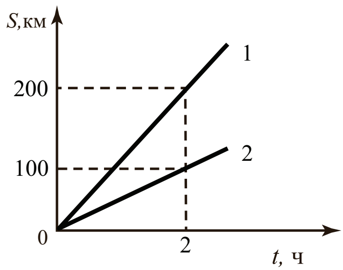
Задача 42. Расстояние S от пункта A до пункта B равно 45 км. Первую часть пути автомобиль ехал со скоростью в два раза меньше средней, а вторую часть пути — со скоростью в два раза больше средней. Найдите длину первой части пути.

Задача 43. Турист первую треть всего времени движения шел по грунтовой дороге со скоростью $v_1 = 2$ км/ч, затем треть всего пути перемещался по шоссе со скоростью v_2. В конце второго участка пути он встретил грузовик, на котором и вернулся в исходную точку по той же дороге. Известно, что на грузовике он ехал с постоянной скоростью v_3. Вычислите среднюю скорость туриста. Укажите минимальное возможное значение скорости v_2.

Графики в задачах на механическое движение тел

Встречаются задачи, в которых присутствуют графики, отражающие зависимости физических величин. В частности, в механике попадаются графические зависимости скорости, пути или координаты от времени для одного или нескольких тел. Рассмотрим некоторые задачи с графической составляющей.

Пример 25. На рисунке представлены графики зависимости пути от времени для двух автомобилей. Сколько времени потребуется первому автомобилю, чтобы догнать второй автомобиль, если они выехали одновременно в одном направлении, а первоначальное расстояние между ними было равно $L = 40$ км?



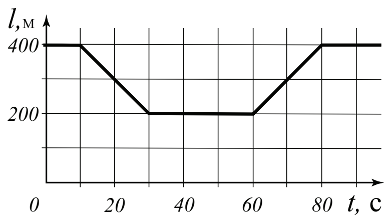
Решение. Из графика зависимости пути от времени определим скорости автомобилей:

$$v_1 = \frac{S_1}{t} = \frac{220}{2} = 110 \text{ км/ч}, \qquad v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{100}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

Время, через которое первый автомобиль догонит второй, равно:

$$t = \frac{L}{v_1 - v_2} = \frac{40}{110 - 50} = \frac{2}{3} \text{ ч}.$$

Пример 26. На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью v_1 всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью v_2. На рисунке изображен график зависимости расстояния l между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени t. Найдите скорости v_1 и v_2, а также длину моста.



Решение. Из графика следует, что расстояние между автомобилями на шоссе $l_1 = 400$ м, а на мосту — $l_2 = 200$ м. Первый автомобиль въезжает на мост в момент времени $t_1 = 10$ с, второй — в момент времени $t_2 = 30$ с. Когда первый автомобиль въезжает на мост, второй находится от моста на расстоянии $l_1 = 400$ м. Получается, что второй автомобиль движется до моста со скоростью:

$$v_1 = \frac{l_1}{t_2 - t_1} = \frac{400}{20} = 20 \text{ м/с}.$$

Аналогично, за время от t_1 до t_2 первый автомобиль проезжает по мосту расстояние $l_2 = 200$ м, следовательно, скорость автомобиля по мосту равна:

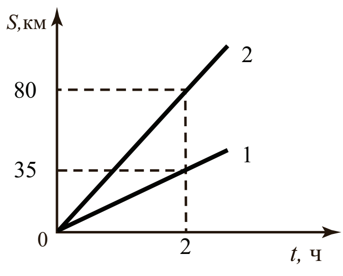
$$v_2 = \frac{l_2}{t_2 - t_1} = \frac{200}{20} = 10 \text{ м/с}.$$

Первый автомобиль съезжает с моста в момент времени $t_3 = 30$ с. Получается, длина моста равна:

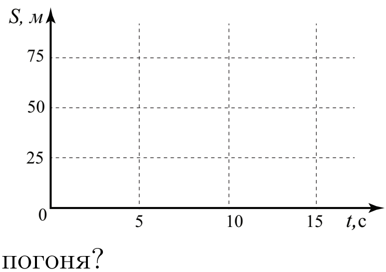
$$L = v_2\,(t_3 - t_1) = 10(60 - 10) = 500 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

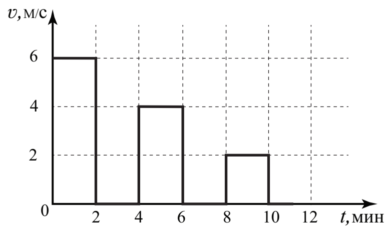
Задача 44. На рисунке представлены графики зависимости пути от времени для двух автомобилей. Сколько времени потребуется второму автомобилю, чтобы догнать первый автомобиль, если они выехали одновременно в одном направлении, а первоначальное расстояние между ними было равно $l = 90$ км?



Задача 45. Гном Гимли, подкравшись со спины к эльфу Леголасу, хлопнул его по плечу и бросился бежать со скоростью 5 м/с. Леголас выждал 5 секунд и побежал за ним со скоростью 7,5 м/с. Постройте графики зависимости пути Гимли и Леголаса от времени. Сколько продлится погоня?



Задача 46. В начале улицы длиной 5 км Петя посадил Васю на троллейбус и как только тот тронулся, побежал за ним с постоянной скоростью. На первой остановке Петя догнал троллейбус на время τ раньше его отправления, и не снижая скорости побежал дальше. На вторую остановку троллейбус пришёл на время τ раньше Пети. За какое время Петя пробежит всю улицу?



Масса, объём, плотность

Размеры, площади и объёмы тел

Тела, встречающиеся в природе, имеют различные размеры и форму, площадь поверхности и объём. Для некоторых тел, которые будут встречаться в задачах по физике, мы можем рассчитывать площади их поверхностей и объёмы по формулам, известным из курса математики и приведённым в таблицах 4 и 5.

Название фигуры	Обозначения	Формула периметра	Формула площади
Квадрат	a — сторона	$P = 4a$	$S = a^2$
Прямоугольник	a, b — стороны	$P = 2(a + b)$	$S = ab$
Круг	R — радиус, $\pi \approx 3{,}14$	$P = 2\pi R$	$S = \pi R^2$
Треугольник	a, b, c — стороны	$P = a + b + c$	$P = \frac{1}{2} h_a a$

Таблица 4: Плоские фигуры.

Название фигуры	Обозначения	Формула площади поверхности	Формула объёма
Куб	a — ребро	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Прямоугольный параллелепипед	a, b, c — ребра	$S = 2(ab + bc + ac)$	$V = abc$
Цилиндр	h — высота, R — радиус основания	$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$	$V = \pi R^2 h$
Шар	R — радиус шара	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Таблица 5: Объёмные фигуры.

Разберём несколько примеров задач на эту тему.

Пример 27. На поверхности воды разлилась нефть объемом $V = 10$ м^3. Какую площадь займет нефтяное пятно, если толщина слоя нефти $h = 2 \cdot 10^{-5}$ мм?

Решение. Нефтяное пятно представляет собой объёмную фигуру с площадью основания S и высотой h — толщиной слоя нефти. Её объем равен произведению площади основания на высоту: $V = Sh$. Отсюда площадь пятна: $S = \dfrac{V}{h}$. Для получения числового ответа выразим толщину слоя в системе СИ: $h = 2 \cdot 10^{-5}$ мм $= 2 \cdot 10^{-8}$ м. Тогда площадь пятна:

$$S = \frac{V}{h} = \frac{10}{2 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^8 \text{ м}^2.$$

Пример 28. При производстве брусчатки для мощения улиц в Древнем Египте использовались каменные блоки размером $1 \times 2 \times 1$ м, из которых каменотёсы делали брусчатку размером $10 \times 10 \times 20$ см. Какую максимальную площадь удавалось египтянам замостить в день из $N = 40$ блоков, если $\alpha = 20\%$ кирпичей крошились при распилке и не использовались? Ответ дать в квадратных метрах, округлив до целых. Толщина каменного тротуара 10 см. (Физтех-лицей, 7 класс, 2014/15)

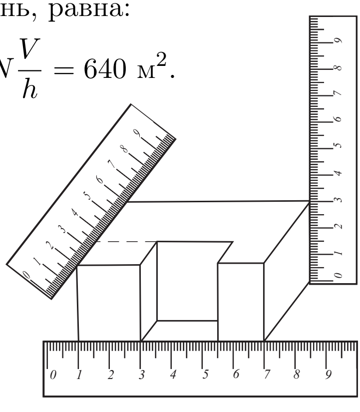
Решение. Количество брусчатки, которую каменотёсы производили в день, равно:

$$N_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{100\%}\right) N \frac{V}{V_1},$$

здесь V — объём каменного блока, а V_1 — объём брусчатки. Тогда площадь, которую могут замостить за день, равна:

$$S = \frac{N_2 V_1}{h} = \left(1 - \frac{\alpha}{100\%}\right) N \frac{V}{h} = 640 \text{ м}^2.$$

Пример 29. Определите площадь поверхности тела, изображённого на рисунке. (Всероссийсий этап, 7 класс, ШЭ, 2012/13)



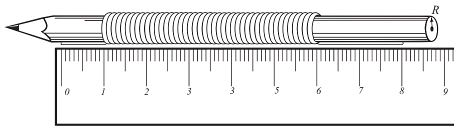
Решение. Сначала вычислим площадь поверхности детали при условии, если бы в ней не было выреза:

$$S = 2\left(S_1 + S_2 + S_3\right) = 2(3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6) = 108 \text{ см}^2.$$

Выемка вырезает из найденной площади два прямоугольника площадью $S_4 = 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 3{,}75$ см^2 и добавляет два прямоугольника площадью $S_5 = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ см^2. В итоге, искомая площадь:

$$S_n = 2\,(S_1 + S_2 + S_3 - S_4 + S_5) = 109{,}5 \text{ см}^2.$$

Пример 30. На карандаш радиусом $R = 4$ мм плотно намотано $N = 50$ витков медной проволоки круглого сечения. При этом с двух сторон остались небольшие прямые отрезки проволоки. Каков объём этого куска проволоки?

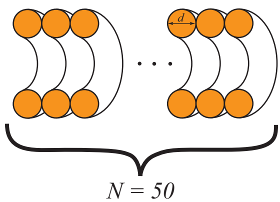


Решение. В задаче просят найти объём проволоки, который равен произведению площади поперечного сечения проволоки на её длину: $V = Sl$. Здесь проволоку можно представить в виде цилиндра с площадью основания S и высотой l. Длину проволоки можно разделить на 3 части: $l = l_1 + l_2 + l_3$, причем согласно рисунку $l_1 = 1$ см, $l_3 = 2$ см, $L = 5$ см. Необходимо найти длину l_2. Участок состоит из N витков, длина каждого витка равна длине окружности, тогда

$$l_2 = N \cdot 2\pi R; \qquad l = l_1 + 2\pi N R + l_3.$$

Площадь сечения проволоки равна площади круга, поскольку проволока в поперечном сечении имеет круглую форму:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$



Ширина одного витка проволоки d, а длина части карандаша, которую занимают витки $L = 5$ см, тогда справедливо равенство:

$$L = dN \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{N} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{50} = 10^{-3} \text{ м}.$$

Окончательно

$$V = \frac{\pi d^2}{4}\left(l_1 + 2\pi NR + l_3\right) =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot (10^{-3})^2}{4}\left(3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\right) \approx 1{,}01 \text{ см}^3.$$

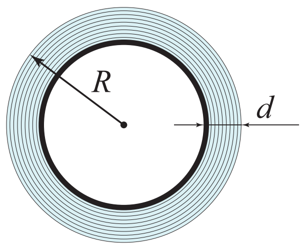
Задачи для самостоятельного решения

Задача 47. Цилиндрический сосуд имеет объем $V = 9{\cdot}10^3$ см^3. Высота сосуда $H = 0{,}45$ м. Определите площадь основания сосуда.

Задача 48. Оцените максимальную длину следа, который твёрдый «простой» карандаш может оставить на бумаге, если известно, что грифель является цилиндром радиусом 1 мм и высотой 20 см, а толщина следа постоянна и равна 6 нм. (Шаг в будущее, 8 класс, заключительный этап, 2016/17).

Задача 49. Папе Карло нравилось строгать Буратин, и он решил перейти к их мелкосерийному производству. Для изготовления Буратино ему требуется одна заготовка из сосны (для туловища) с размерами $40{\times}40{\times}100$ см и один кубик из дуба (для головы) со стороной $a = 3$ см. В день на склад к папе Карло привозят $V = 10$ м^3 сосны и $V_0 = 0{,}02$ м^3 дуба. В опилки уходит не менее 10% исходной древесины. Какое максимальное количество Буратин в день может изготавливать папа Карло? Ответ округлить до целых. (Физтех-лицей, 7 класс, 2014/15).

Задача 50. Внешний радиус рулона клейкой ленты равен $R = 60$ мм, а толщина рулона $d = 19$ мм. Длина ленты в рулоне $L = 150$ м. Пользуясь этими данными, как можно точнее определите: 1) количество слоёв в рулоне; 2) толщину одного слоя.

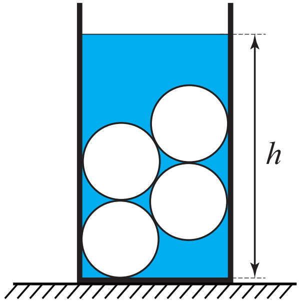


Примечание: длина l окружности находится по формуле $l = 2\pi r$, где r — радиус окружности, $\pi \approx 3{,}14$. (Курчатов, 7 класс, заключительный тур, 2015/16)

Задача 51. В цилиндрическом стакане находилось четыре шарика. Экспериментатор аккуратно с помощью шприца добавлял в стакан жидкость и заносил в таблицу значения высоты уровня жидкости в стакане в зависимости от объёма добавленной жидкости.

V, см^3	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
h, см	0	1,2	2,7	4,1	5,3	7,0	9,0	10,5	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0

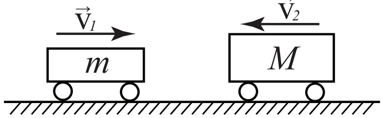
Известно, что в процессе эксперимента шарики не всплывали. По результатам измерений определите площадь сечения стакана и объём одного шарика. (Максвелл, 7 класс, РЭ, 2015/16).



Масса

Все мы в повседневной жизни не раз сталкивались с понятием масса. При покупках в магазине, грузоподъёмности в лифте и во многих других ситуациях. Если говорить по-простому, то масса — это некоторая характеристика тела, которая показывает, насколько оно тяжёлое. Притом чем больше масса тела, тем больше сила тяжести, которая действует на тело за счёт его притяжения к Земле. Эту силу называют ещё *силой гравитационного притяжения*. Поэтому говорят, что *масса* является характеристикой гравитационного взаимодействия тел. В нашем случае — гравитационного взаимодействия тел с Землёй. Обычно массу измеряют с помощью весов. Наверняка вам знакомы напольные и ручные пружинные весы, возможно, вы также встречали рычажные и другие типы весов.

Помимо гравитационного взаимодействия масса характеризует меру инертности тел. *Инертность* — это свойство тела, состоящее в том, что для изменения скорости тела при воздействии на него другого тела требуется некоторый промежуток времени, то есть это изменение не может произойти мгновенно. Если некоторое тело при взаимодействии с другим телом меньше изменяет свою скорость, чем другое, то говорят, что оно более инертно.



Примером, иллюстрирующим связь массы и инертных свойств тел, может послужить опыт с двумя тележками, которые едут навстречу друг другу и упруго сталкиваются. Более тяжёлая тележка меньше изменит свою скорость, чем более лёгкая, хотя они действуют друг на друга с одинаковыми силами.

Таким образом, *масса* — количественная мера инертности тел. Обозначается масса, как правило, буквой m или M. За единицу массы в СИ принят 1 кг: $[m] = [\text{кг}]$. Часто используемыми производными единицами измерения массы являются:

один грамм ($1\ \text{г} = 0{,}001\ \text{кг} = 10^{-3}\ \text{кг}$);

один миллиграмм ($1\ \text{мг} = 0{,}000001\ \text{кг} = 10^{-6}\ \text{кг}$);

один центнер ($1\ \text{ц} = 100\ \text{кг} = 10^{2}\ \text{кг}$);

одна тонна ($1\ \text{т} = 1000\ \text{кг} = 10^{3}\ \text{кг}$).

Не следует путать понятия масса и вес тела. Вес — это сила, и измеряется он в ньютонах. С понятием силы вы познакомитесь чуть позже.

Важным свойством массы является ее *аддитивность* (от английского *to add* — добавлять): масса системы тел равна сумме масс всех тел, входящих в эту систему. С помощью обозначений для массы тел это правило кратко можно записать следующим образом:

$$m = m_1 + \ldots + m_n,$$

где n — количество тел в системе, m — их суммарная масса, а m_1, m_2 и т. д. — массы тел системы. При этом выполняется закон сохранения массы: если тела системы не взаимодействуют с телами, не входящими в эту систему, то масса данной системы остается неизменной. Отметим, что такие системы называют *замкнутыми*.

