Цифра в регионы

Методическое пособие по использованию информационных технологий в преподавании математики

Проект реализуется
в рамках федерального проекта
«Кадры для цифровой экономики»
национальной программы
«Цифровая экономика Российской Федерации»
государственной программы Российской Федерации
«Развитие образования»

2020

Авторы и составители:

Сальникова Елена Игоревна -

Брославская Ольга Николаевна - учитель математики, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Гаврикова Ольга Сергеевна - учитель математики первой категории, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Морев Константин Валерьевич - учитель математики, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Зайцева Ольга Сергеевна - учитель математики, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Наливайко Святослав Игоревич - учитель математики, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Галицкий Борис Васильевич - учитель математики, АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы

Содержание

1 Введение

Данное пособие было задумано и написано до наступления пандемии и всеобщего дистанционного обучения. Реалии сегодняшнего дня таковы, что все мы, участники образовательного процесса, невольно погрузились в виртуальное пространство и вынуждены были освоить его правила. У кого-то это получилось лучше, у кого-то хуже.

Некоторые онлайн ресурсы уже публикуют аналитические отчеты о проведении обучения «на удаленке», Интернет пестрит сообщениями о высказываниях учителей в он-лайне и просьбах детей, вернуться к очному обучению.

Учителя, которые имеют опыт работы в школе, понимают, что реальный результат мы увидим, когда выйдем в офлайн. И нам нужно будет осознать этот результат и правильно использовать полученный опыт.

Учителя математики, подготовившие для Вас эти рекомендации, полагают, что они будут полезны и в ситуации обучения в очном режиме и в ситуации дистанционного обучения.

В методическом пособии представлены материалы, посвященные разным аспектам деятельности учителя.

Так материал Зайцевой О.С. носит скорее методологический характер, хоть и содержит примеры заданий, выполненных в парадигме системно-деятельностного подхода. Методология – основа деятельности учителя и мы не должны забывать о ней при использовании любых технологий, тем более информационных,чтобы не подменять содержание формой.

В материале об интеллект-картах, разобранном Моревым К.В. большое внимание уделяется формированию метапредметной способности структурировать свою деятельность, предметное содержание темы. Эти компетенции с полным основанием могут быть отнесены к регулятивным и познавательным, а использование различных Интернет-приложений развивает информационно-технологическую составляющую личности ребенка.

Использованию отдельных информационно-технологических инструментов посвящены разделы, подготовленные Гавриковой О.С. (Использование приложения GeoGebra на уроках геометрии) и Наливайко С.И. Особую ценность эти инструменты имеют благодаря возможности технологизировать рутинные процессы подготовки к уроку как учителя, так и учеников как в онлайн так и в офлайн режиме.

Разработка урока Браславской О.Н, представленная в виде технологической карты урока и приложений, содержащих задания и примеры их выполнения учащимися демонстрирует использование информационных технологий, позволяющих индивидуализировать процесс обучения с использованием информационных технологий. Особую ценность этот опыт представляет в связи с возможностью использования его в онлайн режиме, в частности для дистанционного обучения.

Использование Google приложений, представленных Галицким Б.В. показывает единую связку онлайн конференций, то есть объяснения нового материала и общения с учащимися, выдачу заданий с контролируемыми дедлайнами, возможность технологизировать проверку домашнего задания и обратной связи по сканированным работам.

Содержание:

1. Брославская О.Н. Вневписанная окружность. 9 класс, видео лекция по ссылке, работа в Google-документе с заданиями, созданными в Google-форме на онлайн доске. Задания отправляются на рабочий стол учителя и могут демонстрироваться остальным учащимся для анализа ошибок. В офлайн режиме это экономит время на написание решения на обычной доске для представления всему классу, в онлайн режиме это достойный способ коммуникации учителя с группой учащихся. Для продуктивной работы в онлайн режиме группы учащихся не должны превышать 15 человек.

2. Гаврикова О.С. Использование приложения GeoGebra на уроках геометрии в 10-11 классе в офлайн режиме. При работе онлайн данный инструмент может быть использован учителем в режиме демонстрации экрана в любых доступных конференциях.

3. Морев К.В. Технология интеллект-карт как способ структури-

рования предметного материала с использованием современных Интернет-приложений.

4. Зайцева О.С. Системно-деятельностный подход. Изложены основы системно-деятельностного подхода на внеурочной деятельности в 5-6 классах, приведены примеры заданий.

5. Наливайко С. И. Методика составления заданий с использованием инструментов Microsoft Excel. Использование ИКТ в повседневной деятельности учителя может существенно сэкономить время, отводимое на подготовку к урокам, поможет подготовить индивидуальные задания, выстроить персональную траекторию развития ученика. Учитель, владеющий инструментами Microsoft Excel и успешно использующий их в повседневной деятельности, формирует у учащихся ИКТ-компетенции просто потому, что один раз автоматизировав рутинную операцию (а именно это Microsoft Excel умеет делать великолепно) и учитель, и ученик будут делать это всегда. Просто потому что это удобно.

6. Галицкий Б.В. Приложения Google для работы с учениками онлайн и офлайн.

2 Использование Интернет-ресурсов на уроках математики.

2.1 Из опыта работы

Применение компьютеров, элементов электронно-цифровых ресурсов позволяет построить такую систему обучения, в которой разумное сочетание традиционных и инновационных форм и методов организации учебно-воспитательного процесса дает новое качество в передаче и усвоении системы знаний. Ученики, постоянно используют интернет-ресурсы и различные технические средства: компьютеры, мобильные устройства, телевидение. Ребята становятся более открытыми к совместному обучению и новым формам проведения уроков. Они считают именно видео-средства (обучающие видеофильмы, видеоролики), полезными, легкодоступными и эффективными средствами, помогающими им понять новый учебный материал. Тем более что на сегодняшний день интернет предоставляет широкие возможности по созданию и использованию готового учебного видеоматериала.

Именно благодаря разнообразию web-ресурсов, учитель имеет возможность повысить качество образовательных услуг. Внедрение новых методов обучения с применением информационно-коммуникационных технологий и электронных средств в учебный процесс создает условия повсеместного доступа к учебным источникам информации, отобранным или созданным видеоматериалам, что является важным компонентом для развития ИКТ - грамотности.

В настоящее время не вызывает сомнения актуальность и востребованность Интернета в процессе обучения школьников. Однако, использование Интернет-ресурсов на уроках не должно быть самоцелью. Для того, чтобы правильно определить место и роль Интернета в обучении математике, прежде всего, необходимо найти чёткие ответы на вопросы: для кого, для чего, когда, в каком объёме он должен использоваться.

Примером того, как можно ответить на эти вопросы является Технологическая карта урока, представленная в следующем параграфе 2.2.

Задания для учащихся представлены в параграфе 2.3.
Пример задания в Google-документе представлен в параграфе 2.4.
В параграфе 2.4 представлены примеры работ учащихся.

2.2 Технологическая карта к уроку

Тема занятия: Вневписанная окружность треугольника.
Класс: 9 физико-математический предпрофиль.
Цель занятия:

- ввести определение вневписанной окружности треугольника;
- исследовать свойства вневписанных окружностей треугольника;
- применять свойства вневписанной окружности при решении задач на доказательство и вычисление;
- формировать информационную грамотность и грамотность в области ИКТ и медиаобразования у учащихся.

Оборудование: ПК- 20 шт, интерактивная доска, локальная сеть, интернет.

Этап изучения	Деятельность учителя	Деятельность учащегося	Цель	Материалы	Контроль
Введение (подготовительный этап к уроку)	Подготовить материалы, направленные на активизацию учебно-познавательной деятельности учащихся. (Тест, задания группам).	Знакомятся с предложенной темой. Записывают домашнее задание: посмотреть видео-лекцию по ссылке; изучить предложенный материал;	Познакомиться с темой урока. Сформулировать домашнее задание и обсудить, как его выполнить.	Ссылка на видео-лекцию	Наблюдение

	Подготовить задания для групповой и индивидуальной работы. Сформулировать задания: посмотреть видео-лекцию по ссылке; изучить предложенный материал; записать вопросы, которые возникли во время просмотра видео лекции; подготовить группам вопросы для проверки полученных новых знаний для других групп. Уточнить списки групп, ответственных, предложения о составах групп. Учащимся представляется теоретический материал по теме «Вневписанная окружность». Его надо изучить самостоятельно с помощью видео-лекции по ссылке	записать вопросы, которые могут возникнуть во время просмотра видео лекции; подготовить группам вопросы для проверки полученных новых знаний для других групп.			
Дома (подготовительный этап)	Создать совместную доску с учащимися в Google-документе. Создать тест в Google-форме Создать задания группам в виде Google-документа. Подобрать задачи	Выполняют домашнее задание: просмотр онлайн лекции; составлени конспекта лекции (по желанию); фиксирование в листе учета вопросов, затруднений, которые возникли при изучении материала; продумывают и обсуждают в группах вопросы, которые можно задать другим группам для обсуждения домашнего задания.	Изучить самостоятельно предложенный теоретический материал по теме: «Вневписанная окружность треугольника». Выполнить задания.	Видео - лекция или поиск информации по теме из других источников	Конспект лекции, лист учета вопросов, затруднений по данной теме. Перечень вопросов для других групп.
На уроке					

<table>
<tr><td colspan="6">На уроке вся работа направлена на решение проблем, сотрудничество, взаимодействие, применение знаний и умений в новой ситуации, создание учениками нового учебного продукта. Вопросы, возникающие у учащихся во время самостоятельного изучения теоретического материала, становятся хорошим стимулом для развития познавательной деятельности. Время урока уходит не на запоминание материала, а на более глубокое понимание его и анализ.