Пример 31. В корзине находится пять разноцветных шаров. Определите массу белого шара, если известно, что масса корзины с шарами $M = 10$ кг, а масса пустой корзины $m_\text{к} = 800$ г. Массы шаров одинаковы.

Решение. В данных условиях задачи система, состоящая из корзины и шаров, замкнутая. Пусть масса каждого шара равна m. Тогда в силу аддитивности массы: $M = n \cdot m + m_\text{к}$, здесь $n = 5$ — количество шаров в корзине. Выразим из уравнения и вычислим в граммах массу шара:

$$m = \frac{M - m_к}{n} = 1840 \text{ г.}$$

Пример 32. Вася нашел дома весы и решил поэкспериментировать. Он выяснил, что один баклажан и один кабачок весят столько же, сколько три картофелины и одна морковка, а два баклажана столько же, сколько четыре морковки и один кабачок. Оказалось также, что пять морковок весят больше, чем кабачок и две картофелины, но меньше, чем два кабачка и одна картофелина. Сколько, по меньшей мере, ему надо взять баклажанов, чтобы перевесить картофелину, кабачок и две морковки? (Курчатов, 7 класс, 2018/19)

Решение. Обозначим массы баклажана, кабачка, картошки и моркови за $m_б$, $m_{кб}$, $m_{кр}$, $m_м$ соответственно и составим систему уравнений согласно условию задачи:

$$\begin{cases} m_б + m_{кб} = 3m_{кр} + m_м \\ 2m_б = 4m_м + m_{кб} \\ m_{кб} + 2m_{кр} < 2m_{кб} + m_{кр} \\ nm_б > m_{кр} + m_{кб} + 2m_м \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{4\,(3{,}5m_{кб} - m_{кр})}{5\,(2{,}4m_{кб} - m_{кр})} > \frac{10}{7}.$$

Решая полученную систему, приходим к неравенству относительно n, из которого следует, что минимальное целое $n = 2$.

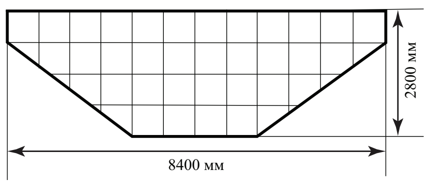
Пример 33. Высота Эйфелевой башни составляет 325 м, а масса равна 10 000 тонн. Чему будет равна масса статуэтки в виде Эйфелевой башни, если она является её точной копией, уменьшенной в 1000 раз?

Решение. Если линейные размеры статуэтки в $k = 10^3$ раз меньше оригинала (0,325 м), то ее объем будет меньше уже в $k^3 = 10^9$ раз. Поскольку масса пропорциональна объему, то масса статуэтки будет в 10^9 раз меньше массы оригинала, которая равна 10^4 тонн $= 10^7$ кг $= 10^{10}$ г. Следовательно, масса статуэтки равна 10 грамм.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 52. В мастерскую закупили много одинаковых комплектов инструментов. Каждый комплект состоит из отвертки, гаечного ключа и плоскогубцев. Все инструменты свалили в ящик и поручили одному из работников их взвесить. Он брал, не глядя, каждый раз по три предмета, клал на весы и записывал их показания. Оказалось, что весы всё время показывали какое-то одно из следующих значений: 600 г, 670 г, 740 г, или 810 г, а вся масса приборов в сумме составила 13,4 кг. Сколько в ящике было плоскогубцев, если известно, что их масса больше, чем у отвертки, а масса гаечного ключа такая же, как у отвертки? (МОШ, 7 класс, заочный тур, 2018/19)

Задача 53. Вася и его младший брат Петя весят столько же, сколько весят 5 ящиков. Петя весит столько же, сколько весят 4 кошки. А 2 кошки и Петя вместе весят столько же, сколько весят 3 ящика. Сколько кошек уравновесят Васю? (Росатом, 7 класс, отборочный тур, 2018/19)



Задача 54. На рисунке схематично изображён профиль кузова хоппера — железнодорожного вагона, служащего для перевозки сыпучих грузов. Длина и высота вагона обозначены на рисунке, а ширина везде одинакова и равна 3 м. В такой вагон засыпали 28 тонн зерна. Найдите высоту уровня зерна в вагоне. Сколько ещё тонн зерна поместится в вагон, если во время движения вагон должен быть закрыт сверху? Один кубический метр зерна, засыпанного в вагон, имеет массу 800 кг. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2015/16)

Плотность

Из многочисленных экспериментов известно, что все тела состоят из частиц. В твёрдых телах и жидкостях частицы расположены близко друг к другу, в газах — далеко. Поэтому газы можно легко сжать в несколько раз, а жидкости и твердые тела — нет. Попробуйте провести следующий опыт: возьмите шприц и, набрав в него воду, надавите на него, закрыв выходное отверстие пальцем. Сжимается ли вода? А теперь повторите то же самое, но без воды, просто набрав в шприц воздух. Что вы увидели?

Если частицы, из которых состоит тело, равномерно распределены по всему объему тела, то такое тело называется *однородным.* Если говорить более точно, то *однородным* является тело, физические свойства которого одинаковы по всему его объему. *Плотность* однородного тела определяется как отношение массы тела m к его объему V:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

В СИ плотность измеряют в килограммах на кубический метр: кг/м^3. Иногда удобнее использовать другие единицы измерения плотности, например г/см^3. Полезно запомнить, что 1г/см^3 = 1000 кг/м^3.

Твёрдые тела			
Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3, г/см^3	Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3, г/см^3
Алюминий	2,7	Олово	7,3
Дуб	0,8	Платина	21,5
Золото	19,3	Свинец	11,3
Лёд	0,9	Серебро	10,5
Латунь	8,5	Сосна	0,4
Медь	8,9	Сталь	7,8
Мрамор	2,7	Стекло	2,5

Жидкости	
Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3, г/см^3
Бензин	0,7
Вода	1
Керосин	0,8
Масло	0,9
Нефть	0,8
Ртуть	13,6
Спирт	0,8

Таблица 6: Плотности некоторых жидких и твёрдых тел

Необходимые нам в дальнейшем плотности некоторых твердых тел и жидкостей приведены в таблице 6. Более полный список вы можете найти в школьном задачнике или физическом справочнике.

Решим несколько задач на применение формулы для плотности.

Пример 34. Найдите массу алюминиевого кубика со стороной $a = 6$ см.

Решение. Из формулы для плотности тела следует, что масса равна: $m = \rho V$, где $V = a^3$ — объём кубика. В итоге масса кубика равна:

$$m = \rho a^3 = 2{,}7 \cdot 6^3 = 583{,}2 \text{ г}.$$

Пример 35. Сплошной стеклянный куб имеет массу $m = 754{,}6$ г. Определите плотность стекла, если площадь всей поверхности куба $S = 294$ см^2. Ответ выразить в СИ.

Решение. Куб имеет шесть граней, поэтому площадь одной грани куба будет равна $S_a = \dfrac{S}{6} = 49$ см^2. Площадь грани куба равна квадрату длины ребра куба a, поэтому длина ребра куба будет равна $a = 7$ см. Объем куба равен произведению его трех ребер, т. е. $V = a^3 = 343$ см^3. Так как по условию задачи куб сплошной, то его можно считать однородным телом. Тогда плотность стекла будет равна:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{754{,}6}{343} = 2{,}2 \text{ г/см}^3 = 2200 \text{ кг/м}^3.$$

Если физические свойства тела не одинаковы по всему его объему, то такое тело называют *неоднородным*. Средняя плотность неоднородного тела определяется соотношением:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_{\text{общ}}}{V_{\text{общ}}},$$

где $m_{\text{общ}}$ — общая (суммарная) масса тела, $V_{\text{общ}}$ — его полный (общий) объём.

Если известны массы $m_1, m_2, m_3, \ldots$ отдельных частей тела, имеющих соответственно объемы V_1, V_2, V_3, …, то среднюю плотность неоднородного тела можно рассчитать по формуле:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots}.$$

Пример 36. Какова плотность сплава, изготовленного из $V_1 = 3$ см^3 олова и $V_2 = 8$ см^3 свинца? Плотность олова $\rho_1 = 7{,}3$ г/см^3, свинца $\rho_2 = 11{,}3$ г/см^3.

Решение. Это пример задачи на определение средней плотности тела. Несмотря на то, что сплав из свинца и олова, по сути, является однородным телом, формально мы можем считать, что имеем дело с двумя частями одного тела с известными объемами и плотностями. Используя формулу для средней плотности, получаем в нашем случае выражение:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{7{,}3 \cdot 3 + 11{,}3 \cdot 8}{3 + 8} = 10{,}2 \text{ г/см}^3.$$

Пример 37. Тело имеет массу $m = 2$ кг и объем $V = 0{,}3$ дм^3. Две трети объема тела заполнено веществом с плотностью $\rho_1 = 9$ г/см^3. Какова плотность ρ_2 вещества, заполняющего остальной объем этого тела?

Решение. Обозначим через V_1 объем, занимаемый веществом с плотностью ρ_1, а через V_2 — веществом с плотностью ρ_2. Тогда, согласно условию:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \frac{2V}{3}, \qquad m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \frac{V}{3}.$$

Масса тела является суммой масс составляющих его частей по свойству аддитивности: $m = m_1 + m_2$. Подставляя выражения для масс и выражая плотность ρ_2, в итоге получаем:

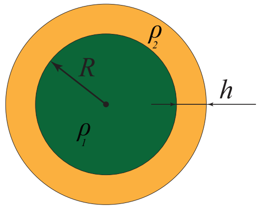
$$\rho_2 = 3\frac{m}{V} - 2\rho_1 = 3\frac{2}{3 \cdot 10^{-4}} - 2 \cdot 9000 = 2000 \text{ кг/м}^3 = 2 \text{ г/см}^3.$$

Пример 38. В произведении А.С. Пушкина «Сказка о царе Салтане» встречаются строчки:

«А орешки не простые —
Все скорлупки золотые,
Ядра — чистый изумруд…»

Допустим, что ядро каждого орешка представляет собой шарик радиусом $R = 1$ см, а толщина его скорлупки $h = 1$ мм. Плотность золота $\rho_2 = 19300$ кг/м^3, масса орешка 38 г. Пользуясь этими данными, определите, чему равна плотность изумруда ρ_1.

Решение. Изобразим схематично орешек на рисунке. Из формулы для плотности следует, что: $m = \rho V$. Масса тела является суммой масс составляющих его частей по свойству аддитивности: $m = m_1 + m_2$. Из этих двух выражений получаем: $m = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$. Выразим плотность изумруда:



$$\rho_1 = \frac{m - \rho_2 V_2}{V_1}.$$

Ядро представляет собой шар. Объём шара равен произведению $\frac{4}{3}\pi$ на радиус в кубе:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189 \text{ см}^3.$$

Объем скорлупки вычисляется по следующей формуле:

$$V_2 = V - V_1 = \frac{4}{3}\pi\,(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 1{,}386 \text{ см}^3.$$

Подставив значения для V_1 и V_2, получаем:

$$\rho_1 = \frac{38 - 19{,}3 \cdot 1{,}386}{4{,}189} \approx 2{,}69 \text{ г}/\text{см}^3.$$

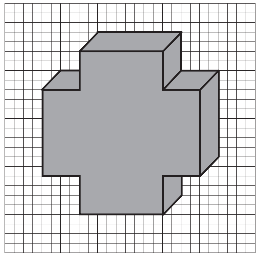
Задачи для самостоятельного решения

Задача 55. Определите плотность серной кислоты, если бидон емкостью 30 л вмещает 54 кг серной кислоты.

Задача 56. Найдите массу медного кубика со стороной $a = 10$ см.

Задача 57. На прокатном стане прокатывают стальные листы размером 6 м $\times$ 15 м. Масса каждого листа 355,5 кг. Какова толщина одного стального листа?

Задача 58. Железный кубик с ребром $a = 8$ см снаружи покрыли тонким слоем олова массой $m = 650$ мг. Какова толщина слоя олова? Ответ выразите в миллиметрах.



Задача 59. Определите массу металлической пластинки, изображённой на рисунке. Толщина пластинки 10 мм, плотность 5 г/см^3. Сторона ячейки квадратной сетки равна 2,0 мм. Ответ выразить в граммах. Округлить до целых. (Физтех, 7 класс, онлайн-этап, 2014/15)

Задача 60. Рубик поставил кубик с длиной стороны 20 см перед собой и последовательно начал отрезать слои толщиной 5 см — сначала сверху, затем справа, слева, перед собой, у дальней грани и снизу. Найдите суммарную массу четырех самых больших отрезанных частей. Плотность кубика 0,9 г/см^3. (МОШ, 7 класс, заочный тур, 2018/19)

Задача 61. Вася взвесил на очень точных электронных весах (которые «чувствуют» изменение массы 0,01 г) два чистых белых листа бумаги формата А4 (плотность бумаги 80 г/м^2, размеры листа 297 мм $\times$ 210 мм). Массы листов были совершенно одинаковыми. На одном из листов на двух его сторонах Вася напечатал на принтере текст, в котором было 6500 символов. После взвешивания листа с текстом оказалось, что его масса увеличилась на 1,6%. Сколько в среднем весит один символ? (МОШ, 7 класс, первый тур, 2015/16)

Задача 62. Два тела сделаны из одного и того же материала. При этом масса первого тела на $m = 1$ кг больше массы второго тела, а объем второго тела в 3 раза меньше объема первого тела. Чему равна масса второго тела?

Задача 63. Определите массу изделия объемом $V = 300$ см^3, если известно, что три четверти объема изделия выполнено из материала плотностью $\rho_1 = 2000$ кг/м^3, а остальная часть — из материала плотностью $\rho_2 = 6000$ кг/м^3.

Задача 64. Сплав изготовили из трех разных кусков трех разных металлов: металла с плотностью ρ объемом V, металла плотностью 3ρ объемом $2V$ и металла плотностью 5ρ объемом $4V$. Найти плотность сплава. Считать, что объем сплава равен сумме объемов его компонент. (Росатом, 7 класс, отборочный тур, 2018/19)

Задача 65. В распоряжении школьника имеется покрашенный краской кубик. Измеряя его массу и объем, школьник нашел, что плотность кубика равна ρ_0 . Потом краска сошла, и школьник увидел, что кубик состоит из трех частей одинакового объема, массы которых относятся как 1:3:6. Найти плотность самой легкой части. Массой и объемом краски пренебречь. (Росатом, 7 класс, заключительный тур, 2018/19)

Задача 66. На альтернативном чемпионате мира по тяжёлой атлетике спортсмены должны поднять одной левой рукой свою будущую награду — это куб из золота с ребром длиной 20 см. Внутри золотого куба есть платиновый куб с ребром длиной 10 см. Сколько литров золота содержится в награде? Сколько килограммов придётся поднять чемпиону для того, чтобы получить награду? (ВОШ, 7 класс, ШЭ, 2014/15)

Задача 67. Куб со стороной $a = 1$ см и плотностью $\rho_1 = 5$ г/см^3 поместили внутрь жидкого пенопласта с плотностью $\rho_2 = \dfrac{\rho_1}{8}$. После застывания пенопласта ему придали форму куба со стороной $2a$. Утонет ли такой куб в воде? Плотность воды равна 1 г/см^3. Плотность пенопласта при застывании не меняется. Примечание: тело тонет в воде, если его плотность больше плотности воды. (Росатом, 7 класс, отборочный тур, 2016/17)

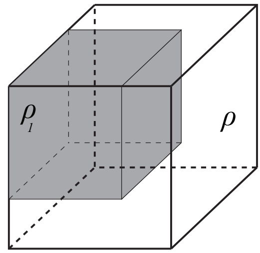
Задача 68. Из двух металлов с плотностями равными $\rho_1 = 4$ г/см^3 и $\rho_2 = 9$ г/см^3 изготовили сплав массой $m = 10$ кг. Плотность этого сплава оказалась равной $\rho = 6$ г/см^3. Определите массу первого металла в сплаве.

Задача 69. Когда смешали один литр жидкости A с одним килограммом жидкости B, получили смесь жидкостей с плотностью равной $\rho = 1000$ кг/м^3. Найдите плотность жидкости B, если плотность жидкости A равна $\rho_A = 800$ кг/м^3. Считайте, что объём смеси жидкостей равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2018/19)

Задача 70. Сплав состоит из 100 г золота и 100 см^3 меди. Определите плотность этого сплава. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2012/13)

Задача 71. Археологи обнаружили топор неандертальца, состоящий из чудом сохранившейся деревянной ручки и каменного тесла. Известно, что древнее дерево имеет плотность $\rho_1 = 600$ кг/м^3 и масса изготовленной из него ручки составляет 1/6 часть от массы всего топора, а объём ручки — половину от объёма всего топора. Найдите плотность ρ_2 камня, из которого изготовлено тесло. (ВОШ, 8 класс, ШЭ, 2016/17)

Задача 72. Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность. Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объема кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика. (Росатом, 7 класс, заключительный тур, 2017/18)



Задача 73. Когда из сосуда объемом $V = 0{,}5$ л вылили воду, в сосуде осталось $V_0 = 0{,}6$ мл воды в виде капелек на стенках. Затем сосуд герметично закрыли и нагрели так, что вся вода испарилась. Найти плотность получившегося газа, если первоначальная плотность воздуха в сосуде равна $\rho_1 = 1{,}17$ кг/м^3, а плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3. (Росатом, 7 класс, отборочный тур, 2017/18)

Задача 74. Кубик с ребром $a = 20$ см сделан из материала с плотностью $\rho = 3000$ кг/м^3. Однако внутри кубика имеется воздушная полость, поэтому его средняя плотность $\rho_0 = 1200$ кг/м^3. Определите объем этой воздушной полости. Массой воздуха внутри полости можно пренебречь. Во сколько раз изменится средняя плотность кубика, если полость целиком заполнить водой?

Задача 75. После добавления сиропа объёмом $V = 1$ л в большую кастрюлю, частично заполненную водой, плотность содержимого кастрюли возросла на $\Delta\rho = 20$ кг/м^3, а объём того, что содержится в кастрюле, увеличился на четверть. Чему равна плотность сиропа? Какой объём сиропа надо дополнительно добавить к полученной смеси, чтобы увеличить её плотность ещё на $\Delta\rho$? Считайте, что сироп хорошо растворяется в воде и что объём смеси равен сумме объёмов исходных жидкостей. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. (ВОШ, 7 класс, МЭ, 2016/17)

Задача 76. Перловую крупу массой $m = 1$ кг залили водой массой $M = 3$ кг и сварили. Известно, что плотность сухой перловки равна

$\rho = 1400$ кг/м^3, варёной — $\rho_1 = 1200$ кг/м^3, воды — $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Считая, что объём варёного зерна равен сумме объёмов сухого зерна и впитавшейся в него воды, найти массу испарившейся при варке воды. (Росатом, 7 класс, 2016/17)

Задача 77. В пищевой промышленности используется величина, называемая насыпной плотностью продукта, которая показывает, какую массу будет иметь продукт, для хранения которого понадобится 1 кубический метр объёма. Например, насыпная плотность овса 432 кг/м^3, значит, для хранения 432 кг овса понадобится контейнер объёмом 1 м^3. Насыпная плотность груш составляет 480 кг/м^3, а обычная плотность — 900 кг/м^3. Какая часть объёма, используемого для хранения груш, приходится на воздух? Средняя масса одной груши — 120 г. Сколько груш может храниться в прямоугольном ящике, если его размеры 60 см $\times$ 40 см $\times$ 50 см? (Курчатов, 8 класс, 2016/17)

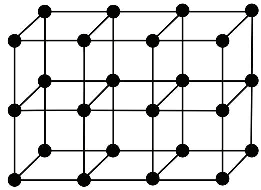
Задача 78. Имеются два одинаковых стакана, в один из которых налито некоторое количество молока, во второй — такое же количество кофе. Одну ложку молока переливают в стакан с кофе, тщательно размешивают и одну ложку смеси переливают обратно в стакан с молоком. Чего в чём больше: молока в том стакане, в котором первоначально был кофе, или кофе в стакане, в котором было молоко? Ответ обосновать. (Росатом, 7 класс, 2011/12)

Задача 79. Сумка, имеющая форму параллелепипеда, сшита из клетчатого материала, причём все стороны сумки выкроены так, что содержат только целое число клеток. Клетки квадратные со стороной $a = 3$ см. Длина L сумки в три раза больше её ширины b, а высота h в два раза больше ширины. Всего на поверхности сумки $N = 792$ клетки. Сумку заполнили поролоном, в результате чего её масса стала равна $M = 8$ кг. Вычислите плотность поролона. Масса пустой сумки $m = 1$ кг. (Максвелл, 7 класс, региональный этап, 2011/12)

Задача 80. Кубики сахара-рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто 500 г, 168 штук». Длина самого длинного ребра коробки равна 98 мм. Вдоль самого короткого ребра коробки укладывается ровно 4 кусочка сахара. Чему равна плотность сахара-рафинада?

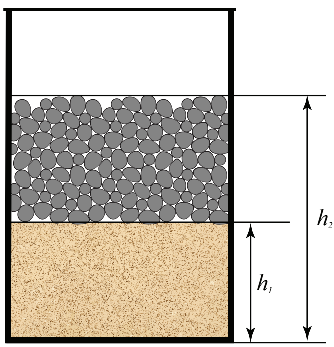
Примечание: «нетто» — это масса продукта без учёта массы упаковки (тары). (Максвелл, 7 класс, региональный этап, 2014/15)

Задача 81. Строение кристалла железа схематически показано на рисунке. Атомы железа находятся в вершинах кубиков и образуют кубическую кристаллическую решётку. Известно, что плотность железа равна $\rho = 7900$ кг/м^3 , а масса одного атома железа $m_0 = 9{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг. Найдите объём V_0 одного кубика — элементарной ячейки данной кристаллической решётки. (МОШ, 7 класс, первый тур, 2007/08)



Задача 82. Для строительства дома требуется смесь песка со щебнем и цемента общей массой 28 тонн, содержащая цемент и песок с щебнем в отношении 1:8 (по объёму). На стройке уже имеется 3 тонны песка со щебнем и 3 тонны цемента, а остальные материалы хранятся на складе недалеко от стройплощадки. 1) Сколько тонн песка со щебнем и сколько тонн цемента требуется для строительства дома? 2) Сколько поездок потребуется совершить, чтобы доставить недостающие строительные материалы, если вместимость кузова электрокара, в котором их будут перевозить, составляет 400 л? Плотность смеси песка со щебнем — 1,6 г/см^3, а цемента — 1,2 г/см^3. За один раз можно перевозить только один вид стройматериалов (иначе они будут смешиваться прямо в кузове в неправильной пропорции). (МОШ, 7 класс, первый тур, 2014/15).

Задача 83. Если сосуд с песком подвергнуть вибрации (потрясти), то можно наблюдать интересное явление — песок становится похож на жидкость. Тела, плотность которых достаточно велика, тонут в этом «жидком песке», а тела с небольшой плотностью (например, деревянные) наоборот всплывают на поверхность, даже если изначально они были на дне сосуда. Так происходит потому, что при встряхивании уменьшаются силы трения между песчинками.



Рассмотрим опыт. На дне цилиндрического сосуда находится песок.

Поверх песка насыпана галька. Сосуд подвергают вибрации, и песок становится «жидким». Галька постепенно опускается на дно сосуда, а песок заполняет все пустоты между её камнями. Чему станет равен уровень содержимого в сосуде после оседания гальки, если изначально уровень песка был равен $h_1 = 0{,}6$ м, а уровень гальки $h_2 = 1$ м? Плотность камней гальки равна $\rho_0 = 2600$ кг/м^3, а её насыпная плотность — $\rho_1 = 1500$ кг/м^3. (МОШ, 7 класс, первый тур, 2018/19)

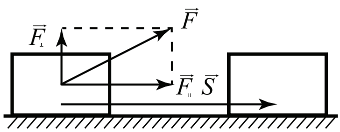
Механическая работа и мощность. Энергия

Механическая работа и мощность

В физике важным понятием является работа. По определению *механической работой* называется скалярная физическая величина, равная произведению силы на перемещение тела:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\alpha.$$

Здесь $\alpha = \left(\vec{F}, \vec{S}\right)$ — угол между векторами силы и перемещения.



Наглядно перемещение тела вдоль горизонтальной поверхности под действием силы, направленной под углом α к горизонту, изображено на рисунке. Если сила направлена вдоль перемещения, то угол между векторами равен либо $\alpha = 0^\circ$ и тогда $\cos 0^\circ = 1$, либо $\alpha = 180^\circ$ и $\cos 180^\circ = -1$. В этом случае формула для работы принимает вид:

$$A = \pm FS.$$

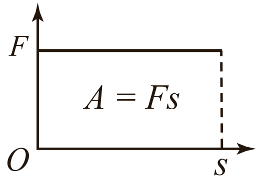
Таким образом, работа является пространственной характеристикой действия силы. В системе СИ работа измеряется в джоулях: [Дж] = [Н · м].

Пример 39. Подъёмный кран равномерно поднимает груз массой 110 кг на высоту 5 м. Определите работу силы натяжения троса и силы тяжести.

Решение. Сила натяжения троса сонаправлена с перемещением груза, а сила тяжести — направлена в противоположную сторону. Так как груз поднимают равномерно, сила натяжения троса равна силе тяжести: $T = mg$. Согласно формуле $A = \pm FS$:

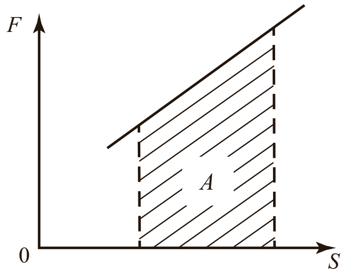
$$A_T = TS = mgS = 5500 \text{ Н},$$

$$A_{mg} = -mgS = -5500 \text{ Н}.$$



Если сила, действующая на тело, постоянна, то график зависимости силы от перемещения $F(S)$ является горизонтальной прямой, а фигура под графиком — прямоугольником. Вспоминая, что площадь прямоугольника равна произведению сторон: $S_{\text{ф}} = FS$, приходим к выводу, что работа численно равна площади фигуры под графиком:

$$A = S_{\text{ф}}.$$



В случае переменной силы эта формула также является верной. Например, в случае линейной зависимости силы от перемещения тела работа численно равна площади трапеции:

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} S.$$

Рассмотрим несколько задач на нахождение работы переменной силы.

Пример 40. Какая минимальная работа A совершается при подъёме на крышу верёвки длиной $l = 40$ м и массой $m = 6$ кг? В начальный момент вся верёвка свешивалась вертикально с края крыши.

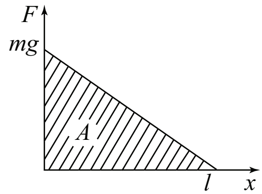
Решение. Решим эту задачу с помощью графика. Если в задаче спрашивают про минимальную работу, значит верёвку поднимают равномерно (нет затрат работы на ускорение тела), а это значит, что прикладываемая сила в каждый момент времени будет равна силе тяжести свисающего конца. По мере поднимания верёвки свисающий конец становится всё короче и зависимость массы от длины свисающего конца имеет вид:

$$m(x) = \frac{m}{l}(l - x).$$

Тогда прикладываемая сила зависит от перемещения каната следующим образом:

$$F(x) = \frac{mg}{l}(l - x).$$

График $F(x)$ представлен на рисунке. Из графика видно, что фигура под графиком — треугольник, соответственно, минимальная работа по поднятию верёвки будет равна площади треугольника:



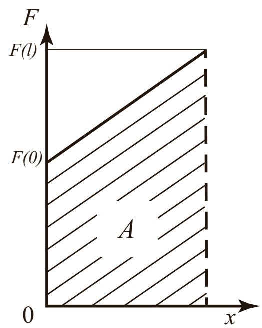
$$A = \frac{1}{2}mgl = 1200 \text{ Дж}.$$

Пример 41. Поперёк дороги лежит однородный канат длиной l и массой m. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы перетащить канат с дороги на траву, если коэффициент трения каната о дорогу μ_1, а о траву — μ_2.

Решение. Так как в задаче спрашивают про минимальную работу, значит, канат тянут равномерно, и прикладываемая сила в каждый момент времени равна сумме сил трения каната о дорогу и траву:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = \mu_1 mg\frac{(l-x)}{l} + \mu_2 mg\frac{x}{l} = \mu_1 mg + (\mu_2 - \mu_1)\, mg\frac{x}{l}.$$

Из уравнения видно, что график $F(x)$ представляет собой прямую с границами в точках $F(0) = \mu_1 mg$ и $F(l) = +\mu_2 mg$. Таким образом, работа равна площади трапеции:



$$A = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mg}{2}l.$$

Пример 42. В озере у поверхности находится полностью погруженный в воду алюминиевый куб с ребром $a = 10$ см. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы полностью вытащить его из воды? Верхняя грань куба параллельна плоскости воды.

Решение. Так как в задаче спрашивают про минимальную работу, значит, куб поднимают равномерно, прикладывая переменную силу

$$F(x) = mg - F_A(x).$$

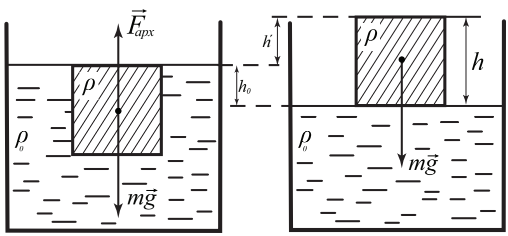
Здесь $m = \rho a^3$, $F_A(x) = \rho_0 g a^2(a-x)$ — сила Архимеда, действующая на куб по мере его поднимания над водой. В итоге, выражение для силы тяги принимает вид:

$$F(x) = (\rho - \rho_0)\, g a^3 + \rho_0 g a^2 x,$$

что на графике соответствует прямой линии. При полном погружении $F(0) = (\rho - \rho_0)\, g a^3$, а после вытаскивания куба из воды $F(a) = \rho g a^3$. Тогда работа по вытаскиванию куба из воды равна площади трапеции:

$$A = \frac{F(0) + F(a)}{2} a = \frac{2\rho - \rho_0}{2} g a^4 = 2{,}2 \text{ Дж}.$$

Пример 43. В сосуде с водой у поверхности находится алюминиевый цилиндр высотой $h = 10$ см с площадью основания $S = 100$ см^2, полностью погруженный в воду. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вытащить его из воды? Площадь дна сосуда $S_0 = 500$ см^2, стенки сосуда вертикальные, верхняя грань цилиндра параллельна плоскости воды.



Решение. В отличие от предыдущей задачи здесь уровень воды понижается по мере вытаскивания цилиндра, поэтому чтобы полностью вытащить его из воды, нужно поднять его на высоту меньшую, чем $h = 10$ см относительно его начального положения. Найдём эту высоту по формуле $h' = h - h_0$, где h_0 — понижение уровня воды в сосуде. При вытаскивании цилиндра вода, занимающая площадь $S_1 = S - S_0$, займет объём, освободившийся при поднятии цилиндра на высоту h'. Получается, что

$$(S_0 - S) H_0 = S(h - h_0),$$

откуда

$$S_0 h_0 = Sh, \qquad h' = h\left(1 - \frac{S}{S_0}\right).$$

Отметим, что при поднимании цилиндра на малую величину x относительно дна сосуда уровень воды опустится на величину $x_0 = x\dfrac{S}{S_0 - S}$

(докажите это самостоятельно). Тогда, при равномерном поднимании цилиндра сила тяги линейно зависит от x следующим образом:

$$F(x) = mg - \rho_0 g S\left(h - \left(\frac{S_0}{S_0 - S}\right)x\right)$$

и фигура под графиком — трапеция. Учитывая, что

$$F(0) = (\rho - \rho_0)\, Shg, \qquad F(h') = \rho Shg,$$

найдём работу по формуле

$$A = \frac{F(0) + F(h')}{2}h' = \frac{2\rho - \rho_0}{2} gS\left(1 - \frac{S}{S_0}\right)h^2 = 1{,}76 \text{ Дж}.$$

Из сопоставления примеров 4 и 5 видно, что во втором случае минимальная работа меньше, что объясняется меньшим перемещением тела относительно дна.

Мощностью называется скалярная физическая величина, равная отношению работы ко времени, за которое данная работа была совершена:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Таким образом, мощность характеризует быстроту совершения работы.

Пример 44. Поднимаясь равномерно, как всегда, из окна Малыша к себе на крышу, Карлсон в тот день, когда его угостили вареньем, затратил на подъем на 4 с больше, чем обычно. Какова масса съеденного варенья, если мощность «мотора» равна 75 Вт, а высота подъема 10 м? Трением в «моторе» Карлсона и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Когда Карлсон поднимается на пустой желудок, он затрачивает работу

$$A_1 = mgh = Nt_1,$$

а когда поднимается, поев варенье, то

$$A_2 = (m + m_{\text{в}})\, gh = N\left(t_1 + \Delta t\right).$$

Раскрывая скобки и подставляя первое уравнение во второе, получаем, что

$$m_в = \frac{N\Delta t}{gh} = 3 \text{ кг}.$$

Подставляя $A = FS$ в формулу $N = \dfrac{A}{t}$ приходим к выражению для *мгновенной мощности* через силу и скорость тела в данный момент времени:

$$N = Fv.$$

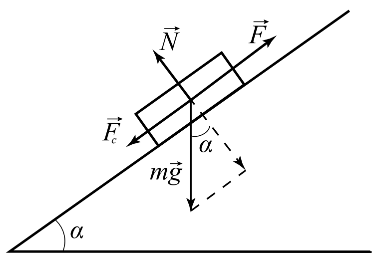
Если сила и скорость тела с течением времени не меняются, то мгновенная мощность равна средней мощности за все время движения.