Роль учителя заключается в создании учебной ситуации для самостоятельной, свободной, творческой познавательно-исследовательской деятельности учащихся, работая в которой, они будут ответственными за свое обучение.</td></tr>
<tr><td>1 Этап</td><td>Учитель делает введение, объясняет, как будет проходить работа на уроке. Отвечает на вопросы учащихся. Формулировка целей занятия</td><td>Слушают, задают вопросы по ходу проведения занятия.</td><td>Создать условия для возникновения у учащихся внутренней потребности включения в учебную деятельность.</td><td>Составление плана решения проблем, возникших при выполнении домашнего задания</td><td></td></tr>
<tr><td>2 этап</td><td>Учитель записывает тему занятия. Ставит перед учащимися задачу сформулировать цели занятия, которые они ставят перед собой при изучении заявленной темы. Обобщает цели учащихся.</td><td>Слушают выступления одноклассников, формулируют цели, которые ставят перед собой на уроке при изучении данной темы.</td><td>Определить роль каждого ученика в учебном процессе, уметь ставить перед собой цели и намечать пути их выполнения.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 этап</td><td>Учитель заслушивает вопросы учащихся, которые возникли у них при изучении нового материала. Намечает пути их ликвидации.</td><td>Формулируют вопросы возникшие при изучении нового материала. Участвуют в составлении плана ликвидации возникнувших проблем.</td><td>Определить проблемы, возникнувшие при изучении нового материала. Составить план решения проблем, возникших при выполнении домашнего задания. Формулировка вопросов по теме.</td><td>Лист учета, вопросы, затруднения.</td><td></td></tr>
</table>

4 этап	Учитель рассматривает вопросы учащихся, дает ответы на вопросы, анализирует проблемы, которые возникли при просмотре видео- лекции.	Задают вопросы. Помогают отвечать на вопросы одноклассников. Предлагают свои пути выхода из затруднений, которые возникли при самостоятельном изучении темы.	Анализ вопросов и проблем, возникших у учеников в процессе подготовки к занятию		
5 этап Первичная проверка усвоения знаний	Учитель предлагает работу в Google-документе. Выполнить Задание 1: продолжить предложение; сделать вывод (задание исследовательского направления); решить задача с элементами исследования (задачи группам разные); сделать вывод; сформулировать вывод в виде утверждения; отправить результаты выполнения Задания 1 учителю (на рабочий стол); Консультирует учащихся, проверяет поступившие работы, анализирует ошибки, если таковы есть.	Учащиеся работают в Google-документе по группам: выполняют задание; делают выводы; формулируют утверждения; оформляют решение Задания 1 в группах; отправляют Задание 1 на проверку учителю.	Первичная проверка усвоения знаний; вовлечение учащихся в исследовательскую деятельность; применение информационных технологий: отработка навыков переработки и выдачи информации; формирование коллективной ответственности и индивидуальной помощи каждому участнику группы как со стороны учителя, так и со стороны одноклассников.	Google-документ	Документ на столе учителя. Вывод учащихся после выполнения заданий.
6 этап	Учитель дает установку учащимся по работе на данном этапе: в Google-классе выполнить тест; сделать вывод о своей готовности к выполнение заданий дальше. Анализирует результаты выполнения теста	Каждый выполняет Google-тест	Проверка готовности учащихся к более глубокому пониманию материала и созданию нового учебного продукта. Развитие личностных и социальных умений при работе в группах	Google-тест	Результат теста; самоанализ готовности к выполнению заданий направленных на анализ, синтез и оценивание полученных знаний.

7 этап	Учитель дает установку по выполнению. Группы работают в Google-документе. Задание 5 исследовательского направления (задачи для групп разные) Необходимо: выполнить задание; сделать вывод; оформить; представить учителю на рабочий стол; представитель от каждой группы защищает решение и выводы группы по задаче. Учитель координирует обучение учащихся, консультирует, при возникновении затруднений, оказывает помощь группе и создает учебно-проблемную ситуацию для познавательно-исследовательской деятельности.	Учащиеся в группах выполняют задание, делают вывод по итогам решения. Представляют свой учебный продукт классу. Представители других групп записывают получившиеся формулы, выводы в тетрадях.	Выполнить задания, направленные на анализ, синтез. Выявить уровень полученных знаний. Создать условия для групповой работы.	Google-документ	Представляют свой учебный продукт классу
8 этап	Учитель дает установку. Задание 6 на доказательство (у каждой группы индивидуальное задание): выполнить задание в группах; оформить; представить учителю на рабочий стол; представитель каждой группы защищает решение и выводы группы по заданию 6.	Работают в группах в Google-документе. Выполняют задание, делают вывод, записывают результат, отправляют решение на рабочий стол учителя, представляют результат своей работы для учащихся других групп, записывают в тетрадь результаты и выводы других групп.	Создать условия для групповой работы; развивать познавательную деятельность учащихся, в ходе которой, они открывают для себя новые знания.	Google-документ	Представляют свой учебный продукт классу. Лист учета достижений

	Учитель координирует обучение учащихся, консультирует, при возникновении затруднений, оказывает помощь группе и создает учебно-проблемную ситуацию для познавательно-исследовательской деятельности.	Подводят итоги, анализируют новые учебные знания, полученные при выполнении Задания 6.			
9 этап	Учитель дает инструкцию по выполнению Заданий 7-8. Осуществляет координацию обучения; при необходимости проводит консультирование групп. Проверяет задания на рабочем столе, оказывает методическую помощь.	Выполняют задания 7-8. Решение задач отправляют учителю на рабочий стол. Задают вопросы по решению задачи 7 или задачи 8, если они возникают в процессе решения и обсуждения задачи в группе.	Определить направление применения полученных знаний в дальнейшем; Применять свойства вневписанной окружности при решении задач	Google-документ	Представляют свои решения
10 этап	Учитель подводит итог занятия. Фиксирует неразрешенные на уроке затруднения, как направления будущей учебной деятельности	Заполняют свои листы учета, подводят итоги своей работы. Высказывают свои затруднения, которые возникали на различных этапах занятия, предлагают план по выходу из затруднений.	Зафиксировать новое содержание, изученное на уроке. Анализ проделанной работы, анализ работы всех членов группы. Самоанализ собственной деятельности каждого учащегося на уроке с точки зрения достижения поставленных в начале занятия целей.	Лист учета достижений	Рефлексия. Оценка каждой группы своей деятельности оценка каждого учащегося в отдельности.

2.3 Задание группам

Задание 1

Задание 1 группе

Пусть на плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые. Най-

дите все точки, равноудалённые от этих трёх прямых.
Вывод

Задание 2 группе
Пусть на плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые. Найдите все точки, равноудалённые от этих трёх прямых.
Вывод

Задание 3 группе
Пусть на плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые. Найдите все точки, равноудалённые от этих трёх прямых.
Вывод

Задание 4 группе
Пусть на плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые. Найдите все точки, равноудалённые от этих трёх прямых.
Вывод

Задание 2

Задание 1 группе
Продолжить предложение:
Вневписанной окружностью называется окружность ...

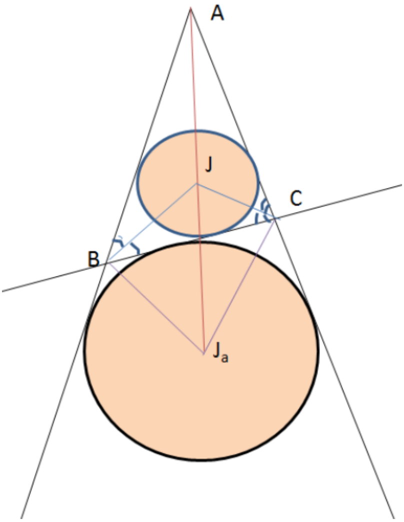
Задание 2 группе
Продолжить предложение:
Вневписанной окружностью называется окружность ...

Задание 3 группе
Продолжить предложение:
Вневписанной окружностью называется окружность ...

Задание 4 группе
Продолжить предложение:
Вневписанной окружностью называется окружность ...

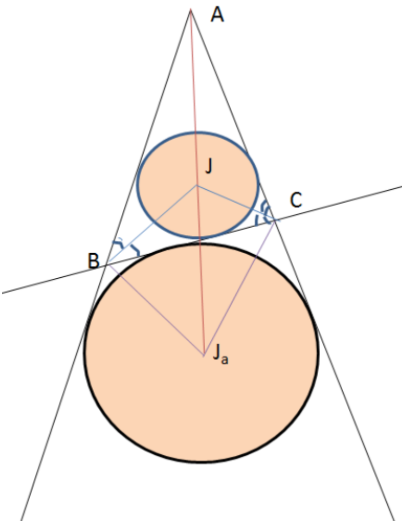
Задание 3

Задание группе 1
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Чему равен угол $\angle BJC$?



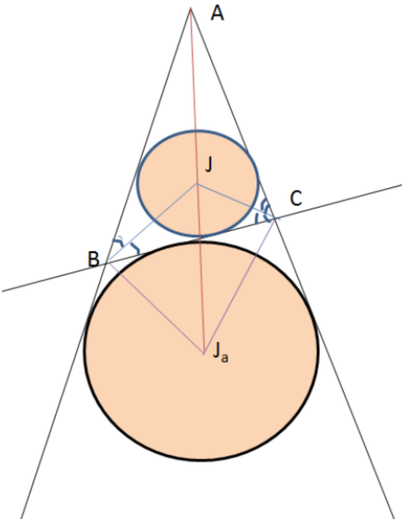
Ответ: $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

Задание группе 2
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Чему равен угол $\angle BJC$?