Пример 45. Мальчик разгоняет санки за веревочку, прикладывая горизонтальную силу $F = 54$ Н. Санки увеличивают свою скорость от $v_1 = 1$ км/ч до $v_2 = 4$ км/ч. Чему равна максимальная мощность, развиваемая мальчиком?

Решение. Согласно формуле $N = Fv$ максимальная мощность будет развита мальчиком при максимальной скорости санок:

$$N = Fv_2 = 54 \cdot \frac{4}{3{,}6} = 60 \text{ Вт}.$$

Пример 46. Машина при движении вверх в горку с постоянным уклоном может развивать максимальную скорость $v_1 = 100$ км/ч, при движении вниз с этой же горки она разгоняется до $v_2 = 200$ км/ч. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости автомобиля, найти, с какой максимальной скоростью машина сможет ехать по горизонтальному участку дороги? Ответ выразить в км/ч, округлив до целых. Трения в осях нет. Мощность машины считать постоянной.



Решение. Изобразим схематично движение машины по горке на рисунке. Здесь расставлены силы, действующие на машину при движении вверх. Вдоль наклонной плоскости (горки) на машину действуют три силы: сила тяги F, сила сопротивления воздуха $F_\text{с}$ и составляющая силы тяжести $F_{mg} = mg\sin\alpha$. Так как скорость машины на каждом участке постоянна, сумма всех сил, действующих вдоль наклонной плоскости вверх равна сумме сил, действующих вдоль неё вниз. В первом случае, при движении машины вверх, сила тяги направлена вверх, а проекция силы тяжести и сила сопротивления — вниз:

$$F_1 = F_{\text{с}1} + F_{mg}.$$

Во втором, при движении машины вниз, сила тяги и проекция силы тяжести направлены вниз, а сила сопротивления — вверх:

$$F_{mg} + F_2 = F_{\text{с}2}.$$

В третьем случае, при движении машины по горизонтальному участку дороги:

$$F_{\text{с}3} = F_3.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для сил тяги $F_i = \dfrac{N}{v_i}$ и сил сопротивления $F_c i = \alpha v_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$, получаем:

$$\frac{N}{v_1} = \alpha v_1^2 + F_{mg}, \quad F_{mg} + \frac{N}{v_2} = \alpha v_2^2, \quad \frac{N}{v_3} = \alpha v_3^2.$$

Решая данную систему уравнений, приходим к итоговому выражению для максимальной скорости на горизонтальном участке:

$$v_3 = \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2\left(v_1^2 + v_2^2\right)}{v_1 + v_2}} \approx 149 \text{ км/ч}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 84. Поплавок, имеющий объём $V = 110$ см^3, всплывает с глубины $h = 1$ м. Определите работу сил тяжести и Архимеда, действующих на поплавок. Плотность поплавка 200 кг/м^3.

Задача 85. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы перетащить доску длиной l с гладкой половины стола на шершавую, на которой на доску действует максимальная сила трения F?

Задача 86. Какую минимальную работу необходимо совершить горизонтальной силой, чтобы перетащить доску длиной L по гладкой поверхности пола через шероховатую область шириной S? Максимальная сила трения, которая действует на доску в процессе движения, равна F. Рассмотрите два случая: 1) $L > S$ и 2) $L < S$.

Задача 87. Канат длиной 5 м и массой 8 кг лежит на земле. Один его конец подняли на высоту, равную двум длинам каната. Какую работу при этом совершили?

Задача 88. Деревянный куб с ребром 0,5 м плавает в озере, на две трети своего объема погруженный в воду. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью погрузить куб в воду?

Задача 89. В сосуде квадратного сечения со стороной 2 м плавает куб с ребром 1 м. Для того, чтобы полностью погрузить его в воду, надо совершить минимальную работу $A = 2000$ Н. Найдите плотность материала куба. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы вытащить куб из воды? Считайте, что верхняя грань куба параллельна плоскости воды.

Задача 90. На катер действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости катера. Во сколько раз нужно увеличить мощность двигателя, чтобы скорость катера возросла в 2 раза?

Задача 91. Игрушечная машинка при движении вверх в горку с постоянным уклоном может развивать максимальную скорость равную $V_1 = 5$ км/ч, при движении вниз с этой же горки она разгоняется до $V_2 = 10$ км/ч. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости игрушки, найдите, с какой максимальной скоростью машинка сможет ехать в горку, если мощность двигателя возрастет в 2 раза? Трения в осях нет.

Задача 92. Жил был человек, у которого были Жигули, на которых ему удавалось разгоняться по ровной дороге только до 200 км/ч. Он решил поставить на них мотор от какой-нибудь иномарки. В ближайшем автосервисе его просьбу удовлетворили и поставили мотор от Запорожца. После этого даже на ровной дороге он не смог выжать больше 100 км/ч. Это не устроило клиента, и он поехал в другой автосервис, в который вела уходящая вверх дорога, на которой ему удалось ехать со скоростью не более 50 км/ч. Оставив машину наверху, хозяин не поставил машину на ручной тормоз и ушел. В результате машина поехала. До какой максимальной скорости смог разогнаться автомобиль с выключенным мотором под горку вниз? Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости автомобиля. Трения в осях нет. Массу машины считать постоянной.

Механическая энергия. КПД

Понятие энергии наряду с импульсом является одним из основополагающих в физике. Законы сохранения импульса и энергии, с которыми вы познакомитесь в будущем, позволяют решить целый комплекс физических задач. По определению, *энергия* — скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и взаимодействия материи. Энергия, как и работа, измеряется в Джоулях. В физике встречаются различные виды энергии: механическая, внутренняя, энергия связи и так далее. В данном разделе мы подробнее остановимся на *механической энергии* тел, которая, в свою очередь, подразделяется на кинетическую и потенциальную.

Кинетической энергией тела называется энергия механического движения, зависящая от массы и скорости тела. Кинетическую энергию в зависимости от вида подразделяют на поступательную и вращательную. В классической механике кинетическая энергия поступательного движения рассчитывается по формуле:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

С кинетической энергией вращательного движения вы познакомитесь позднее.

Работа связана с изменением кинетической энергии тела формулой:

$$A = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Данное выражение является математической записью *теоремы об изменении кинетической энергии тела*, которая гласит: изменение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на тело.

В случае нескольких тел, составляющих систему, формулировка *теоремы* обретает вид: изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы.

Пример 47. Автомобиль, движущийся со скоростью 72 км/ч по мокрому асфальту горизонтальной дороги, резко тормозит и до полной остановки едет юзом (колеса не вращаются). Коэффициент трения между покрышками автомобиля и дорогой равен 0,4. Вычислите тормозной путь автомобиля. Торможение осуществляется одновременно передними и задними колёсами. Автомобиль рассматривать как брусок с равномерно распределённой массой.

Решение. При торможении тела на него действуют три силы: сила тяжести mg и сила реакции опоры N, которые уравновешивают друг друга по вертикали: $N = mg$, и сила трения: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$, направленная по горизонтали противоположно движению тела. С одной стороны, работа силы трения отрицательна и равна:

$$A = -F_{\text{тр}} S = -\mu mgS.$$

С другой, работу силы трения можно выразить через изменение кинетической энергии тела:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2}.$$

Приравнивая эти два выражения, в итоге получаем, что тормозной путь равен:

$$S = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 50 \text{ м}.$$

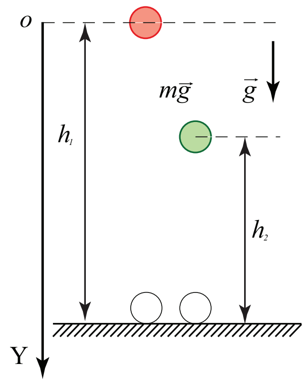
Потенциальной энергией тела при его взаимодействии с Землей называется скалярная физическая величина:

$$\Pi = mgh.$$

Здесь $g = 9{,}8$ м/с$^2 \approx 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения, h — высота тела относительно нулевого уровня потенциальной энергии, который может быть выбран произвольно.

Рассмотрим процесс падения тела на землю под действием силы тяжести с высоты h_1 на высоту h_2. Работа силы тяжести в этом случае равна:

$$A_{mg} = FS = mg\,(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 = \Pi_1 - \Pi_2.$$



Таким образом, работа силы тяжести связана с изменением потенциальной энергии тела формулой:

$$A_{mg} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Работа внешних сил против сил тяжести, напротив, равна:

$$A = \Pi_2 - \Pi_1.$$

Часто при решении задач на работу в случае размерных тел бывает удобно проследить за изменением потенциальной энергии *центра масс* тела: геометрической точки, характеризующей движение тела или системы частиц как целого. В случае системы материальных точек или однородных тел при наличии однородного гравитационного поля центр масс совпадает с центром тяжести.

Решим несколько задач на нахождение работы через изменение потенциальной энергии тела или системы тел.

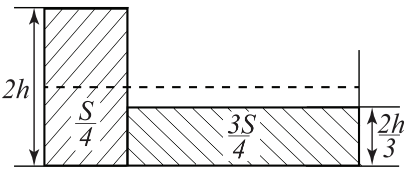
Пример 48. Какая минимальная работа A совершается при подъёме на крышу верёвки длиной $l = 40$ м и массой $m = 6$ кг? В начальный момент вся верёвка свешивалась вертикально с края крыши.

Решение. Центр масс однородной верёвки находится посередине веревки, то есть на расстоянии $\dfrac{l}{2}$ от конца веревки и крыши. При затаскивании всей веревки на крышу, центр масс веревки находится на уровне крыши. Учитывая, что работа по затаскиванию веревки равна изменению потенциальной энергии её центра масс, приходим к ответу:

$$A = \Pi_2 - \Pi_1 = mg\frac{l}{2} - 0 = \frac{1}{2}mgl = 1200 \text{ Дж}.$$

Отметим, что в данной задаче при нахождении работы мы из конечной энергии вычитали начальную, а не наоборот, потому что мы искали работу внешней силы, направленной против силы тяжести.

Пример 49. Бассейн площадью $S = 100$ м^2 разделен пополам подвижной вертикальной перегородкой и заполнен водой до уровня $h = 3$ м. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в отношении 1:3. Какую работу A пришлось совершить? Вода не проникала через перегородку и не переливалась через край бассейна.



Решение. В начале уровень воды в обеих частях бассейна был одинаков, и центр масс системы находился на высоте $\dfrac{h}{2}$. После перемещения перегородки влево уровень воды в левой и правой частях стал равен соответственно

$$h_1 = \frac{\frac{1}{2}S}{\frac{1}{4}S}h = 2h, \qquad h_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{\frac{3}{4}S}h = \frac{2}{3}h.$$

Получаем, что:

$$A = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_0 = \frac{m}{2}g\frac{h_1}{2} + \frac{m}{2}g\frac{h_2}{2} - mg\frac{h}{2} = \frac{mg}{2}\left(\frac{h_1 + h_2 - 2h}{2}\right) = \frac{mgh}{6}.$$

Учитывая, что $m = \rho S h$, в итоге получаем:

$$A = \frac{\rho g S h^2}{6} = 1500 \text{ кДж}.$$

Пример 50. В сосуде с водой у поверхности находится алюминиевый цилиндр высотой $h = 10$ см с площадью основания $S = 100$ см^2, полностью погруженный в воду. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вытащить его из воды? Площадь дна сосуда $S_0 = 500$ см^2, стенки сосуда вертикальные.

Решение. Решим эту задачу, подсчитав работу как изменение потенциальной энергии системы при вытаскивании груза из воды:

$$A = \Pi - \Pi_0 = \Pi_1 + \Pi_2 - (\Pi_{01} + \Pi_{02}) = \Delta\Pi_1 + \Delta\Pi_2.$$

Здесь $\Delta\Pi_1$ и $\Delta\Pi_2$ — изменение потенциальной энергии груза и воды соответственно.

Пусть при вытаскивании груза уровень воды опустился на h_0, тогда груз относительно земли поднялся на величину $x = h - h_0$. Ранее было показано, что $h_0 = h\dfrac{S}{S_0}$, тогда $x = h\dfrac{S - S_0}{S_0}$. Изменение потенциальной энергии груза и воды соответственно равны:

$$\Delta\Pi_1 = mgx = \rho Shgx, \qquad \Delta\Pi_2 = m_{\text{в}}g\left(\frac{x}{2} - \left(x + \frac{h_0}{2}\right)\right) = -\frac{\rho_{\text{в}}gShx}{2}.$$

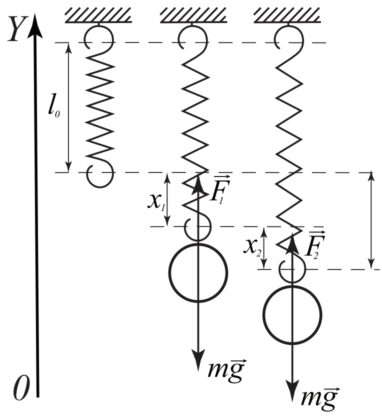
Подставляя данные выражения в формулу для работы, получаем:

$$A = \left(\rho - \frac{\rho_{\text{в}}}{2}\right)Shgx = \frac{2\rho - \rho_{\text{в}}}{2}Sgh^2\frac{S_0 - S}{S_0}.$$

Потенциальной энергией упругой деформации пружины называется величина:

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{kx^2}{2}.$$

Пример 51. Груз, подвешенный на легкой пружине с жесткостью равной $k = 200$ Н/м, растягивает её на $x = 2$ см. Какую работу необходимо совершить вертикальной силе, приложенной к грузу, чтобы деформация пружины стала вдвое больше начальной?



Решение. Найдем работу из уравнения:

$$A = \Pi - \Pi_0,$$

где $\Pi_0 = mg(x_2 - x_1) + \dfrac{kx_1^2}{2} = mgx + \dfrac{kx^2}{2}$ — запас потенциальной энергии вначале, а $\Pi = \dfrac{kx_2^2}{2} = 2kx^2$ — в конце, здесь $x_1 = x$, $x_2 = 2x$. Учитывая, что в положении равновесия $F_y = kx = mg$, в итоге получаем:

$$A = \frac{kx^2}{2} - 0 = \frac{kx^2}{2}.$$

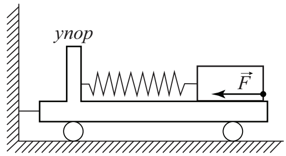
Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий тела:

$$E = K + \Pi.$$

Если на тело не действуют никакие неконсервативные внешние силы, то такая система называется *замкнутой*. Сформулируем *закон сохранения механической энергии (ЗСЭ):* В замкнутой системе полная механическая энергия сохраняется:

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2.$$

Пример 52. Тележка соединена со стеной жестким стержнем. К ее упору прикреплена пружина, другой конец которой связан с бруском. Вначале пружина не деформирована. На брусок в течение некоторого времени действует постоянная горизонтальная сила F, направленная вдоль тележки. После прекращения действия этой силы брусок еще некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая со стороны тележки на брусок, равна f. Трение в осях колес не учитывайте. 1) С какой силой N тележка давила на стержень в момент прекращения действия силы F? 2) Найдите наибольшее значение силы $N_{\max}$ давления тележки на стержень.



Решение. Пусть сила прекратила свое воздействие на расстоянии x_1 от начального положения тела. Тогда сила давления стержня в этот момент равна:

$$N_1 = f + F_{y1} = f + kx_1.$$

После прекращения действия силы F тело еще некоторое время будет двигаться влево по инерции, затем остановится и поедет в обратную сторону. Обозначим расстояние от начального положения до крайнего левого положения тела за x_1 и запишем выражение для работы силы F:

$$A_1 = Fx_1 = \frac{kx_m^2}{2} + f \cdot x_m.$$

Зная, что тело возвращается в исходную точку, запишем закон преобразования энергии для этого случая:

$$\frac{kx_m^2}{2} = f \cdot x_m.$$

С учетом этого условия получаем:

$$Fx_1 = 2f \cdot x_m \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2f}{F} x_m.$$

Из первого уравнения следует, что

$$N_1 = f + \frac{2f}{F} kx_m = f + \frac{4f^2}{F}.$$

Здесь мы учли, что $kx_m = 2f$.

Наибольшее значение силы $N_{\max}$ давления тележки на стержень достигается в момент остановки бруска в крайнем левом положении:

$$N_m = f + F_y = f + kx_m = 3f.$$

Если часть затраченной работы теряется на преодоление сил трения или сопротивления среды, то полезная работа оказывается меньше затраченной, и тогда вводится понятие *коэффициента полезного действия (КПД)*, который обычно обозначается буквой «эта» и равен:

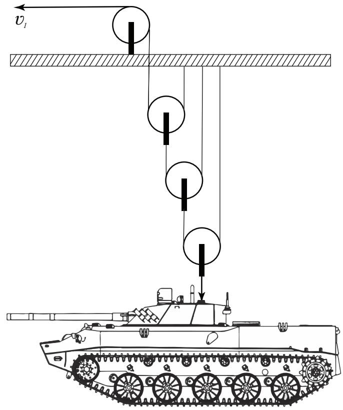
$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} \cdot 100\% = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} \cdot 100\%.$$

Решим несколько задач, в которых КПД меньше 100%.

Пример 53. Боевую десантную машину БМД-4М массой $m = 13{,}6$ т с помощью полиспаста (системы подвижных и неподвижных блоков) равномерно поднимают на платформу. 1) Определите КПД полиспаста, если для подъема машины на высоту $H = 2{,}0$ м требуется совершить работу $A = 340$ кДж. 2) Найдите силу, с которой при этом нужно тянуть за свободный конец троса.

Решение. Полезная работа по поднятию груза равна

$$A_{\text{п}} = mgh.$$



Тогда КПД равен

$$\eta = \frac{mgh_п}{A} \cdot 100\% = 80\%.$$

По золотому правилу механики простые механизмы не могут давать выигрыша в работе, поэтому каждый подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза, и проигрыш в расстоянии тоже в 2 раза. Так как груз поднимается на $h = 2$ м, то веревка вытягивается на $S = 8h$, и сила, с которой тянут за веревку, равна:

$$F = \frac{A}{S} = \frac{A}{8h} = 21.25 \text{ Н}.$$

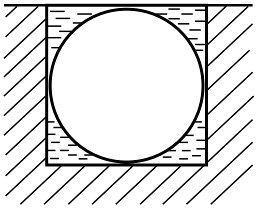
Пример 54. Баба Дуся поднимает из колодца глубиной $h = 10$ м ведро с водой на цепи. Масса пустого ведра без воды равна $m_1 = 0{,}5$ кг, масса цепи длиной h равна $m_2 = 2$ кг, а масса воды, поднимаемой в ведре, равна $M = 8$ кг. Скорость ведра в конце подъёма равна нулю. Снимая ведро с цепи, баба Дуся случайно проливает $k = 20\%$ находящейся в нём воды обратно в колодец. Найдите КПД бабы Дуси в процессе подъёма воды. Цепь однородна. Полезной считается величина, равная изменению потенциальной энергии доставленной наверх воды, которая в итоге осталась в ведре. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 93. Поплавок, имеющий объём $V = 10$ см^3, всплывает с глубины $h = 1$ м. Определите работу сил тяжести и Архимеда, действующих на поплавок. Плотность поплавка 200 кг/м^3.

Задача 94. Поднимая груз при помощи подвижного блока на высоту 2 м, совершают работу 3 кДж. Найти массу груза, если КПД механизма 80%.

Задача 95. Человек прыгает в воду со скалы высотой 10 м. На какую глубину он опустится, если силы сопротивления воды и воздуха считать ничтожно малыми? Масса человека 60 кг, объем 66 л.



Задача 96. В лунке размером $10 \times 10 \times 10$ см^3, целиком заполненной водой, лежит на дне металлический цилиндр. Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см. Высота цилиндра равна его диаметру. Для того чтобы вытащить цилиндр из воды, необходимо совершить работу не меньше величины $A = 185$ Дж. Чему равна плотность ρ материала цилиндра?

Задача 97. Моторная лодка массой 200 кг въезжает из воды на песчаный берег с выключенным двигателем со скоростью 18 км/ч. Какое расстояние проедет лодка, если до момента остановки со стороны песка на неё действует сила сопротивления, равная kS, где k — некоторый коэффициент, а S — расстояние, на которое лодка заехала на берег?

Задача 98. На двух лёгких одинаковых пружинах, соединённых нитью AB, висит груз массы m. Жёсткость каждой пружины равна k. Между витками пружины протянули ещё две нити: одну прикрепили к потолку и к верхнему концу B нижней пружины, а вторую — к грузу и нижнему концу A верхней пружины. Эти две нити не провисают, но и не натянуты. Нить AB перерезали. Через некоторое время система пришла к новому положению равновесия. Найдите изменение потенциальной энергии системы.

Калориметрические задачи с фазовыми переходами

Пример 55. Для обеззараживания продуктов и увеличения их срока хранения применяется пастеризация — процесс нагрева жидкости (например, молока или сока) до высокой температуры (60–98 °C), с последующим охлаждением и консервацией (герметизацией). Оцените, сколько энергии необходимо для доведения до кипения (100 °C) 1 тонны молока? Сколько примерно энергии необходимо для пастеризации (98 °C) 1 тонны молока? Исходно молоко находится при комнатной температуре (20 °C), а его плотность и удельная теплоемкость примерно равны таким же характеристикам у воды.
Указание: можно так построить технологический процесс, что остывающее молоко будет отдавать тепло вновь нагреваемым порциям молока.

Пример 56. Объем воздуха в комнате бани — 60 м^3, удельная теплоемкость воздуха — 1000 Дж/(кг · °C), плотность воздуха — 1,29 кг/м^3. Какое количество теплоты необходимо, чтобы нагреть сухой воздух от 20 до 50 °C? Как изменится ответ для насыщенного влажного воздуха, если при этом еще испарилось 4 кг воды?

Решение. Для сухого воздуха:

$$Q_1 = cm\Delta T = c\rho V\Delta T = 2{,}32 \text{ МДж}.$$

Для насыщенного влажного воздуха дополнительно учтем теплоту испарения:

$$Q_2 = Lm_{\text{в}} = 2{,}3 \text{ МДж/кг} \cdot 4 \text{ кг} = 9{,}2 \text{ МДж}$$

Эта величина в 4 раза больше Q_1. Отметим, что из-за нелинейной зависимости давления насыщенных паров от температуры эта энергия будет меняться с температурой.

Для точности стоило бы учесть теплоемкость водяных паров, попадающих в воздух при повышении температуры, но в данной задаче их масса (4 кг) существенно меньше массы воздуха (77,4 кг).

Пример 57. Аквариум с водой общей массой 2 кг поставили на весы. Как изменятся показания весов после того, как в воду опустили кусок льда массой 100 г? Как изменятся показания весов после того, как лед полностью растает?

Пример 58. Какое количество теплоты расходуется на получение дистиллированной воды, если дистилляционный аппарат заполняют 10 л воды при 20°C, нагревают ее до кипения, а затем 2 л выпаривают? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·K), удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг.

Решение. Обозначим начальную массу воды m_0, массу выпаренной воды m, удельную теплоемкость воды c, удельную теплоту парообразования воды L, начальную температуру воды T_0, температуру кипения воды T_b.

Полное количество теплоты, потраченное на весь процесс, равно сумме теплот, пошедших на нагрев воды массой m_0 до температуры кипения

$$Q_1 = cm_0(T_b - T_0) = 3{,}36 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

и на испарение воды при постоянной температуре

$$Q_2 = Lm = 4{,}52 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Получаем

$$Q = Q_1 + Q_2 = 7{,}88 \text{ МДж}.$$

Пример 59. Для определения удельной теплоемкости меди в алюминиевый калориметр массой 60 г, содержащий 400 г воды, была опущена медная гиря массой 500 г. Начальная температура гири 100°C, начальная температура калориметра с водой 15°C. Какое значение удельной теплоемкости меди было найдено, если конечная температура в калориметре 23,4°C? Удельная теплоемкость алюминия 920 Дж/(кг·K), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·K).

Решение. Обозначим массу калориметра $m_{\text{к}}$, массу воды в калориметре $m_{\text{в}}$, массу медной гири $m_{\text{м}}$. Начальную температуру калориметра T_0, начальную температуру гири $T_{\text{м}}$, установившуюся в равновесии температуру $T_{\text{р}}$.

Для составления уравнения теплового баланса найдем отданные и полученные теплоты. Отдает тепло только медь

$$Q_{\text{о}} = cm_{\text{м}}\left(T_{\text{м}} - T_{\text{р}}\right),$$

где c — это искомая удельная теплоемкость меди. Получают тепло алюминиевый калориметр и вода в нем $Q_{\text{п}} = Q_1 + Q_2$. Полученное тепло идет на нагрев до температуры в равновесии:

$$Q_1 = c_{\text{в}}m_{\text{в}}\left(T_{\text{р}} - T_0\right), \qquad Q_2 = c_{\text{ал}}m_{\text{к}}\left(T_{\text{р}} - T_0\right).$$

Итак, уравнение теплового баланса имеет вид

$$cm_{\text{м}}\left(T_{\text{м}} - T_{\text{р}}\right) = \left(c_{\text{в}}m_{\text{в}} + c_{\text{ал}}m_{\text{к}}\right)\left(T_{\text{р}} - T_0\right).$$

В этом уравнение неизвестна лишь искомая удельная теплоемкость меди, которую мы и находим

$$c = \frac{\left(c_{\text{в}}m_{\text{в}} + c_{\text{ал}}m_{\text{к}}\right)\left(T_{\text{р}} - T_0\right)}{m_{\text{м}}\left(T_{\text{м}} - T_{\text{р}}\right)} = 380{,}6 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 60. В калориметре находится 1 литр воды при температуре $t_1 = 15°$C. В воду опускают лёд массой 1 кг при температуре $t_2 = -10°$C. Найти температуру t в системе после установления теплового равновесия. Теплоёмкостью калориметра пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость льда $c_2 = 2100$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Обозначим температуру плавления льда (отвердевания воды) t_0, массы льда и воды в калориметре m. Поскольку мы заранее не можем предсказать положение температуры в равновесии относительно температуры плавления льда, необходимо рассмотреть три случая: в калориметре осталась смесь воды со льдом, либо только лед, либо только вода при температуре t_0, в калориметре остался лед при температуре выше t_2, $t_2 < t < t_0$, в калориметре осталась вода при температуре ниже t_1, $t_0 < t < t_2$. Рассмотрим количества теплоты, которые необходимы для того, чтобы довести воду до t_0:

$$Q_1 = mc_1(t_1 - t_0) = 63\,000 \text{ Дж}$$

и довести лед до t_0

$$Q_2 = mc_2(t_0 - t_2) = 21\,000 \text{ Дж.}$$

Так как $Q_1 > Q_2$, лед точно будет нагрет до 0°C. Остается выяснить, хватит ли теплоты, выделившейся при охлаждении воды, чтобы расплавить весь лед. Для плавления льда в калориметре потребовалось бы

$$Q_3 = 1 \cdot 330\,000 = 330\,000 \text{ Дж.}$$

Так как $Q_2 + Q_3 > Q_1$, то весь лёд растает. Итак, реализуется первый случай, когда в равновесии в калориметре находится смесь воды и льда при температуре 0°C.

Пример 61. (Замятнин, 1.155) Известно, что дистиллированную воду можно охладить в морозильнике до температуры −10°C, и она не замерзает. Но если в такую переохлажденную воду бросить кристаллик льда, то она сразу же начинает замерзать. Какая часть воды замерзнет?

Решение. При замерзании части воды выделяется тепло, которое идет за повышение температуры оставшейся части воды и образовавшегося льда. Этот процесс происходит непрерывно и маленькими порциями вплоть до достижения равновесной температуры (0 °C), теплота плавления зависит от температуры, что приводит к сложному пути решения через дифференциальные уравнения.

Тем не менее, можно *оценить* долю замершей воды, не прибегая к высшей математике. Допустим, что сначала полностью произошла кристаллизация части воды, а потом нагрев смеси до 0 °C. Пусть m_0 — начальная масса переохлажденной воды, $m_\text{в}$ — конечная масса воды, $m_\text{л}$ — конечная масса льда. Тогда

$$m_\text{л}\lambda = (m_\text{в}c_\text{в} + m_\text{л}c_\text{л})\,\Delta t.$$

Поскольку общее количество H_2O сохраняется, то $m_0 = m_\text{в} + m_\text{л}$.

$$m_\text{л}\lambda = ((m_0 - m_\text{л})\,c_\text{в} + m_\text{л}c_\text{л})\,\Delta t = m_0 c_\text{в}\Delta t - m_\text{л}\,(c_\text{в} - c_\text{л})\,\Delta t.$$

Отсюда выражаем долю замерзшей воды (оценка снизу, т. к. теплоемкость смеси воды и льда будет минимальной):

$$\alpha = \frac{m_{\text{л}}}{m_0} = \frac{c_{\text{в}}\Delta t}{\lambda + (c_{\text{в}} - c_{\text{л}})\,\Delta t} \approx 0{,}12 = 12\%.$$

Отметим, что исходная температура переохлаждения достаточно мала, чтобы конечная температура смеси отличалась от $0\,^\circ$C.

Пример 62. (Замятнин, 1.185) В стакан, в котором находится горячий чай массой $M = 100$ г, бросили кубик льда с температурой $0\,^\circ$C. К моменту завершения теплообмена температура чая понизилась на $\Delta t_1 = 12\,^\circ$C. Тогда в стакан бросили второй такой же кубик льда, и температура чая понизилась еще на $\Delta t_2 = 10\,^\circ$C. Найдите массу кубика льда. Теплообменом с воздухом пренебречь.

Решение. Пусть t_0 — начальная температура чая, m — масса кубика льда. Запишем уравнение теплового баланса для первого кубика льда, с учетом того, что равновесная температура равна $t_0 - \Delta t_1$:

$$\lambda m + c_{\text{л}} m\,(t_0 - \Delta t_1 - 0) + c_{\text{в}} M\,(-\Delta t_1) = 0.$$

Для второго кубика уравнение будет аналогичным, только равновесная температура равна $t_0 - \Delta t_1 - \Delta t_2$, а исходная масса воды — $M + m$:

$$\lambda m + c_{\text{л}} m\,(t_0 - \Delta t_1 - \Delta t_2 - 0) + c_{\text{в}}(M + m)\,(-\Delta t_2) = 0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$c_{\text{л}} m \Delta t_2 - c_{\text{в}} M \Delta t_1 + c_{\text{в}}(M + m)\Delta t_2 = 0;$$

$$(c_{\text{л}} + c_{\text{в}})\, m \Delta t_2 = c_{\text{в}} M\,(\Delta t_1 - \Delta t_2)\,;$$

$$m = M \frac{c_{\text{в}}}{c_{\text{л}} + c_{\text{в}}} \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2} = \frac{2M}{3} \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2} \approx 13{,}3 \text{ г}.$$

Пример 63. (Замятнин, 1.191) В калориметр поместили 100 г льда и налили 25 г воды. После установления теплового равновесия оказалось, что масса льда не изменилась. Какие значения начальной температуры могли быть у льда в таком эксперименте? Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°

C). Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Решение. Так как после теплообмена лед находится в равновесии с жидкостью, то температура получившейся смеси 0°C. Масса льда не изменилась, что указывает на отсутствие процессов плавления и кристаллизации. По условию вода изначально была в жидком состоянии, следовательно, остыть она могла не более чем на 100°C.

Составим уравнение теплового баланса:

$$m_L c_L \Delta t_L = m_B c_B \Delta t_B$$

Откуда, с учетом масс и теплоемкостей, максимальное изменение температуры льда 50°C. Окончательно, лед мог иметь температуру от 0 до 50°C.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 99. При освещении солнечными лучами 1 см^2 водной поверхности получает около 8 Дж в минуту. В предположении, что 50% этой энергии идет на испарение воды, оцените, какая масса воды испарится с 1 км^2 океана за сутки?

Задача 100. Приведите примеры веществ с высокими температурами плавления. В каких областях науки и техники они используются?

Задача 101. В калориметр с водой при 0 °C бросили кусок льда. Через некоторое время масса льда увеличилась на 2,1%. Определите начальную температуру льда.

Тепловые процессы в природе

Тепло — это энергия движения частиц, составляющих вещество.

Тепловой процесс — процесс, при котором меняется температура тела и веществ, а также возможно изменение их агрегатных состояний и других физических свойств.

Важные тепловые процессы, которые стоит обсудить со школьниками:

1. Излучение Солнца — это основный источник тепла, приходящего на Землю (341 Вт/м^2 или $1{,}74 \cdot 10^{17}$ Вт на всю поверхность Земли). Это намного больше, чем мощность внутренних источников тепла, например, радиоактивного распада в ядре Земли (примерно 0,08 Вт/м^2). До поверхности планеты доходит поток 161 Вт/м^2, примерно 2% от которого усваивается растениями в процессе фотосинтеза. Это приводит к фиксации углекислого газа и образованию биомассы растений, водорослей и бактерий, и через пищевые цепочки доходит до человека.
   Примечание. Поскольку излучение от Солнца идет при температуре примерно 6000 K, а тепловое излучение с поверхности и атмосферы Земли — при температуре примерно 290 K, то фактически на Землю идет огромный поток отрицательной энтропии, что приводит к образованию самых разных структур и процессов на поверхности Земли и в её атмосфере.