Ответ: $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

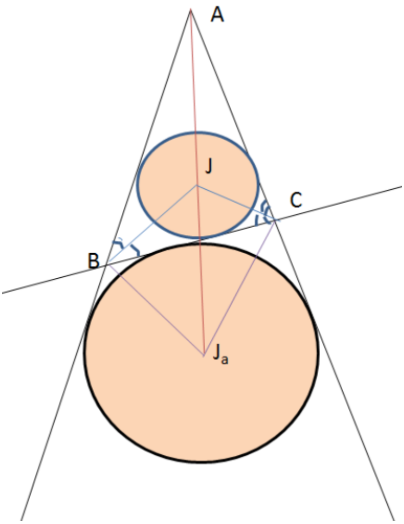
Задание группе 3
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Чему равен угол $\angle BJ_aC$?



Ответ: $90° - \frac{\alpha}{2}$

Задание группе 4

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Чему равен угол $\angle BJ_aC$?



Ответ: $90° - \frac{\alpha}{2}$

Задание 4

Задание 1 группе
Выполнить тест

1. На плоскости отметили все точки, равноудаленные от двух пересекающихся прямых. Какое множество точек может оказаться отмеченным?
   а) точка; б) две точки; в) четыре точки; г) окружность; д) луч; е) два луча; ё) прямая; ж) две прямые.
   Ответ:
2. Точка J – центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJC, \angle AJC$?
3. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJ_aC, \angle AJ_cB$?
4. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$,$\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle AJ_aB, \angle CJ_cB$?

Задание 2 группе
Выполнить тест

1. На плоскости отметили все точки, равноудаленные от двух пересекающихся прямых. Какое множество точек может оказаться отмеченным?
   а) точка; б) две точки; в) четыре точки; г) окружность; д) луч; е) два луча; ё) прямая; ж) две прямые.
   Ответ:
2. Точка J – центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJC, \angle AJC$?

3. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJ_aC, \angle AJ_cB$?

4. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$,$\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle AJ_aB, \angle CJ_cB$?

Задание 3 группе
Выполнить тест

1. На плоскости отметили все точки, равноудаленные от двух пересекающихся прямых. Какое множество точек может оказаться отмеченным?
а) точка; б) две точки; в) четыре точки; г) окружность; д) луч; е) два луча; ё) прямая; ж) две прямые.
Ответ:

2. Точка J – центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJC, \angle AJC$?

3. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJ_aC, \angle AJ_cB$?

4. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$,$\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle AJ_aB, \angle CJ_cB$?

Задание 4 группе
Выполнить тест

1. На плоскости отметили все точки, равноудаленные от двух пересекающихся прямых. Какое множество точек может оказаться отмеченным?
   а) точка; б) две точки; в) четыре точки; г) окружность; д) луч; е) два луча; ё) прямая; ж) две прямые.
   Ответ:

2. Точка J – центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJC, \angle AJC$?

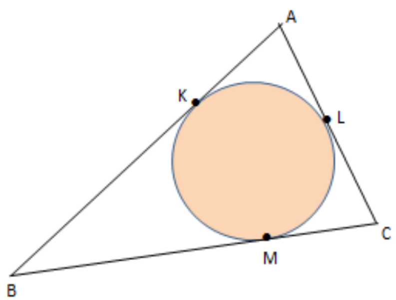
3. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$, $\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle BJ_aC, \angle AJ_cB$?

4. Точки J_a и J_c - центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и AB соответственно? Известно, что $\angle A = 64°$,$\angle B = 32°$. Чему равны следующие углы $\angle AJ_aB, \angle CJ_cB$?

Задание 5

Задание 1 группе

Задача: В треугольник вписана окружность. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания, если $AC = c$, $AB = a$, $BC = b$.

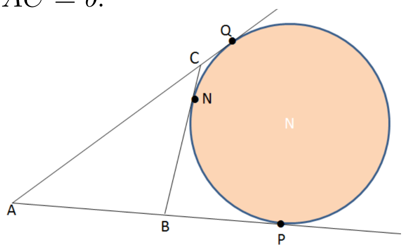


Ответ:

$AK = p - b$
$BM = p - c$
$CM = p - a$

Задание 2 группе

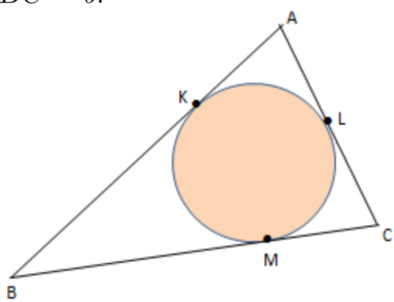
Задача: Пусть вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке N и продолжений сторон AB и AC соответственно в точках P и Q. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания с вневписанной окружностью, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.



Ответ:
$AQ = p$
$AP = p$

Задание 3 группе

Задача: В треугольник вписана окружность. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания, если $AC = c$, $AB = a$, $BC = b$.

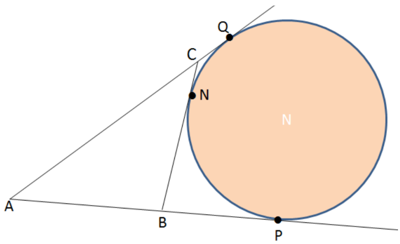


Ответ:
$AK = p - a$
$BM = p - b$

$CM = p - c$

Задание 4 группе

Задача: Пусть вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке N и продолжений сторон AB и AC соответственно в точках P и Q. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания с вневписанной окружностью, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

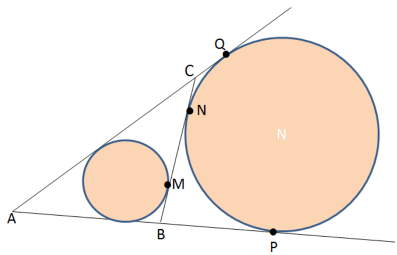


Ответ:
$AQ = p$
$AP = p$

Задание 6

Задание 1 группе

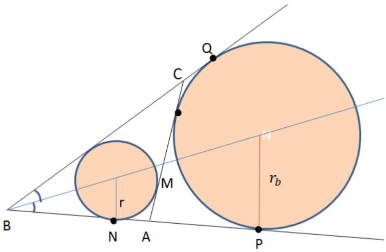
Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей с одной и той же стороной располагаются на одинаковом расстоянии от вершин треугольника.



Доказать, что $BM = CN$.

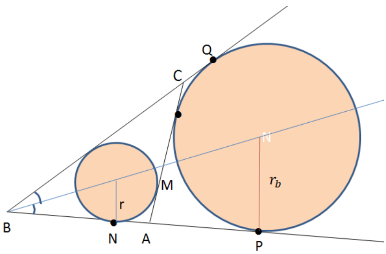
Задание 2 группе

Докажите, что $r_a = \frac{S}{p-a}$; $r_b = \frac{S}{p-b}$; $r_c = \frac{S}{p-c}$.



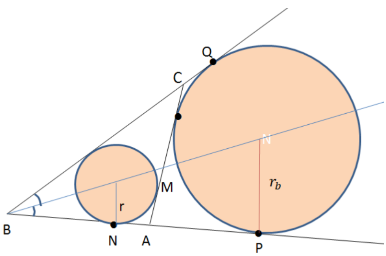
Задание 3 группе

Докажите, что $S_{ABC} = (p-a)r_a$



Задание 4 группе

Докажите, что а) $S_{ABC} = \sqrt{r_a r_b r_c r}$; б) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.



Задание 7

(решение задачи отправить учителю на рабочий стол)
Стороны треугольника равны 10;10; 12.Найти радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

Задание 8

(решение задачи отправить учителю на рабочий стол)
Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML - в точке A. Вторая окружность с центром в точке O_1 касается основания ML и продолжения боковых сторон.
а) Докажите, что треугольник OLO_1 - прямоугольный.
б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 6 и $AK = 2$.

2.4 Примеры работ учащихся

Задача: *В треугольник ABC вписана окружность. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания, если $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$.*

Пример 1
$MC = LC$, $AB = a$
$BM = BK$, $AC = c$
$AK = AL$, $BC = b$

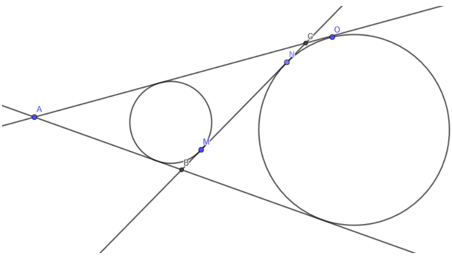
$$p = \frac{MC + LC + BM + BK + AK + AL}{2} = MC + BM + AK$$

$$\left.\begin{array}{l} AK = p - MC - BM \\ MC + BM = BC = b \end{array}\right\} \Rightarrow AK = p - b$$

$$\left.\begin{array}{c} BM = p - AK - MC \\ AK + MC = AC = c \end{array}\right\} \Rightarrow BM = p - c$$

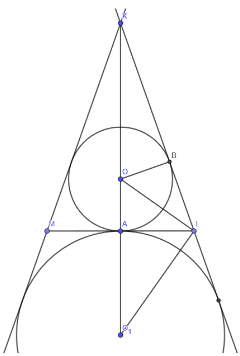
$$\left.\begin{array}{c} CM = p - MB - AK \\ MB + AK = a \end{array}\right\} \Rightarrow MC = p - a$$

Пример 2



$BM = p - AC$
$CN = CO$ (из свойства касательных, проведенных из одной точки)
$AO = p \Rightarrow CN = CO = p - AC$
$CN = BM$

Пример 3

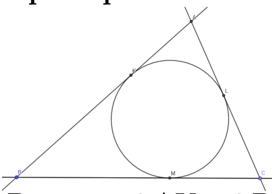


a)
OL - биссектриса $\angle BLM$
O_1L - биссектриса $\angle MLK$
$\angle BLM$ и $\angle MLK$ - смежные
$\Rightarrow OLO_1 = 90^\circ$ (образован биссектрисами смежных углов)
b)
$KO = AK - AO = AK - r = 16 - 6 = 10$
$KL^2 = AL^2 + AK^2 \Rightarrow (x + KB)^2 = x^2 + AK^2$
$x = BL = AL > 0 \; (BL = AL)$
$x^2 + 2x \cdot KB + KB^2 = x^2 + AK^2$
$2x \cdot KB + KB^2 = AK^2 \Rightarrow x = \frac{AK^2 - KB^2}{2KB}$

По теореме Пифагора: $KB^2 = OK^2 - OB^2 = 100 - 36 = 64$
$x = \frac{256-64}{2 \cdot 8} = 16 - 4 = 12$
$AL = \sqrt{OA \cdot O_1 A} \Rightarrow O_1 A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{144}{6} = 24$
Ответ: 24.