2. Несмотря на относительно малое значение мощности внутренних источников тепла Земли, они вместе с космическими высокоэнергетическими частицами обуславливают высокую температуру ядра порядка 6000 °C. И с удалением от центра Земли температура постепенно понижается вплоть до средней температуры 15 °C на поверхности. Тем не менее, на глубине 100 – 500 м есть горячие источники минеральной воды, а на глубине 5 км температура может достигать сотен градусов по Цельсию и давлений в тысячи атмосфер.

3. В предыдущие геологические эпохи значительная часть биомассы растений не переходила обратно в углекислый газ, а в результате подвижек земной коры опускалась на глубину до нескольких

километров. Под влиянием высокой температуры и давления в несколько тысяч атмосфер при отсутствии окислителей данная масса превращалась в горючие полезные ископаемые. Промышленная революция, начиная с 1860 года, значительное увеличение эффективности сельского хозяйства, повышение производительности труда в первую очередь связаны с использованием этой ископаемой энергии предыдущих эпох. Этой «ископаемой» энергии за сотни миллионов лет накопилось на порядки больше величины энергии излучения, приходящего от Солнца за год, однако и сжигается она очень быстро, приводя к увеличению в атмосфере концентрации углекислого газа.

4. Чем более нагреты тело или газ, тем меньше их плотность при атмосферном давлении. Из-за нагрева атмосферы и поверхности суши и океанов это приводит к восходящим конвективным влажным потокам воздуха, образованию облаков, осадкам и т.д. В океане существуют холодные и теплые течения, которые играют огромную роль в установлении того или иного типа климата на островах и континентах.

5. Известно, что при тепловом контакте двух тел тепло от более горячего переходит к более холодному до тех пор, пока не установится тепловое равновесие (температура системы не станет одинаковой во всех точках системы). Почему же при работающих батареях отопления ($70\,^{\circ}\mathrm{C}$) такая же температура не устанавливается в комнате? Дело в том, что в примере выше система предполагается адиабатической, т.е. теплоизолированной от внешней среды. В случае отопления горячая вода непрерывно поступает от котельной, а тепло из комнаты уходит через окна и стены в результате теплопроводности. Сама комната (воздух, стены, мебель) представляет собой промежуточный объект, температура которого может регулироваться температурой и скоростью потока горячей воды из котельной.

   Организм человека, животных, растений, любых других живых организмов также является открытой системой. Мы получаем энергию с пищей в виде энергии химических связей. Эта энергия тратится на совершение механической работы (в повседневной жизни — до 10%), на поддержание жизнедеятельности организма (у крупных млекопитающих — 30–40%), а все остальное — это теплопотери из-за разности температур тела и окружающей среды. Для уменьшения теплопотерь используются различные теплоизоляторы — одежда и одеяла для человека, стены для жилищ, мех и жировой слой у животных. Но и тут важно не переусердствовать — при слишком хорошей теплоизоляции или жаркой погоде организм перегревается.

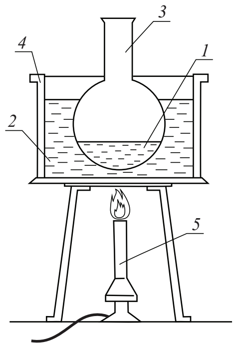
6. Иногда есть потребность в сохранении постоянной температуры объекта в условиях среды с существенно отличающейся температурой, например, горячего чая на зимней прогулке или замороженной рыбы при её транспортировке летом. Для температур выше значения окружающей среды это может быть достигнуто использованием термостата — устройства, которое греет объект при температуре ниже заданной, и выключает нагрев при более высоких температурах (тогда тело само остывает из-за теплопотерь).

   Другой способ — использование термоса (по научному — сосуда Дьюара). Принцип его работы в том, что термос имеет 2 стенки, между которыми откачан воздух, поэтому эффективность теплопередачи через теплопроводность и конвекцию сильно снижена.

Примеры физических явлений при фазовых переходах

Задачи для самостоятельного решения

Задача 102. (Перельман) Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в «большой» кастрюле с кипящей водой (водяная баня)?



Указание: при достижении во внутреннем сосуде температуры 100 °C теплообмен с внешним сосудом прекратится.

Задача 103. (Фольклор) Может ли человек опустить руку в жидкий азот (−196 °C) без неприятных последствий?
Примечание: самому не пробовать!!!

Указание: при соприкосновении жидкости с поверхностью, температура которой много выше температуры кипения этой жидкости, возникает прослойка пара, который является теплоизолятором (эффект Лайденфроста).

Задача 104. (Перельман Я.И. «Занимательные задачи и опыты») Можно ли льдом поджешь спичку?
Указание: да, если изо льда сделать собирающую линзу.

Задача 105. (Муниципальный этап, 2011 г.) В теплоизолированном сосуде лежит кусок льда при температуре 0 °C. В сосуд небольшими порциями начинают впускать пар при $t = 100\,^\circ\mathrm{C}$ до тех пор, пока в нём не окажется 100 г воды при $t = 100\,^\circ\mathrm{C}$. Какое количество теплоты пар передаст содержимому сосуда?

Задача 106. (Фольклор) Вторая космическая скорость для Марса равна 5 км/с. Если бы молекулы атмосферы (CO_2) имели бы такую же скорость (относительно движущегося тела), то их относительная температура была бы более 44 тысяч градусов! Почему же метеориты сгорают, а космические корабли — нет? Какое биологическое явление можно использовать для решения этой технической проблемы?
Указание: когда человеку жарко, он потеет и охлаждается за счёт испарения воды с поверхности кожи. Аналогично, корабль покрыт защитной оболочкой, которая переходит в газ по мере прохождения атмосферы, оставляя капсулу корабля при комфортной температуре.

Задача 107. (Журнал «Квант») В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается — вода не нагревается выше 60 °C. Выключим нагреватель и накроем стакан листом бумаги — вода при этом остынет от 60 °C до 59 °C за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листом бумаги, а поставили его на теплоизолированную пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °C до 59 °C за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем её листом бумаги. Сколько времени в этом случае займёт нагрев воды от 59 °C до 60 °C?
Указание: при температуре 60 °C мощность нагрева равна мощности теплопотерь. Надо рассмотреть 3 канала теплопотерь; испарение воды, боковая стенка, дно стакана.

Задача 108. (Региональный этап, 2010 г.) Теплоёмкость некоторых материалов может зависеть от температуры. Рассмотрим брусок массы $m_1 = 1{,}0$ кг, изготовленный из материала, удельная теплоёмкость которого зависит от температуры t по закону $c = c_1(1 + \alpha t)$, где

$\alpha = 0{,}014\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$, $c_1 = 1{,}4 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ °C). Такой брусок, нагретый до температуры $t_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}$, опускают в калориметр, в котором находится некоторая масса m_2 воды при температуре $t_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. После установления теплового равновесия температура в калориметре оказалась равной $t_0 = 60\,^\circ\mathrm{C}$. Пренебрегая теплоёмкостью калориметра и тепловыми потерями, определите массу m_2 воды в калориметре. Известно, что удельная теплоёмкость воды $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ °C).
Указание: переданная теплота равна площади под графиком зависимости теплоёмкости бруска от температуры. В случае линейной зависимости — это площадь трапеции.

Задача 109. (Эксперимент на дом) Найдите электрический чайник с прозрачными стеклянными или пластиковыми стенками. Снимите на видео процесс нагрева и закипания воды (а так же сразу после выключения чайника). Выделите существенные стадии нагрева и качественно поясните наблюдаемые явления.

Задача 110. (Эксперимент на дом) Найдите электрическую плитку с регулируемым нагревом. Налейте на сковородку слой подсолнечного масла толщиной примерно 1 см (для контрастности можно добавить металлическую стружку или мелкую крупу). Увеличивайте постепенно нагрев плитки до появления шестиугольников (см. рис.) — так называемых ячеек Бенара. Качественно объясните явление.

Примеры фазовых превращений

Пример 64. В сосуд со льдом, взятым при температуре $-10\,^\circ$C, опустили термометр. Как будут меняться показания термометра от времени, если сосуд поместить в помещении с комнатной температурой ($20\,^\circ$C)? Нарисуйте качественный график.

Пример 65. Какое количество теплоты надо сообщить 10 кг льда, взятого при температуре $0\,^\circ$C, чтобы он растаял? Какое количество теплоты выделяется при замерзании 10 кг воды, взятой при температуре $0\,^\circ$C? Почему эти величины равны?

Пример 66. Почему при повышении температуры сливочное масло плавится, а бумага — нет?

Пример 67. Имеется 200 г нафталина при 20°C. Оценить количество теплоты, необходимое для его нагрева до температуры плавления 80°C и полного его расплавления. Удельная теплота плавления нафталина 151 кДж/кг. Удельная теплоемкость нафталина 1300 Дж/(кг·K).

Решение. Обозначим массу нафталина m = 200 г = 0,2 кг, начальную температуру T_0 = 20°C, температуру плавления T_m = 80°C, удельную теплоемкость нафталина c = 1300 Дж/(кг·K), удельную теплоту плавления нафталина λ = 151 кДж/кг = 151 000 Дж/кг. Полная теплота $Q = Q_1 + Q_2$ равна сумме теплот, пошедших на нагрев нафталина до температуры плавления

$$Q_1 = cm(T_m - T_0) = 15\,600 \text{ Дж}$$

и на плавление нафталина

$$Q_2 = m\lambda = 45\,800 \text{ Дж.}$$

Получаем

$$Q = Q_1 + Q_2 = 61\,400 \text{ Дж.}$$

Пример 68. В железном тигле массой 300 г расплавляют 100 г олова. Начальная температура 32°C. Оценить количество теплоты, затраченное на весь процесс. Удельные теплоемкости c_t = 444 Дж/(кг·K),

$c_0 = 218$ Дж/(кг·К). Температура плавления олова 232°C. Удельная теплота плавления олова $\lambda = 60$ кДж/кг.

Решение. Обозначим массу тигля $m_t = 300$ г $= 0{,}3$ кг, массу олова в тигле $m_o = 100$ г, начальную температуру тигля $T_0 = 32$°C, температуру плавления олова $T_m = 323$°C. Полная теплота процесса $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ равна сумме теплот, пошедших на нагрев железного тигля

$$Q_1 = c_t m_t (T_m - T_0) = 26\,640 \text{ Дж},$$

нагрев олова до температуры плавления

$$Q_2 = c_o m_o (T_m - T_0) = 4360 \text{ Дж},$$

и плавление олова в тигле при постоянной температуре

$$Q_3 = m_o \lambda = 6000 \text{ Дж}.$$

Получаем

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 37\,000 \text{ Дж}.$$

Пример 69. Какое количество теплоты потребуется, чтобы 29 кг воды при 20°C довести до кипения и обратить в пар? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг.

Решение. Обозначим массу воды $m = 29$ кг, удельную теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельную теплоту парообразования воды $L = 2{,}26$ МДж/кг $= 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, начальную температуру воды T_0, температуру кипения воды T_b.

Полное количество теплоты Q, потраченное на весь процесс равно сумме теплот, пошедших на нагрев воды до температуры кипения

$$Q_1 = cm(T_b - T_0) = 9{,}744 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

и на испарение воды при постоянной температуре

$$Q_2 = mL = 65{,}54 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Итак,

$$Q = 9{,}744 \cdot 10^6 + 65{,}54 \cdot 10^6 = 75{,}284 \cdot 10^6 \text{ Дж} \approx 75{,}3 \text{ МДж}.$$

Пример 70. (Замятнин, 1.132) Снежок, летящий со скоростью 20 м/с, ударяется в стену. Какая часть снежка расплавится, если его начальная температура была равна 0 °C?

Решение. При неупругом соударении снежка со стенкой вся его кинетическая энергия перейдет в тепло, и пойдет на плавление снега. Пусть m_0 — исходная масса снежка, m — масса образовавшейся воды. Тогда

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 = \lambda m;$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{v^2}{2\lambda} = 6 \cdot 10^{-4} = 0{,}06\%.$$

Видно, что доля расплавившегося снега очень мала.

Пример 71. (Замятнин, 1.146) Туристу было лень зачерпывать 1 л воды из проруби, и он насыпал в алюминиевый котелок 1 кг снега. На сколько дольше придется ему ждать закипания, если вода и снег были при температуре 0 °C, а мощность примуса 1 кВт? Масса котелка 500 г.

Решение. Дополнительное время τ обусловлено процессом плавления 1 кг льда: $Q = P\tau = \lambda m$, где P — мощность примуса. Получим

$$\tau = \frac{\lambda m}{P} = 330 \text{ с}.$$

Поскольку процесс плавления льда происходит при температуре 0 °C, то теплоемкость котелка на него не влияет.

Пример 72. (Замятнин, 1.188) В сосуде с водой плавает кусок льда массы $m = 0{,}5$ кг. Система находится в тепловом равновесии. Сколько теплой воды при температуре $t = 30°$C нужно добавить в сосуд, чтобы объем выступающей из воды части льда уменьшился в $n = 2{,}4$ раза? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды в коктейле $c_B = 4200$ Дж/(кг·°C).

Решение. Пусть в воде плавает кусок льда массы m, при этом над водой находится часть его объема V. Тогда объем кусочка льда равен $V_0 = \dfrac{m}{\rho_\text{л}}$, а объем его погруженной части $V_\text{погр} = V_0 - V$.

В состоянии равновесия сила Архимеда, действующая на погруженную часть, уравновешивает силу тяжести:

$$\rho_{\text{в}} V_{\text{погр}} g = mg,$$

откуда

$$\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} m - \rho_{\text{в}} V = m.$$

Окончательно получаем:

$$V = \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}}.$$

Как видим, уменьшение в n раз объема выступающей части соответствует уменьшению массы льдинки во столько же раз. Предположим, что $m_{\text{в}}$ — искомая масса подлитой воды. Заметим, что после установления равновесия в сосуде еще остается лед. Это значит, что подлитая масса воды остывает до температуры льда $t_0 = 0°\text{C}$. Из условия теплового баланса:

$$\left(m_0 - \frac{m_0}{n}\right) \lambda = m_{\text{в}} c_{\text{в}} (t - t_0).$$

Отсюда находим:

$$m_{\text{в}} = \frac{n-1}{n} \frac{m_0 \lambda}{c_{\text{в}} (t - t_0)} \approx 0{,}76 \text{ кг}.$$

Пример 73. (Филатов) В сосуд с мокрым снегом (смесью снега и воды) долили $m = 1{,}0$ кг горячей воды при температуре $t_1 = 40\,°\text{C}$. В результате весь снег растаял, и в сосуде оказалось $M = 2{,}0$ кг воды при температуре $t_2 = 0\,°\text{C}$. Сколько воды и сколько снега было в сосуде вначале? Теплоемкостью сосуда пренебречь.
Указание: записать закон сохранения массы воды и уравнение теплового баланса.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 111. До какой температуры следует нагреть железный кубик, чтобы он полностью погрузился в лед? Начальная температура льда $0\,°\text{C}$.

Задача 112. В одном калориметре находится 1 кг воды при $100\,°\text{C}$, а во втором — 0,5 кг воды и 0,5 кг льда. Стальную гирьку массой 1 кг (удельная теплоемкость стали 500 Дж/(кг · °C), имеющую комнатную температуру 20 °C, сначала опускают в первый калориметр, дожидаются установления теплового равновесия, затем опускают во второй калориметр. Оцените, сколько льда останется во втором калориметре?

Задача 113. Оцените качественно, как изменится температура и теплота плавления алюминия, если его взять не большим куском, а в виде отдельных маленьких гранул размерами до 10 нм?

Влияние температуры и давления на фазовый переход

Пример 74. (Перельман) Может ли замёрзнуть кипящая вода?

Решение. То, что вода кипит при температуре 100 °C, справедливо только при атмосферном давлении. При понижении давления температура кипения будет уменьшаться. Если нарисовать фазовую диаграмму воды в координатах давления и температуры, то мы увидим, что при некоторых давлении и температуре возникает «тройная точка», при которой вода может существовать одновременно в 3 разных фазах. Ниже этой точки вода в жидком состоянии не существует — она переходит либо в пар, либо в лед. Так произойдет, например, если жидкая вода окажется в открытом космосе.

Пример 75. (Муниципальный этап, 2001) В сосуде, из которого непрерывно откачивают находящийся в нем газ, находится некоторое количество воды при температуре 0°C. За счет интенсивного испарения вода постепенно превращается в лед. Какая доля β первоначальной массы воды может быть превращена в лед таким способом? Тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплота парообразования воды L и удельная теплота кристаллизации воды связаны соотношением $\dfrac{L}{\lambda} = 6{,}7$.

Решение. Пар образуется за счет тепла, выделяющегося при замерзании воды. Пусть m_1 — масса замерзшей воды, тогда выделилось теплота

$$q = \lambda m_1.$$

Этой энергии хватит на образование пара массой

$$m_2 = \frac{q}{L} = \lambda \frac{m_1}{L},$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{L}{\lambda} = \alpha.$$

Так как вся вода превратилась либо в лед, либо в пар, то первоначальная масса воды равна

$$m = m_1 + m_2.$$

Отсюда получаем выражение для доли воды, перешедшей в лед:

$$\beta = \frac{m_1}{m} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} = 0{,}87.$$

Пример 76. (Перельман) Можно ли перерезать лед, оставив его целым?

Решение. Да, это показано экспериментально. Металлическая проволока обладает высоким коэффициентом теплопроводности, вследствие чего тепло из воздуха передается внутрь льда, и проволока опускается под тяжестью груза (если температура льда близка к $0\,^\circ$C). Над проволокой образуется тоненькая прослойка воды, которая ввиду перераспределения температуры снова смерзается.

Долгое время считалось, что причиной опускания проволоки является изменение температуры плавления льда под дополнительным давлением. Как показывает следующая задача — это не так.

Пример 77. (Фольклор) Оцените снижение температуры плавления льда под весом конькобежца массой $m = 60$ кг, если суммарная площадь лезвий коньков составляет $S = 6$ см^2, а температура плавления льда снижается на 1°C при повышении давления на $p_0 = 133$ атм (1 атм = 105 Па). Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Конькобежец оказывает на лед давление

$$p = \frac{mg}{S} = \frac{60 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2}{6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 10^6 \text{ Па} = 10 \text{ атм}.$$

Если давление 133 атм приводит к снижению температуры плавления на 1°C, то давление p —пропорционально меньше, т. е. примерно 0,1°C. Очевидно, что эта величина существенно меньше характерных температур зимой. Поэтому низкое трение скольжения коньков не является результатом понижения температуры под действием повышенного давления, а появляется вследствие выделения теплоты трения.

Пример 78. (Фольклор) Почему нагревается солевая грелка? Нарисуйте качественный график зависимости температуры грелки от времени.

Решение. В случае солевой грелки мы сталкиваемся с интересным и доступным для наблюдения явлением — переохлажденной жидкостью.

Если в жидкости или на поверхности, граничащей с жидкостью, отсутствуют микроскопические пылинки, которые могут послужить центрами кристаллизации, то жидкость можно охладить ниже температуры замерзания на значительную величину — для воды до $-10°$C в условиях морозильника, а для ацетата натрия, который используется в грелках — на 30–40°C ниже температуры замерзания (55 °C), т. е. до комнатной температуры.

При активации грелки (при сжатии активатора возникает зона высокого давления) начинается фазовый переход, соответственно в воздухе грелка быстро нагревается до температуры замерзания (55 °C). Далее 3–10 минут она держит эту температуру, а когда фазовый переход завершен — начинает постепенно остывать в соответствие с законом Ньютона-Рихмана.

Пример 79. При беге трусцой (11 км/ч) расход энергии у человека составляет 485 ккал/ч, а при сидячей работе (решении задач по физике) всего 75 ккал/ч. Предполагая, что при беге вся избыточная энергия выводится через потоотделение, оценить потери жидкости в организме бегуна за 1 час. Молярная теплота испарения воды 44 кДж/моль.

Решение. По сравнению с расходом энергии при сидячей работе при беге дополнительно расходуется 410 ккал/ч, или 1722 кДж/ч. Молярная масса воды 18 г/моль, поэтому для испарения 1 кг воды потребуется энергия 2444 Дж/г = 2444 кДж/кг. Следовательно, за час бега испарится 0,7 кг воды.

Пример 80. (Фольклор) Почему легко поджечь листок бумаги, сложно сжечь большое бревно, а микроскопические древесные опилки сами загораются на солнцепеке?

Решение. Горение твердых тел представляет собой сложный физико-химический процесс, который можно разбить на 2 стадии: процесс возгонки (перехода из твердого в газообразное состояние) и потом собственно горения (окисления) газа, а выделяющееся тепло идет на возгонку новых порций газа.

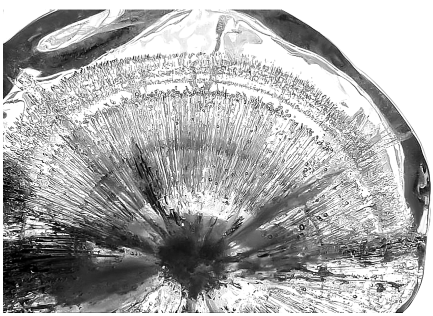
Если газа выделяется меньше, чем сгорает — такие материалы считаются негорючими. Если газа выделяется столько же, сколько сгорает — это процесс равномерного горения. Если газа выделяется много больше, чем сгорает, то количество задействованного вещества увеличивается экспоненциально и, в конце концов, происходит взрыв (детонация).

Отношение количеств выделяющегося и сгорающего газа также зависит от отношения площади поверхности к объему тела. Если взять в качестве примера шар, то известно, что площадь поверхности пропорциональна R^2, а объем шара — R^3, следовательно, их отношение будет увеличиваться как $\frac{1}{R}$ с уменьшением радиуса шара. При одинаковой массе вещество из гранул меньшего размера будет обладать большей площадью поверхности, а следовательно — большим количеством образующегося газа.

Пример 81. (Фольклор) Как меняется удельная теплота испарения жидкости с ростом температуры? Может ли она равняться нулю? Быть отрицательной?
Указание: Проанализируйте физический смысл существования критической точки на фазовой диаграмме: в ней теплота испарения равна 0.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 114. (Эксперимент) Налейте в цилиндрическую форму (стакан или открытую банку из-под сгущенки) воды и поместите ее в морозильник до полного замерзания. Достаньте получившийся лед. Если разрезать цилиндр льда перпендикулярно оси, то можно заметить множество пузырьков воздуха, которые образуют цепочки, вытянутые вдоль направления, в котором относительно стенок сосуда двигалась граница раздела вода — лёд (см. рис.). В некоторых случаях пузырь-

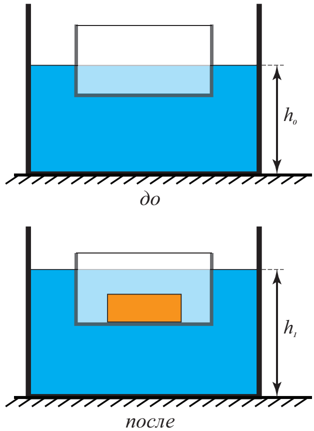


ки сливаются, образуя сплошные трубочки из воздуха внутри льда. Объясните явление, исследуйте зависимость от параметров системы (температура, размеры, и т. д.).

Лабораторная работа «Поиск плотности и теплоёмкости тела»

Цель работы. Определить плотность и удельную теплоёмкость неизвестного металла.

В работе используются. Термометр (термопара), сосуд с горячей водой (60–70°C), сосуд с холодной водой (5–10°C), измерительный цилиндр (мензурка), калориметр, поднос с высокими стенками, весы.



Задача по измерению плотности и теплоёмкости металла предлагалась в начале 90-х годов на финальном этапе всероссийской олимпиады школьников по физике. Основная сложность той задачи была в том, что в оборудовании не было весов. Рассмотрим решение, позволяющее провести замеры без использования весов.

В уравнении теплового баланса участвуют массы тел, то первым пунктом работы будет поиск массы тела. Сначала находим объём тела, для этого наполняем сосуд до краёв, поставив его в поднос. Опустив тело, измеряем объём воды, которая вылилась (она равна объёму тела). Вторым пунктом будет определение массы тела. Для этого взвесим тело в воде, как показано на рисунке. Вес вытесненной воды в таком случае будет равен весу исследуемого тела $F_{\text{арх}} = mg$. Найдя массу и объём тела, находим плотность.

Примечание 1. Перед тем, как дать учащимся данную работу — надо подобрать правильно груз и сосуды. Их размеры должны позволять провести подобные замеры.

Примечание 2. Поиск массы тела можно сделать с помощью весов, сильно упростив задачу.

Второй частью задачи идёт поиск теплоёмкости тела. Авторское решение предполагало смешать в калориметре небольшие порции (в достаточном количестве, чтобы полностью закрывало исследуемое тело) горячей $t_{\text{гор}}$ и холодной $t_{\text{хол}}$ воды так, чтобы получилась вода комнатной температуры $t_{\text{комн}}$ (это позволит уменьшить потери тепла в окружающую среду). После этого, нагрев исследуемое тело массой $m_{\text{тела}}$ в горячей воде, поместим, с помощью пинцета или нитки исследуемое тело в калориметр. Далее будем доливать с помощью мензурки холодную воду до тех пор, пока температура в калориметре опять не станет комнатной температуры.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$m_{\text{тела}} c_{\text{тела}} \left(t_{\text{гор}} - t_{\text{комн}}\right) = m_{\text{воды}} c_{\text{воды}} \left(t_{\text{комн}} - t_{\text{кол}}\right),$$

где $m_{\text{воды}}$ — масса холодной воды, которую долили в калориметр. Откуда находим

$$c_{\text{тела}} = c_{\text{воды}} \frac{m_{\text{воды}}}{m_{\text{тела}}} \cdot \frac{t_{\text{комп}} - t_{\text{хол}}}{t_{\text{гор}} - t_{\text{комн}}}.$$

Вторую часть задачи можно упростить. Для этого нальём в калориметр порцию горячей воды массой $m_{\text{воды}}$ и поместим туда тело, предварительно нагрев его в горячей воде. С помощью термометра измерим установившуюся температуру t_0 в калориметре.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$m_{\text{тела}} c_{\text{тела}} \left(t_0 - t_{\text{хол}}\right) = m_{\text{воды}} c_{\text{воды}} \left(t_{\text{гор}} - t_0\right).$$

Откуда теплоёмкость телп равна:

$$c_{\text{тела}} = c_{\text{воды}} \frac{m_{\text{воды}}}{m_{\text{тела}}} \cdot \frac{t_{\text{гор}} - t_0}{t_0 - t_{\text{хол}}}.$$

Примечание. При выполнении задачи вторым способом качестве холодного тела можно использовать лёд, тем самым получив температуру тела ниже нуля. Также можно сделать смесь льда с водой (обычно температура такой смеси получается 2–3°С), это позволит многократно повторить эксперимент с одинаковой начальной температурой тела.

Для выполнения данной работы учащиеся должны выполнить несколько пунктов (авторский метод):

1. Поместим исследуемое тело в воду, определим объём тела по количеству вытесненной воды.
2. Взвесим тело гидростатическим способом.
3. По получившимся данным найдём плотность тела.
4. Смешаем порции горячей и холодной воды в калориметре таким образом, чтобы получившаяся смесь была комнатной температуры.
5. Поместим тело, нагретое горячей водой в калориметр.
6. Будем доливать холодную воду до тех пор, пока в калориметре не установится комнатная температура.
7. По получившимся данным найдём теплоёмкость тела.

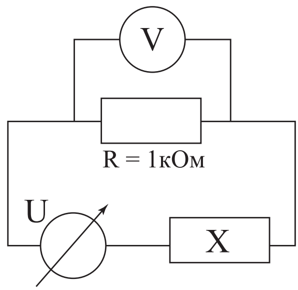
При выполнении более простым способом (с использованием весов).

1. Поместим исследуемое тело в воду, определим объём тела по количеству вытесненной воды.
2. С помощью весов определим массу тела.
3. По получившимся данным найдём плотность тела.
4. Охладив тело, поместим его в калориметр.
5. Дольём в калориметр горячей воды, измерим получившуюся температуру.
6. По получившимся данным найдём теплоёмкость тела.

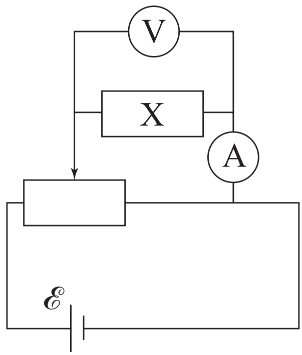
Примечание. В качестве неизвестного тела удобно использовать стальный гайки (или же переходные гайки) больших размеров, например M18 или M20. Для увеличения массы можно взять болт, накрутив на него несколько гаек.

Лабораторная работа «Исследование ВАХ основных элементов»

В работе используются. Макетная плата, набор резисторов разных номиналов, вольтметр, регулируемый блок питания, соединительные провода, потенциометр, диод, лампочка накаливания.



В данной работе предлагается исследовать вольт-амперные характеристики (ВАХ) основных электрических элементов (резистор, лампочка, диод). Для получения ВАХ надо собрать схему, представленную на рисунке. В данной схеме используется резистор $R = 1$ кОм с подсоединённым вольтметром. Тогда ток в цепи будет равен $I = \frac{U_V}{R}$ и в миллиамперах будет численно равен показанию вольтметра в вольтах (что очень удобно). Напряжение на неизвестном элементе X тогда будет равно $U_X = U_{\text{ист}} - U_V$, где $U_{\text{ист}}$ — напряжение источника. Для данного метода измерения необходимо иметь регулируемый источник питания со встроенным вольтметром.



Если же регулируемый блок питания отсутствует, то можно использовать источник с потенциометром. К другим недостаткам данного метода можно отнести тот факт, что в случае большого сопротивления элемента X показания вольтметра и источника будут несильно отличаться друг от друга. А как всем известно, вычитание подобных величин приводит к большой погрешности. Также следует учитывать, чо нагрузочное сопротивление в 1 кОм сильно уменьшает ток в цепи, что в некоторых случаях может сильно повлиять на эксперимент (в случаях, когда нужны большие токи порядка 1 ампера). Использование же нагрузочного резистора меньшей величины может привести к его перегоранию, так как при напряжении источника 10 вольт рассеиваемая тепловая мощность на нём становится порядка $P = \dfrac{U_{\text{ист}}^2}{R} \approx 0{,}1$ Вт. Для снятия ВАХ можно использовать амперметр, включенный в цепь последовательно.

Для снятия ВАХ элемента X необходимо менять ток, текущий в цепи, измеряя напряжение. Очевидно, что для резистора зависимость будет линейная. Во время выполнения надо проследить, чтобы учащиеся получили точки на всем доступном диапазоне напряжений, не менее 10–15 точек. Если блок питания 0–15 вольт, то логично снимать каждый вольт (стараясь не превышать максимально допустимый ток). Далее надо все точки нанести на графике (миллиметровка) в правильном масштабе, подсчитать сопротивление резистора как тангенс угла наклона.

1. Соберите схему для получения ВАХ резистора.
2. Меняя напряжение источника, получите не менее 7 различных значений напряжения и тока на резисторе.
3. По данным точкам постройте ВАХ резистора.

Следующим элементом может быть лампочка накаливания на 12 вольт под цоколь G4. Для использования в макетной плате достаточно вставить в соседние отверстия по диагонали (например A1–B2). Но рабочий ток таких лампочек порядка 1–2 ампер, что может негативно сказаться на макетной плате, так что рекомендуется подключать лампочку проводами с «крокодилами» напрямую к источнику без платы. Так как данные лампочки потребляют большой ток, то их надо использовать либо совсем без резисторов, либо с резисторами большой мощности. При использовании батареек надо помнить, что большие токи могут привести к их сильному нагреву. В этом случае можно снять ВАХ только при небольших токах.

1. Соберите схему для определения ВАХ лампочки накаливания.
2. Меняя напряжение источника, снимите необходимое число различных значений напряжения и тока на лампочке.

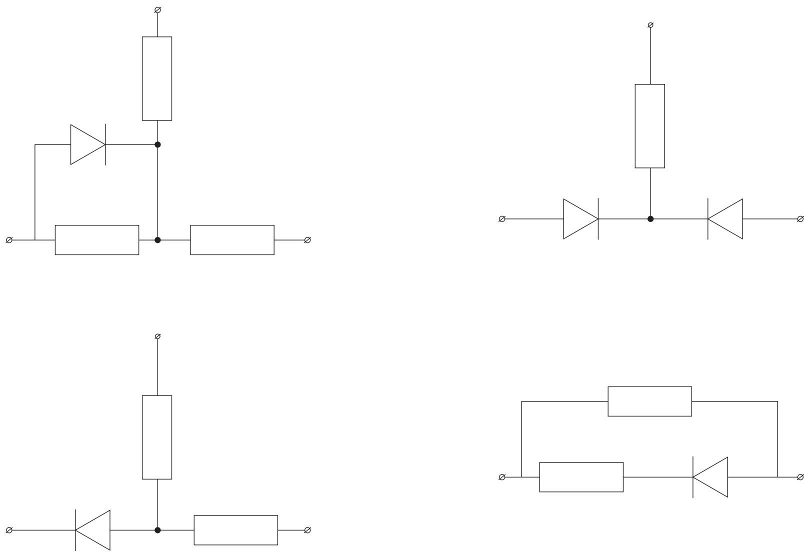
3. По получившимся данным постройте ВАХ лампочки.