Задача 2 (решение задачи отправить учителю на рабочий стол)
Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML - в точке A.
Вторая окружность с центром в точке O_1 касается основания ML и продолжения боковых сторон.
а) Докажите, что треугольник OLO_1 - прямоугольный.
б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 6 и $AK = 24$.

Пример 1

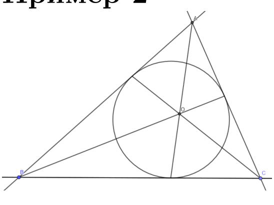


Из свойства касательных, опущенных из одной точки: $KA = AL$; $KB = BM$; $CM = CL$
$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = AK + AL + CL + CM + BM + BK$
Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$
$P_{\triangle ABC} = 2AK + 2BM + 2CM \Rightarrow p = AK + BM + CM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} AK = p - (BM + CM) = p - b \\ BM = p - (CM + AK) = p - c \\ CM = p - (AK + BM) = p - a \end{cases}$$

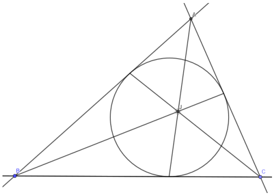
Отрезки касательной проведенной из вершины к точке касания с вневписанной окружностью равны p.

Пример 2



$\angle C = 180° - 56° - 92° = 124° - 92° = 32°$
$\angle BOA = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - \frac{56° + 92°}{2} = 180° - 28° - 46° = 106°$
$\angle COA = 180° - \frac{\angle A + \angle C}{2} = 180° - \frac{32° + 56°}{2} = 180° - 16° - 28° = 136°$

Пример 3



$\angle ABJ = \angle JBC = \alpha$
$\angle ACJ = \angle JCB = \beta$
$(2\alpha + 2\beta) = 180^\circ - \alpha$
$\alpha + \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$
$\angle BJC = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

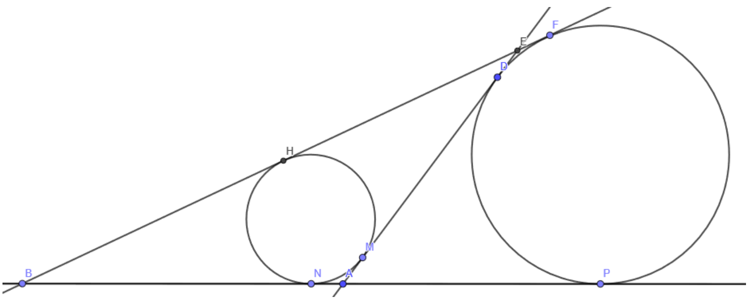
Пример 4

Докажем, что $S_{ABC} = r_a(p-a)$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r_a - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

а)

$\triangle BON \sim \triangle BOP$ по двум углам: $\angle BNO = \angle BPO_a = 90^\circ$; $\angle B$ - общий.

$\Rightarrow \frac{BN}{BP} = \frac{NO}{PO_a} \Rightarrow BN \cdot PO_a = BP \cdot NO \Rightarrow BN \cdot r_a = BP \cdot r$ [1]



$EF + ED + DA + PA = 2(\beta + \gamma) \Rightarrow EF + AP = \beta + \gamma$
$(BH+HE+EF)+(BN+NA+AP) = 2(BH+HE+EF) = 2(\alpha+\beta+\gamma)$
$\Rightarrow BH + HE + EF = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow EF = \gamma$ и $AP = \beta$
$BP = \alpha + \beta + \gamma = p$
$NP = \gamma + \beta$
$BN = p - (\gamma + \beta) = p - b.$
Из [1]: $(p-b)r_b = pr \Rightarrow (p-b)r_b = S_{ABC}$

$$\begin{cases} (p-b)r_b = S \\ (p-a)r_a = S \\ (p-c)r_c = S \\ p \cdot r = S \end{cases}$$

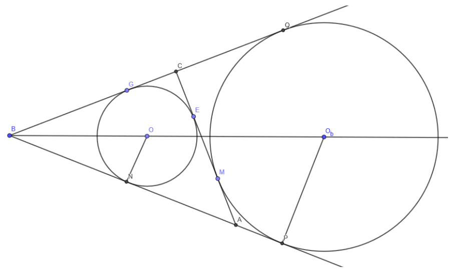
$\Rightarrow S^4 = r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r \cdot p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow S^4 = r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r \cdot S^2 \Rightarrow S^2 = r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}}$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \\ \frac{p}{S} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = 3p - (a+b+c) \\ p = 3p - 2p \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}$$

Пример 5



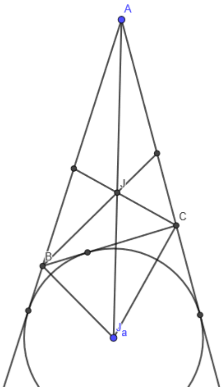
$S_{abc} = (p-b) \cdot r_b$
$\frac{ON}{O_bP} = \frac{BN}{BP}$ ($\triangle BON \sim \triangle BO_bP$, т.к. $\angle BNO = \angle BPO$ и $\angle OBN$ - общий)
$\frac{r}{r_b} = \frac{BN}{p}$
$S_{abc} = rp = r_b \cdot BN$
$BN = p - AC = p - b \Rightarrow S_{abc} = r_p = r_b(p-b)$

Пример 6

$$\left.\begin{array}{l} BK = BH = \beta \\ AK = AC = \alpha \\ CL = CH = \gamma \end{array}\right\}$$

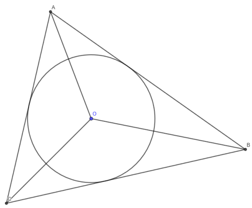
$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = P$; $\alpha + \beta + \gamma = p$
$AK = \alpha = p - (\beta + \gamma) = p - BC = p - b$
$BM = \beta = p - (\alpha + \gamma) = p - AC = p - c$
$CM = \gamma = p - (\alpha + \beta) = p - AB = p - a$

Пример 7



$$180^\circ - (90^\circ + \tfrac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}$$
$$\angle BJC = 180^\circ - (\tfrac{\angle B}{2} + \tfrac{\angle C}{2})$$
$$180^\circ = \angle B + \angle C + \alpha \Rightarrow \angle BJC = 90^\circ + \tfrac{\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow \angle BJ_aC = 360^\circ - 90^\circ \cdot 2 - 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2} = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}$$

Пример 8



$$\angle BOA = 180^\circ - \tfrac{92^\circ}{2} - \tfrac{56^\circ}{2} = 180^\circ - 46^\circ - 28^\circ = 106^\circ$$
$$\angle AOC = 90^\circ + \tfrac{92^\circ -}{2} = 90^\circ + 46^\circ = 136^\circ$$

3 Примеры использования приложения Geogebra

Одной из основных проблем на уроках геометрии в старшей школе является затруднение учащихся при построении изображений стереометрических фигур по условиям задачи. Неверный или недостаточно наглядный и аккуратный чертеж может привести к потере времени и/или ошибкам в решении.

Применение приложения Geogebra дает возможность:

- быстро и правильно изображать фигуры;
- модифицировать их под условия задачи;
- визуально и технически измерять неизвестные величины.

GeoGebra (geogebra.org) - это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику. Для задач геометрии в ней можно создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых, плоскостей, строить перпендикулярные и параллельные данной прямой линии или плоскости, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные, определять меру углов, длины отрезков, площади многоугольников и т. д.

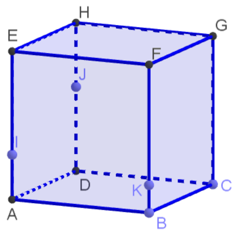
Возможные способы использования GeoGebra на уроках:

- приложение может быть установлено только на учительском компьютере и демонстрироваться на экран;
- занятия могут проходить в компьютерном классе, где учащиеся по одному или в парах создают электронные чертежи;
- преподаватель может дать подробную инструкцию, а учащиеся практиковаться дома на личных ПК или смартфонах.

Инструментарий приложения позволяет строить чертежи различными способами. Например, треугольник можно построить через три точки, соединенные отрезками, как три отрезка с общими концами или как многоугольник с количеством вершин 3. Набор разрешенных для использования инструментов должен зависеть от целей урока и типа решаемой задачи.

Рассмотрим несколько примеров применения GeoGebra в процессе обучения геометрии.

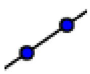
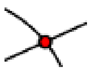
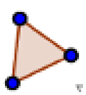
Пример 3.1. Знакомство с новым методом построения.



Задача: Постройте сечение куба $ABCDEFGH$ плоскостью (IJK) методом следов.

Так как цель учителя – показать, как сечение должно быть построено «на бумаге», то использовать будем Инструменты для «классического построения» (использование только циркуля и линейки без делений и базовых построений (деление отрезка и угла пополам, построение угла, равного данному, построение параллельной или перпендикулярной прямой).

Используемые инструменты GeoGebra:

-  - прямая через 2 точки;
-  - точка пересечения;
-  - многоугольник по точкам.

План построения:

1. проведем прямую IK и прямую AB, L - точка пересечения IK и AB;

2. проведем прямую IJ и прямую AD, M – точка пересечения IJ и AD;

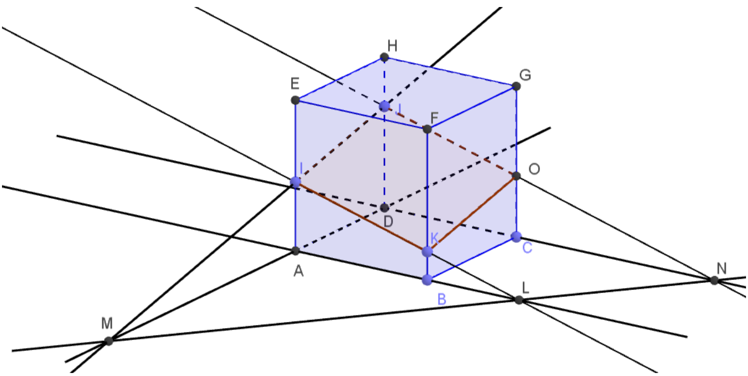
3. проведем прямую ML – след секущей плоскости на плоскость нижнего основания;

4. проведем прямую CD, N – точка пересечения ML и CD;

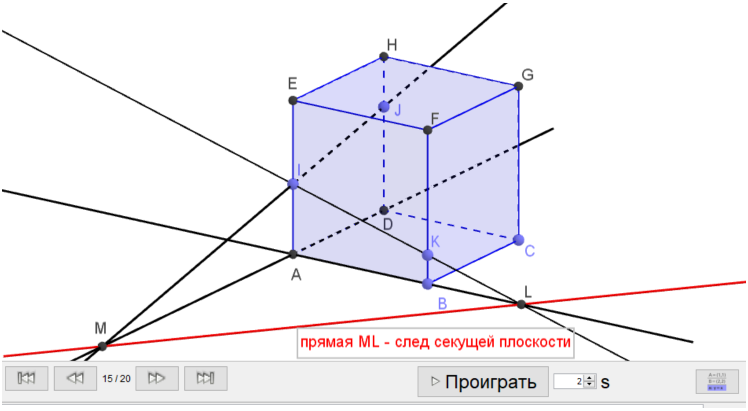
5. проведем прямую JN, O – точка пересечения JN и ребра GC;

6. $IJOK$ – искомое сечение.

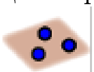
В результате построение получим интерактивный чертеж (при перемещении точек I, J или K сечение меняется).



В Панели объектов видна последовательность создания объектов. При необходимости можно использовать пошаговую демонстрацию, чтобы показать «динамику» построения. Есть возможность добавить пояснения на чертеж для каждого шага.



После построения сечения можно проверить правильность при помощи встроенных инструментов GeoGebra.

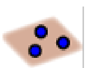
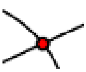
 - проведение плоскости через 3 данные точки.

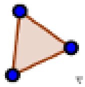
Пример 3.2. Задача-исследование.

Задача: Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, принадлежащие ребрам куба. Какие возможные фигуры в сечении плоскостью куба могут быть получены? От чего это зависит?

Учащемуся предлагается рассмотреть несколько вариантов выбора трех случайных точек на ребрах куба (в том числе и принадлежащие одной грани). В данном случае использование инструментов «классического построения» технически усложнит задачу и увеличит время исследования. Поэтому здесь можно использовать готовый Инструмент - проведение плоскости через 3 данные точки.

Используемые инструменты GeoGebra:

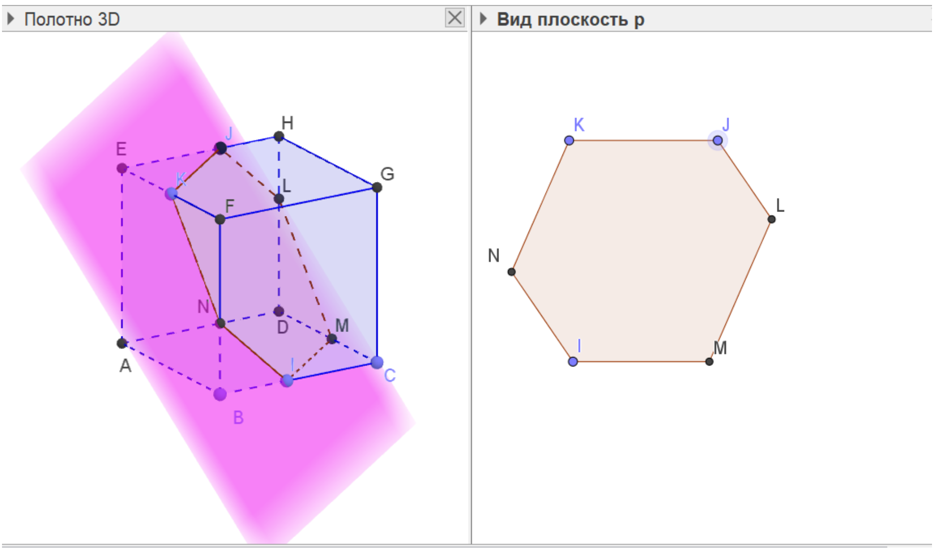
-  - плоскость через 3 точки;
-  - точка пересечения;

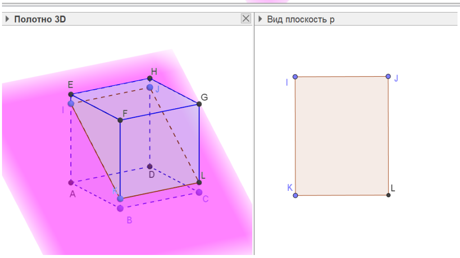
-  - многоугольник по точкам.

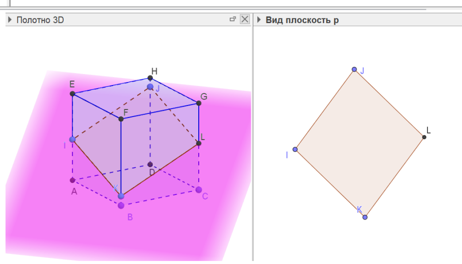
План построения:

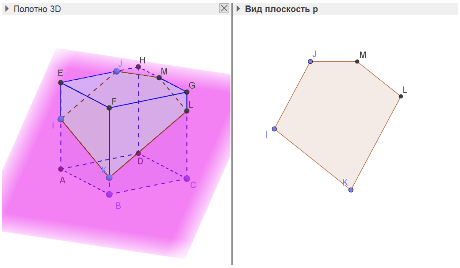
1. проведем плоскость через точки IJK;
2. отметим точки пересечения плоскости с ребрами куба;
3. соединим точки, найденные в предыдущем пункте, полученный многоугольник - искомое сечение.

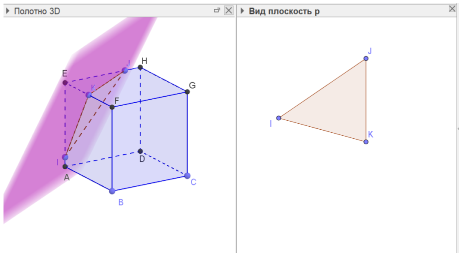
Для наглядности и определения вида многоугольника, полученного в сечении, предлагается использовать функцию вывода плоскости сечения на отдельное Полотно.





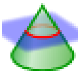




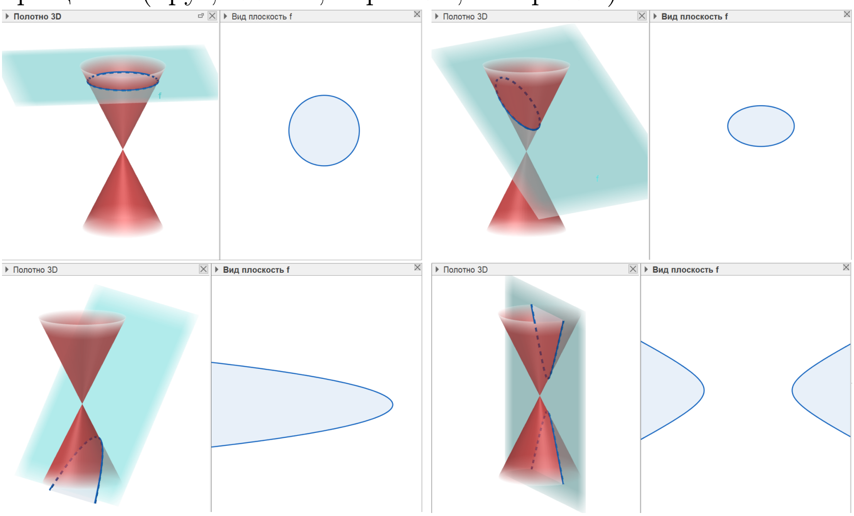


Этот же прием рассмотрения сечения на отдельной плоскости удобно использовать при демонстрации решения задач на вычисление площади сечения (№14. б из ЕГЭ, профильный уровень)