При выполнении данной работы надо убедиться, что учащиеся правильно производят замеры (так как ВАХ не является линейным, то при небольших токах надо снимать точки чаще, чем при больших). После обработки результатов и построения графика, надо обсудить с ними нелинейное сопротивление – можно ли просто делить напряжение на так, либо надо рисовать касательную (статическое и динамическое сопротивление)? Другим теоретическим вопросом может быть следующий — при наличии ВАХов двух лампочек (или лампочки и резистора) какой ток потечет в цепи при их последовательном или параллельном соединении (всероссийские олимпиады, 1998, финальный этап, 9 класс, Замятнин, 8 класс, 2.426).

Третья работа — изучение ВАХ диода. Схема такая же, как и для ВАХ резистора. При выполнении данной работы надо проследить, чтобы учащиеся сняли ВАХ в обе стороны диода. Вместо диода (или вместе с ним) можно дать стабилитрон. Сопротивление резистора подобрать так, чтобы стабилитрон «открывался» почти при максимальном напряжении источника. В таком случае надо проследить, чтобы учащиеся исследовали ВАХ как при небольших, так и при больших напряжениях.

1. Соберите схему для определения ВАХ нелинейного элемента.
2. Меняя напряжение источника, получите необходимое число точек.
3. Снимите ВАХ нелинейного элемента в «обратном направлении» (поменяв полярность источника).
4. По получившимся данным постройте ВАХ нелинейного элемента.

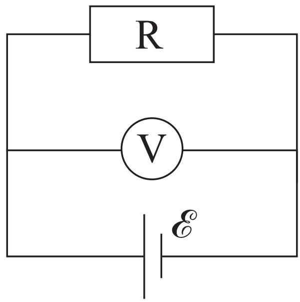
Дополнительно можно дать другие нелинейные элементы (фоторезистор, терморезистор, конденсатор, катушка индуктивности, солнечная батарея). По возможности можно сделать «черные ящики», содержащие ранее исследованные элементы. Примеры схем для черных ящиков представлены на рисунке. Данные схемы предлагались в разные года на олимпиадах разных уровней.



Лабораторная работа «Мощность выделения тепла на резисторе»

Цель работы. Исследовать зависимость мощности тепловых потерь резистора от температуры, определить теплоёмкость резистора.

В работе используются. Набор резисторов разных сопротивлений, два мультиметра, термопара, соединительные провода, регулируемый источник постоянного напряжения, макетная плата, соединительные провода.



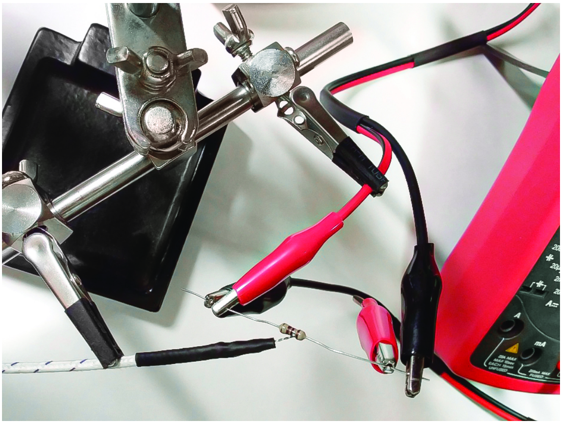
В данной работе предлагается проверить исследовать, какая мощность выделяется на резисторе при протекании через него электрического тока. Для этого предлагается собрать схему, представленную на рисунке. Сборку можно сделать на макетной плате, а можно – навесным монтажом. Вольтметр нужен для того, чтобы точно знать напряжение на резисторе (это актуально, если используемый источник имеет большое внутреннее сопротивление, можно использовать вольтметр блока питания). Тепловая мощность, выделяемая на резисторе, определяется очевидным соотношением $P = \dfrac{U^2}{R}$, где U — напряжение на резисторе, R — его сопротивление. Вся электрическая мощность, подводимая к резистору, рассеивается в окружающее тепло. Рассеиваемая тепловая мощность по закону Ньютона-Рихмана определяется формулой

$$P = \alpha\left(t_{\text{тела}} - t_{\text{окр}}\right),$$

где $t_{\text{тела}}$ — температура нагретого тела, $t_{\text{окр}}$ — температура окружающей среды. Таким образом

$$\frac{U^2}{R} = \alpha\left(t_{\text{тела}} - t_{\text{окр}}\right).$$

Для определения коэффициента α собираем установку, представленную на рисунке.



Определяем температуру $t_{\text{окр}}$ окружающей среды.

После этого, увеличивая напряжение источника, определяем установившуюся температуру резистора $t_{\text{тела}}$. После каждого изменения напряжения ждем некоторое время, пока резистор нагреется. Нужно помнить, что термопара не является точным измерительным прибором, поэтому показания температуры могут сильно меняться (в диапазоне 2–5°C).

Записываем значения в таблицу, вычисляем тепловую мощность в каждом случае.

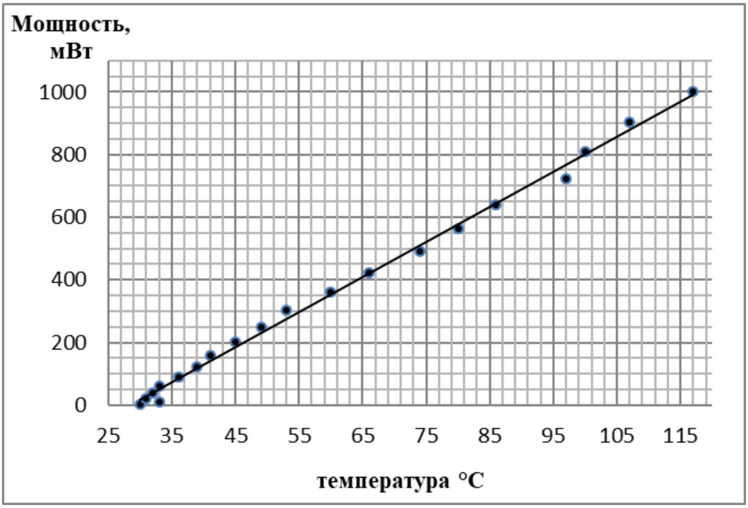
температура, °C	30	33	31	32	33
напряжение, В	0,5	1	1,5	2	2,5
мощность, мВт	2,5	10	22,5	40	62,5

температура, °C	36	39	41	45	49
напряжение, В	3	3,5	4	4,5	5
мощность, мВт	90	122,5	160	202,5	250

температура, °C	53	60	66	74	80
напряжение, В	5,5	6	6,5	7	7,5
мощность, мВт	2,5	10	22,5	40	62,5

температура, °C	86	97	100	107	117
напряжение, В	8	8,5	9	9,5	10
мощность, мВт	90	122,5	160	202,5	1000

Строим график зависимости электрической мощности от температуры.



Коэффициент пропорциональности α определяем из графика (в нашем случае $\alpha \approx 10{,}7\ \dfrac{\text{Вт}}{{}^\circ\text{C}}$. Не рекомендуется сильно нагревать резистор, более 60 градусов (для резистора в 100 Ом это примерно 6–7 вольт), так как рассеиваемая мощность сильно превышает максимально допустимые заводские значения.

Для определения теплоемкости резистора отключим источник и снимем зависимость температуры резистора от времени при его остывании. Полученные точки занесем в таблицу.

температура, °C	106	101	96	88	84
напряжение, В	0	2,01	3,94	5,88	7,88
мощность, мВт	55	53	51	48	47
температура, °C	77	78	66	63	59
напряжение, В	9,88	11,87	13,83	15,77	17
мощность, мВт	44	43	41	40	39

температура, °C	36,73	34,8	32,86	30,93	29,14
напряжение, В	33	34	34	34	35
мощность, мВт	55,01	52,95	51,72	49,79	47,92
температура, °C	26,98	24,95	22,95	20,97	19,76
напряжение, В	35	36	36	37	38
мощность, мВт	45,94	43,98	42,74	40,72	38

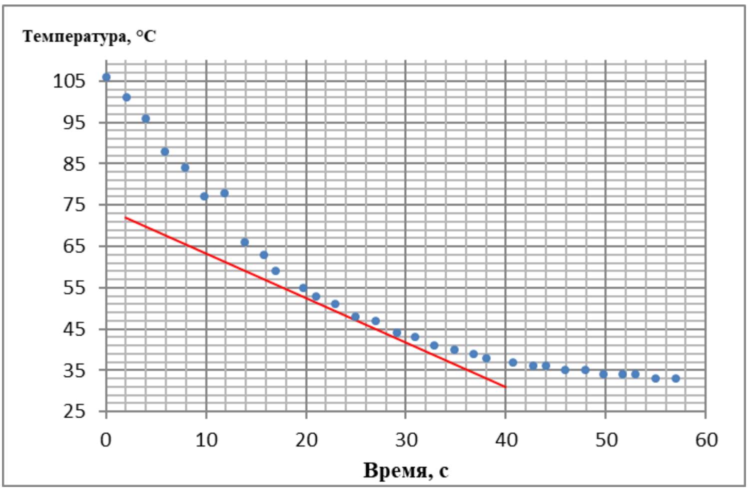
Рассчитаем теплоёмкость резистора по формуле

$$Q = C\Delta t = \alpha\left(t_{\text{тела}} - t_{\text{окр}}\right)\Delta\tau,$$

где Δt — небольшое изменение температуры резистора за малый интервал времени $\Delta\tau$, $t_{\text{тела}}$ — температура резистора в исследуемый момент времени. Откуда получаем

$$C = \alpha\left(t_{\text{тела}} - t_{\text{окр}}\right)\frac{\Delta\tau}{\Delta t}.$$

Для определения величины $\dfrac{\Delta\tau}{\Delta t}$ построим касательную к графику (все расчёты проводились для температуры 45 °C) и определим величину теплоёмкости $C \approx 0{,}19\ \dfrac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}$.



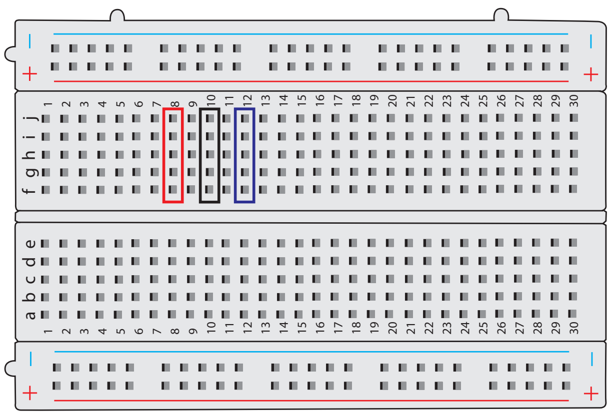
Примечание. Данная работа предлагалась на региональном этапе в 2019 году в 10 классе. Так как резисторы могут отличаться, то полученные значения могут быть различны для каждой отдельной партии резисторов. Для получения зависимости температуры резистора от времени процесс остывания был заснят на видео, далее с помощью средств видеомонтажа были получены значения времени и температуры. Пример установки приведен ниже. Можно также использовать метод соединения, который предлагался на олимпиаде.

Лабораторная работа «Изучение цепей постоянного тока на современной элементной базе (макетные платы)»

В работе используются. Макетная плата, набор резисторов разных номиналов, вольтметр, амперметр, источник постоянного напряжения (батарейка), соединительные провода, потенциометр.

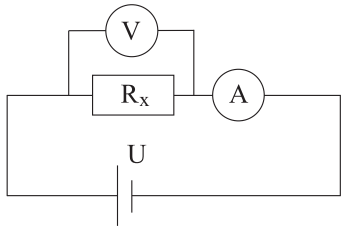
В данной работе предлагается обучить учащихся навыкам работы с макетными платами и электроизмерительными приборами. Перед тем, как приступить к работе, необходимо напомниить основные требования техники безопасности. При подключении источника питания в цепь надо обязательно подключать нагрузку, чтобы не получилось короткое замыкание. Аналогичная ситуация с амперметром — при его включении в цепь необходимо нагрузочное сопротивление такое, чтобы текущий через него ток не превышал максимально допустимое значение. Также необходимо напомнить, что одним из параметров резистора (помимо его номинального сопротивления) является максимальная рассеиваемая тепловая мощность. При работе следует подбирать напряжение источника и сопротивления резистора такими, чтобы рассеиваемая мощность на резисторах не превышала 0,1 Вт.

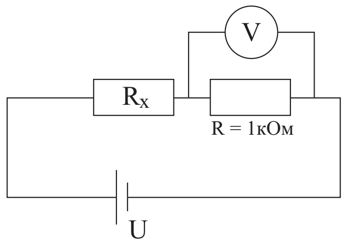
Главным удобством макетной платы является возможность соедине-



ния электрических элементов и соединительных проводов без пайки. Для этого в ней есть отверстия. Отверстия, имеющие одинаковый цифровой номер, соединены последовательно, например $A1$, $B1$, $C1$, $D1$, $E1$. На рисунке ячейки, соединенные последовательно, выделены цветом. При работе с макетными платами удобно подписывать на схеме буквенно-цифровой номер каждой ячейки, куда подключен каждый элемент.

Первой работой предлагается собрать простейшую схему, представленную на рисунке. Недостатком данной схемы является использование амперметра. На олимпиадах чаще всего (при необходимости измерения тока в схемах) предлагается использовать резистор известного сопротивления (для удобства можно взять 1 кОм) с подключенным параллельным вольтметром.

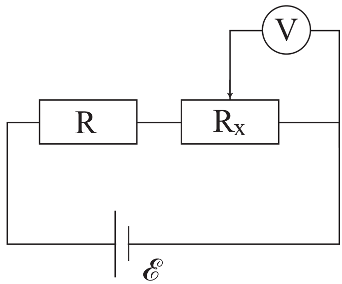




Пусть U_R — напряжение на известном резисторе, U_0 — напряжение источника. Тогда ток в цепи равен $I = \dfrac{U_R}{R}$, напряжение на неизвестном резисторе равно $U_X = U_0 - U_R$, сопротивление неизвестного резистора тогда равно

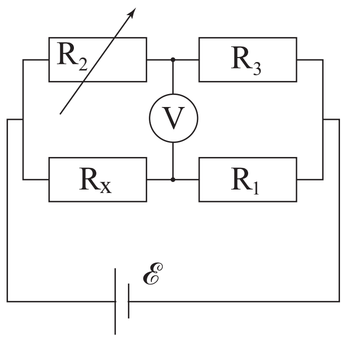
$$R_X = \frac{U_0 - U_R}{I} = \frac{U_0 - U_R}{U_R} R.$$

1. Соберите схемы, представленные на рисунке.
2. Подключив источник тока, измерьте сопротивление неизвестного резистора.
3. Сравните полученные результаты.
4. Можно ли в данной работе вместо вольтметра подключить омметр? Если нет, то почему?



Второй работой предлагается изучить принцип работы потенциометра. Для этого предлагается собрать схему, представленную на рисунке. Поворачивая ручку потенциометра, учащиеся должны получить изменение напряжения на потенциометре, построить график зависимости напряжения на вольтметре от угла поворота.

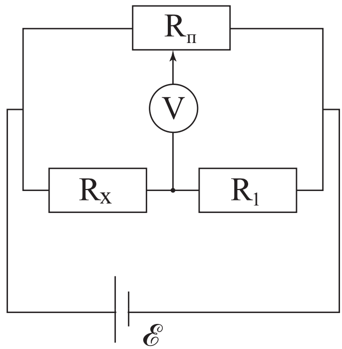
1. Соберите схему, представленную на рисунке.
2. Поворачивая ручку потенциометра, измерьте напряжение вольтметра.
3. Определите, как зависит сопротивление потенциометра в зависимости от угла поворота ручки (отградуируйте потенциометр).



Третья работа состоит в определении неизвестного сопротивления с помощью моста Уитстона. В качестве переменного резистора можно использовать потенциометр, отградуированный в предыдущей работе. Поворачивая ручку потенциометра (меняя сопротивление R_2), добиваемся нулевых показаний вольтметра. Такой мост называется сбалансированным. Неизвестное сопротивление R_X определяем из формулы: $\dfrac{R_X}{R_1} = \dfrac{R_2}{R_3}$. (Можно предложить учащимся самостоятельно вывести данную формулу).

1. Соберите схему, представленную на рисунке (мост Уитстона).
2. Меняя сопротивление потенциометра, сбалансируйте мост (показания вольтметра должны быть равны нулю).
3. Вычислите сопротивление неизвестного резистора.

Мостовую схему можно оптимизировать, используя на один резистор меньше. В данном случае, поворачивая ручку потенциометра, мы сразу меняем отношение сопротивлений $\frac{R_2}{R_3}$. Трудность второго метода состоит в том, что определить отношение $\frac{R_2}{R_3}$ по углу поворота можно только с большой погрешностью.



5. Соберите схему, представленную на рисунке, используя резисторы из прошлой работы.

6. Сбалансируйте мост, меняя сопротивление потенциометра. Определите сопротивление неизвестного резистора. Сравните результаты.

Увеличить точность можно используя многооборотный потенциометр со специальной ручкой — счётчиком оборотов (ссылка).