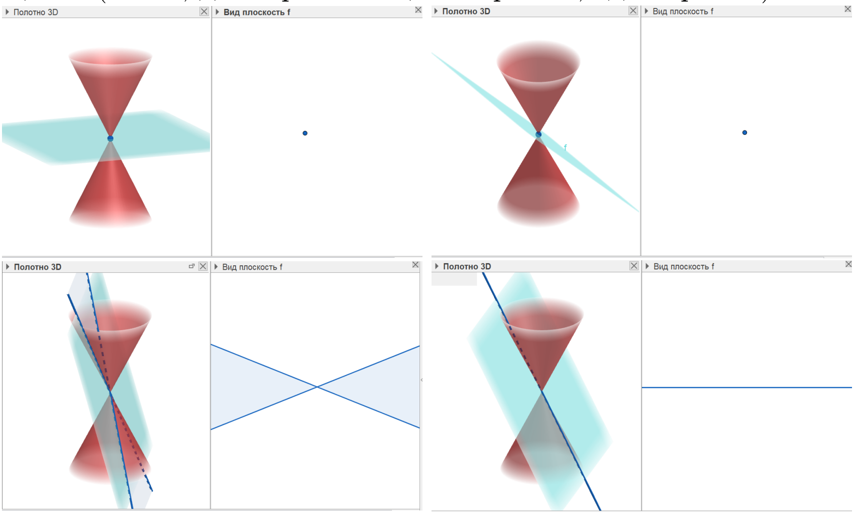
Задача: Рассмотрите возможные виды кривых пересечения плоскостью конической поверхности вращения.

Построения для исследования и определение кривых, полученных при пересечении фигур удобно моделировать при помощи Инструмента:  - кривая, полученная пересечением объекта и плоскости. В таком случае не обязательно привязывать построение плоскости сечения к точкам данной фигуры.

1. Плоскость не проходит через вершину конической поверхности вращения (круг, эллипс, парабола, гипербола).



2. Плоскость проходит через вершину конической поверхности вращения (точка, две пересекающиеся прямые, одна прямая).



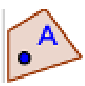
Пример 3.3. Задачи на нахождение ГМТ (геометрического места точек).

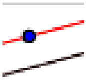
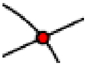
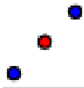
Некоторым учащимся сложно решать задачи на нахождение ГМТ в пространстве. Часто в таких заданиях нужно представлять бесконечное множество стереометрических объектов, обладающих определенным свойством, и выявлять закономерности при взаимодействии этих объектов с другими.

Для таких задач в качестве демонстрации или проверки найденного решения удобно использовать свойство объекта в GeoGebra «Оставлять след» (тогда при изменении или перемещении объекта будут оставаться видны все его прошлые изображения)

Задача. Найдите множество середин всех хорд данной шаровой поверхности, параллельных данной прямой l.

Используемые инструменты GeoGebra:

-  - точка на объекте;

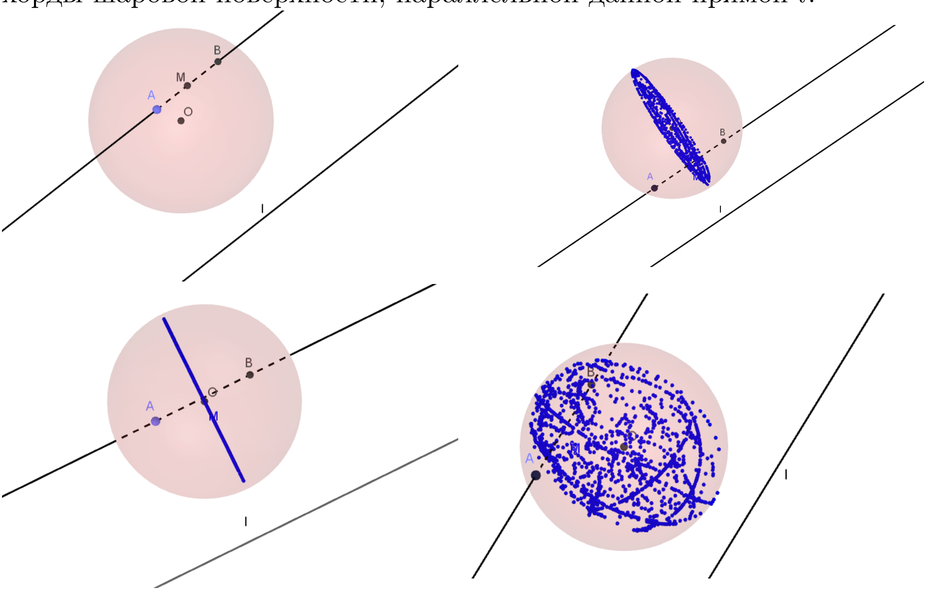
-  - параллельная прямая;
-  - точка пересечения.
-  - середина или центр.

План построения:

1. отметим – точку на шаровой поверхности;
2. проведем через точку прямую m, параллельную l, B – точка пересечения прямых m и l;
3. M – середина отрезка AB.

Для исследования ГМТ точек M произвольно перемещаем точку A по шаровой поверхности.

На чертежах появятся точки синего цвета – следы M – середины хорды шаровой поверхности, параллельной данной прямой l.



Видно, что искомое ГМТ – окружность радиуса, равного радиусу данного шара, в плоскости, проходящей через центр шара и перпендикулярной данной прямой. Для ответа на вопрос задачи останется только предъявить строгое доказательство этого.

Пример 3.4. «Проверь себя»

Не всегда задачи в учебниках и дидактических материалах публикуются с подробными решениями, а если решение есть, то обычно одним наиболее популярным методом. Иногда в сборниках встречаются задачи вообще без ответов. Для быстрого получения ответа без решения задачи или проверки промежуточных результатов также можно использовать Geogebra.

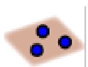
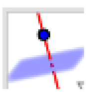
Задача. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16*, а высота пирамиды равна* 4*. На ребре AS отмечена точка K, причем $AK = 3$. Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.*

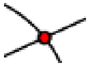
На примере этого задания рассмотрим способы применения Geogebra для получения конечных и промежуточных результатов решения задач.

3.4.1. Получение численного ответа.

В приложении можно построить точную модель, соответствующую условиям задачи: точкам, углам, расстояниям, отношениям объектов. Инструменты Geogebra для измерения фигур на созданном чертеже (меры углов, длины отрезков, расстояния между объектами) позволяют быстро получить численный ответ на вопрос задачи.

Используемые инструменты GeoGebra:

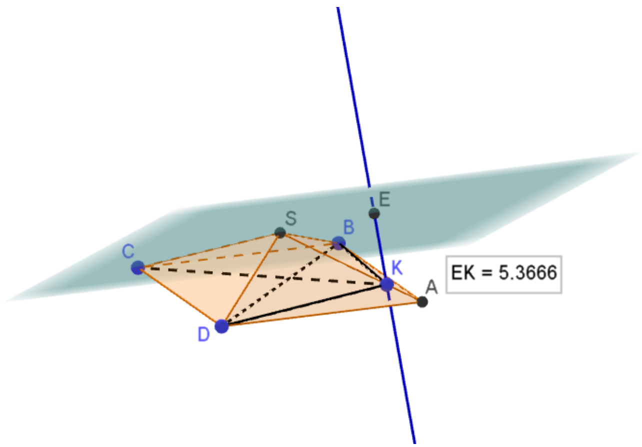
-  - плоскость через 3 точки;
-  - перпендикулярная прямая;

-  - точка пересечения.
- 

 - расстояние или длина.

План построения и измерения:

1. проведем плоскость через точки B, S и C;
2. построим перпендикуляр к плоскости (BSC) через точку K;
3. отметим E – пересечение перпендикулярной прямой и плоскости (BSC);
4. измерим длину отрезка EK;
5. полученное значение - расстояние между точкой K и плоскостью грани BSC.



При необходимости можно задавать количество знаков после запятой. В случае дробных и иррациональных ответов достаточно 4 знаков.

3.4.2. Разбиение фигуры и проверка промежуточных результатов при решении «методом объемов».

Иногда самым простым и быстрым способом нахождения расстояния между точкой и плоскостью является нахождение высоты пирамиды с вершиной в данной точке и основанием в рассматриваемой плоскости. Но учащиеся могут испытывать затруднение при поиске нужной пирамиды и вычислении ее объема. Geogebra позволяет наглядно показать разбиение данной пирамиды на несколько составляющих фигур.

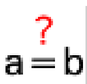
Для самопроверки есть возможность:

- измерить объемы и площади полученных фигур;
- сравнить с полученными результатами.

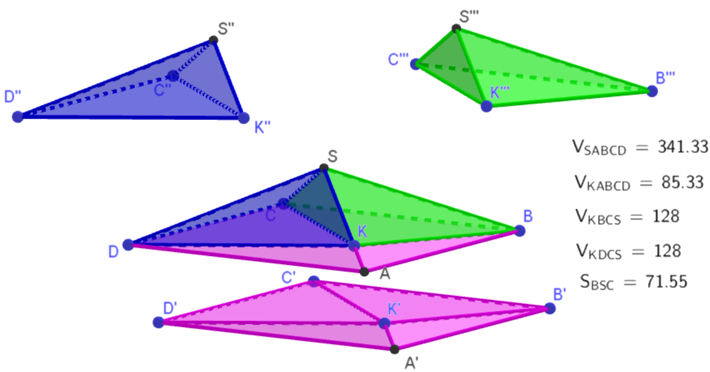
Используемые инструменты GeoGebra:

- 

 - измерение площади;
- 

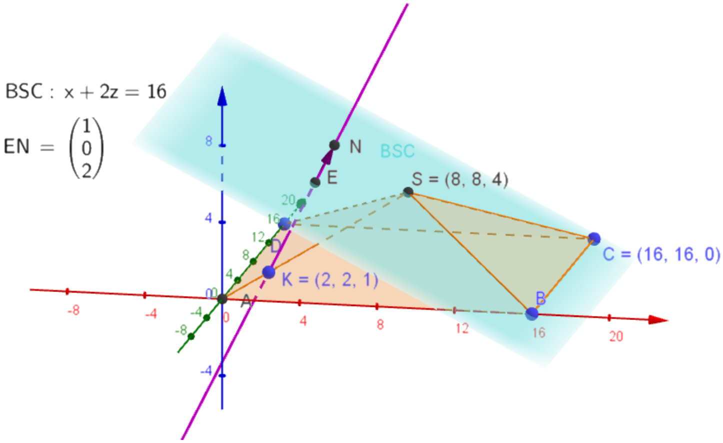
 - измерение объема;
- 

 - сравнение величин.



3.4.3. Получение координат точек, уравнений плоскостей и прямых при использовании координатного метода.

В случае построения чертежа в GeoGebra при решении задачи координатным методом, удобно использовать встроенную декартову систему координат. В этом случае можно задать при построении и увидеть для полученных объектов координаты каждой точки, векторов, уравнения прямых и плоскостей.



Использование приложения GeoGebra на занятиях геометрии в 10-11 классах позволит учителю и учащимся

- сэкономить время для подготовки чертежей, тем самым увеличив количество рассмотренных на уроке заданий;
- создавать наглядные модели для объяснения доказательств и решений задач;
- находить и исследовать сложные, не очевидные «с первого взгляда» закономерности и свойства геометрических объектов;
- находить ответы и проверять правильность промежуточных вычислений и утверждений на каждом этапе решения задачи, в том числе при использовании нестандартных методов.

4 Технология интеллект-карт на уроках математики

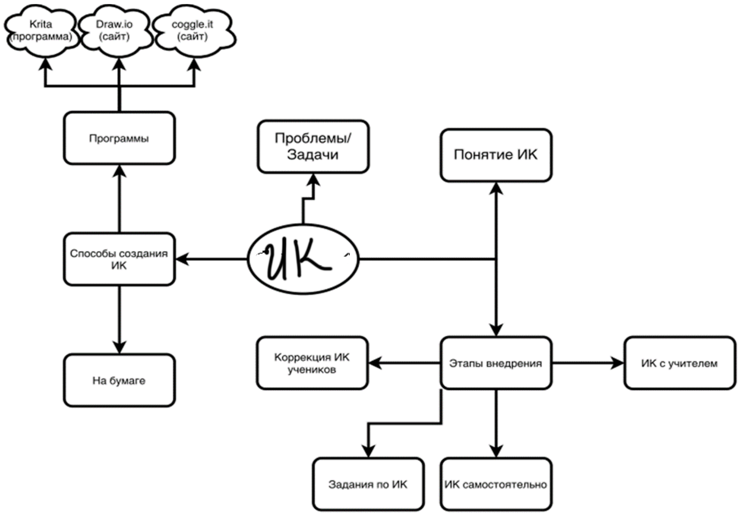
Перечислим некоторые вызовы современного общества, с которыми сталкивается или столкнется ученик:

- большие потоки информации;
- специфика изучаемых предметов (на примере математики);
- итоговые экзамены в конце 9 и 11 классов;
- требование профессионального сообщества «учиться всю жизнь»;
- собственные амбиции в развитии, в условиях ограниченности времени.

Поясним самый неочевидный пункт. Ученик на протяжении всего периода обучения должен владеть знаниями, полученными по математике ранее. Допустим он сдает ЕГЭ профильного уровня, где есть 16 вопрос, сложная планиметрия, которая последний раз основательно проходилась в 9 классе. В 10-11 классе изучается стереометрия и глубокая планиметрия повторяется от случая к случаю. И в данной ситуации многое зависит от учителя и ученика. Повторялись ли разделы планиметрии 8-9 класса перед ЕГЭ или нет, как они были усвоены в 8-9 классе. Здесь сходится много факторов: способности ученика, добросовестность и профессионализм учителя, особенности, учебного заведения и т.д. Для того, чтобы ученик легко запоминал информацию при изучении, знания оставались с учащимся надолго, чтобы он имел к ним легкий доступ целесообразно использовать технологию интеллект-карты на своих уроках.

Введем понятие интеллект-карты.

Интеллект-карта – аналитический инструмент структуризации объектов (идей, смысловых единиц, концепций, понятий и т.д.) с использованием графической записи в виде диаграммы, где в центре располагается основная информация и от нее радиально отходят связанные понятия. Примером может служить интеллект-карта, созданная для написания данных методических рекомендаций.



Для узкого понимания можно назвать интеллект-карту частично конспектом, частично визуальной шпаргалкой в схематичной форме, где одна смысловая единица это 1-2 слова. Но есть оговорка из практического опыта применения на уроках математики, правило 1-2 слов соблюдать целесообразно не всегда. Но первоначально автором задумывалось именно так.

На практике, в нашей учебной организации, использование интеллект-карт начинается в 8 классе и успешно реализуется в 8-11 класс. Веских оснований применять интеллект-карты раньше 8 класса нет.

Использование интеллект-карт на уроках математики включает в себя несколько шагов.

4.1 Шаг 1. Внедрение понятия интеллект-карт учащимся.

На данном этапе ученики вместе с учителем создают интеллект-карту по пройденной теме. Лучше это делать на заключительном занятии по большой теме. Нужно вспомнить все главные блоки (первое разветвление), содержание этих блоков (второе разветвление) и особенности для каждого блока, если они есть.

4.2 Шаг 2. Задание по созданию интеллект-карт для учащихся.

На следующей теме учащимся дается задание создать интеллект-карту самостоятельно. Еще раз устно обсуждается содержание, центровая идея. Важно, чтобы каждый ученик создал карту самостоятельно и учитель, давая задание ничего не рисовал на доске, так как это может повлиять на видение интеллект-карты учащимися.

4.3 Шаг 3. Корректировка интеллект-карт учащихся.

На первых порах учащиеся будут совершать ошибки, им будет казаться, что они в достаточной степени отразили тему, так как она еще достаточно свежа в их головах. Так же встречаются некоторые проблемы с логичностью изложения и последовательностью. Например, особый случай решения квадратного уравнения, когда коэффициенты $a + b + c = 0$. Ветка этой смысловой единицы может идти из центральной части, может быть перечислена в особых случаях, но никак не идти от дискриминанта. На данном этапе можно корректировать интеллект-карты учащихся двумя способами: педагог исправляет ошибки непосредственно у ученика или устраивается мозговой штурм (всем классом или маленькой группой). Это зависит от частоты встречаемости ошибок. Если они едничные, целесообразно общаться с учеником. Важно, чтобы ученику было комфортно, особенно в начале освоения технологии. Мы предупреждаем учеников, что за это в любом случае будет хорошая оценка, как только интеллект-карта будет соответствовать выработанным критериям.

4.4 Шаг 4. Задания по интеллект-картам.

Как только учащиеся поймут принцип создания интеллект-карт, их можно использовать не только как инструмент структурирования и запоминания материала, но и в качестве основы для проверки как предметных так и метапредметных знаний.

Вариативность заданий зависит от того, сформированность какого действия необходимо проверить.

Одно из самых эффективных — это взять готовую интеллект карту и стереть большую часть информации, чтобы учащиеся восстановили остальное – это познавательные результаты «анализ и синтез информации».

Так же можно предложить учащимся найти ошибки в уже готовой интеллект-карте. Ошибки могут быть как предметные, так и по принципам создания интеллект-карт (умение действовать по алгоритму), по структуре изложения (умение составлять план), полноте раскрытия темы (самопроверка и самоконтроль выполнения задания, критическое мышление по отношению к своим действиям).

Провести качественное исследование на репрезентативной выборке достаточно сложно, и поэтому мы не можем сделать статистически достоверный вывод о том, что эта технология решит все проблемы, но практика показывает, что попробовать стоит.

Из опыта можно сказать, что задание по интеллект-картам не вызывает сопротивления у учащихся, они его выполняют (очень часто добровольно) и получают от этого процесса удовольствие.

4.5 Программы для создания интеллект карт.

Хорошо, когда учащиеся делают интеллект-карту самостоятельно на бумаге по старинке. Именно так задумал автор методики Тони Бьюзен в 1960-х. Причина проста – не было ПК. Но сам автор пишет в своих статьях и книгах, что использование программного обеспечения не противоречит принципам создания интеллект-карт и поэтому их применение допускается. Преимущества здесь очевидны: вы можете со временем дополнять интеллект-карту, редактировать, отсылать одноклассникам/коллегам, и они могут переделывать ее под свои нужды, ее удобно хранить.

Можно выделить 3 инструмента создания интеллект-карт на компьютере (все представленные программы бесплатны):

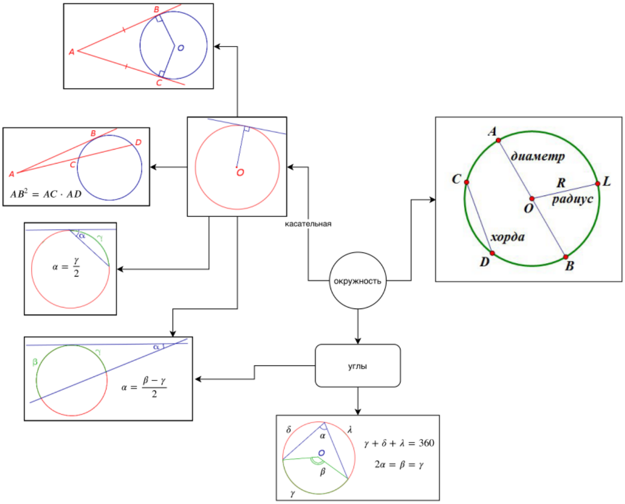
1. Krita – графический редактор, в котором все придется создавать самому. Требуется графический планшет. Польза в том, что вы ничем не ограничены и можете создавать любые требуемые формы.

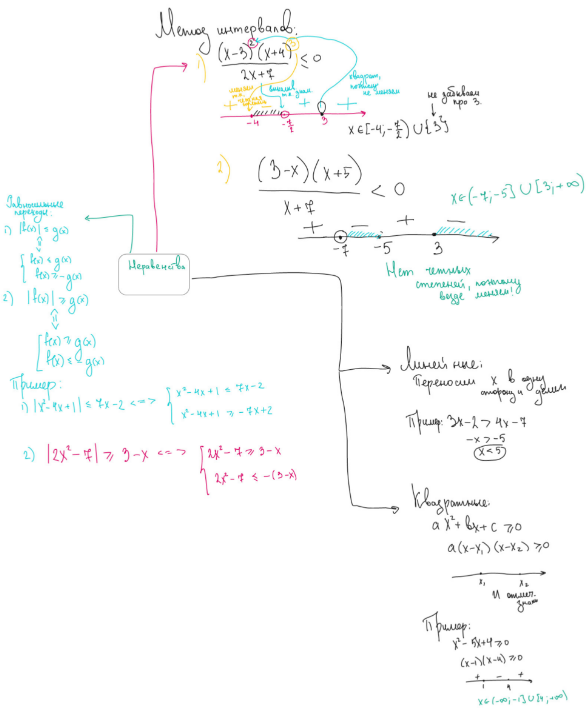
2. Coggle.it – браузерная программа, не требует установки на компьютер. Создана специально для интеллект-карт. Проста в освоении, быстра в реализации, и вы имеете доступ к своим интеллект-картам с любого устройства, что важно для учащихся.

3. Draw.Io – так же браузерная программа, обладает всеми преимуществами coggle.it, но имеет гораздо больше настроек и разнообразных форм.

Технология интеллект-карт позволяет преподносить, структурировать и запоминать информацию активизируя несколько каналов восприятия. По прошествии нескольких лет использования технологии можно говорить о ее эффективности при сдаче государственных экзаменов и долгосрочного запоминания информации, исходя из опыта педагогов лицея.

Тут представлены интеллект-карта слушателя курса и интеллект-карта учащегося лицея (8 класс) соответственно.


окружность
касательная
углы
A
B
C
D
L
O
R
диаметр
радиус
хорда
$AB^2 = AC \cdot AD$
$\alpha = \frac{\gamma}{2}$
$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$
$\gamma + \delta + \lambda = 360$
$2\alpha = \beta = \gamma$


Метод интервалов:
$\frac{(x-3)^2(x+4)^3}{2x+7} < 0$
не забываем про 3.
$x \in [-4; -\frac{7}{2}) \cup \{3\}$
$\frac{(3-x)(x+5)}{x+7} < 0$
$x \in (-7; -5] \cup [3; +\infty)$
Нет четных степеней, поэтому везде меняем!
Неравенства
Равносильные переходы:
Пример:
Линейные:
Переносим x в одну сторону и делим
Пример: $3x-2 > 4x-7$
$-x > -5$
$x < 5$
Квадратные:
$ax^2+bx+c \geq 0$
$a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$
Пример:
$x^2-5x+4 \geq 0$
$(x-1)(x-4) \geq 0$

5 Системно-деятельностный подход

«Если ученик в школе не научился сам ничего творить, то в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы, научившись копировать, умели сделать самостоятельное приложение этих сведений».

Л.Н. Толстой

В условиях современного общества, стремительного развития науки и техники и во исполнение Федерального закона РФ «Об образовании в Российской Федерации» важнейшей педагогической задачей является подготовка личности, способной самостоятельно приобретать новые знания и опыт и применять их в повседневной жизни. Постановка цели приводит к необходимости решения ряда педагогических проблем:

- повешению уровня математической компетентности обучающихся, обеспечивающую готовность к использованию математических знаний, умений, навыков для решения жизненных задачах или задач с межпредметными связями;
- в процессе обучения математики обеспечится формирование ключевых компетенций у школьников, умения учиться, учиться самостоятельно и творчески.

Как сказано в Стандарте: «В основе Стандарта лежит системно-деятельностный подход, который обеспечивает: формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию; . . . активную учебно-познавательную деятельность обучающихся; . . . »

В чем же заключается суть системно-деятельностного подхода?

Понятие «системно-деятельностныи подход» было введено в 1985 г. как объединение системного подхода (Б.Г. Ананьев, Б.Ф. Ломов и др.) и деятельностного подхода (Л.С. Выготскии, Л.В.Занков, А.Р. Лурия, Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов и др.).

Три опорных слова: система-деятельность-подход. Дадим им определения.

Система - множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство.

Деятельность - человеческая форма активного отношения к окружающему миру.

Подход - совокупность приёмов и способов в воздействии на кого (что) либо или в изучении чего-либо для получения определенного результата.

Основная идея этого подхода заключаются в том, что главный результат образования – это не отдельные знания, умения и навыки, а способность и готовность человека к эффективной и продуктивной деятельности в различных социально-значимых ситуациях.

Новые знания не даются учителем в готовом виде. Дети «открывают» их сами в процессе самостоятельной исследовательской деятельности. Это позволяет сформировать «математический» стиль мышления и повышает интерес учащихся к изучению математики.

Задача учителя при введении нового материала заключается не в том, чтобы все наглядно и доступно объяснить, показать и рассказать. Учитель должен организовать исследовательскую работу детей, чтобы они сами додумались до решения проблемы урока и сами объяснили, как надо действовать в новых условиях.

Функция учителя заключается не в обучении, а в сопровождении учебного процесса: подготовка материала для работы, организация различных форм деятельности, активное участие в обсуждении результатов деятельности, создание условий для самоконтроля и самооценки. Также занятия призваны побудить обучающихся к поиску других решений, их развития и углубления, в этом может помочь принцип открытости решения (неокончательное решение).

Системно-деятельностный подход четко сформулирован и используется на уроках математики в Лицее по УМК «Учусь учиться» авторов: Л.Г. Петерсон, Г.В. Дорофеев, Н.А. Агаханов, Д.Л. Абраров, Е.Е. Кочемасова и др. Преимуществами курса являются как сам системно-деятельностныи подход, так и непрерывность с 1 по 9 класс, разветвлённость методического обеспечения, возможность разноуровнего обучения по индивидуальной траектории (https://www.sch2000.ru).

А вот поле для творчества заложено в курсе внеурочных занятий по математике «Нестандартные задачи по математике». Процесс творчества включает в себя, прежде всего открытие нового: новых объектов, новых знаний, новых проблем, новых методов их решения.

В рамках урока перед учащимися всегда ставиться проблемная задача, побуждающая искать пути решения. При ее решении происходит включение творческого мышления. Темы задач выбираются из тем олимпиадной математики и задач прикладного содержания, призванных ответить на вопрос: где и как применяются математические знания, умения и навыки при решении жизненных задач. Немаловажная роль отводится таким задачам при сдаче государственной итоговой аттестации.

Одной из таких тем является «Чтение, анализ данных и их представление». В рамках этой темы у пятиклассников идет формирование навыка решения данного типа задач, которые представлены в ОГЭ И ЕГЭ. Также учащиеся самостоятельно получают знания правильной работы с данными и их верного представления, что может быть использовано при выполнении ими исследовательской или проектной работы. С помощью этой темы показываются межпредметные связи между математикой и другими предметными областями.

5.1 Примеры задач по теме «Чтение, анализ и представление данных» в рамках курса «Нестандартные задачи по математике»

№1

Ни для кого не секрет, чтобы повысить защитные силы организма и снизить вероятность многих заболеваний, в пищу нужно употреблять витамин С. Решите следующие уравнения и узнайте, сколько содержится миллиграммов витамина С в 100 г каждого из указанных продуктов.

Постройте диаграмму содержания витамина С в указанных про-

1	Черная смородина	$(2424 - 3x)/4 + 150 \cdot 3 = 906$
2	Шиповник	$(20x + 342) \cdot 3 - 5321 = 1705$
3	Цветная капуста	$2400 - (5x + 626)/8 = 2178$
4	Апельсин	$(540/x + 231)/60 + 166 = 170$
5	Киви	$(900 - 3x)/360 + 1001 = 1002$
6	Сладкий перец	$(6x - 245)/5 + 564 = 815$
7	Земляника	$2700/(600/x + 64350/2145) = 30$
8	Лимон	$(121x - 840)/400 + 90 = 100$
9	Черемша	$(300/x + 32) \cdot 11 - 380 = 5$
10	Облепиха	$(x + 216)/8 + 323/19 = 69$

дуктах. Какую диаграмму лучше выбрать и какой масштаб?

№2

Подсчитайте, сколько раз встречается каждая гласная буква в этом стихотворении. Какая чаще других? Реже других? Постройте таблицу и диаграмму, показывающую, сколько раз встречается каждая гласная. Проведите анализ данных.

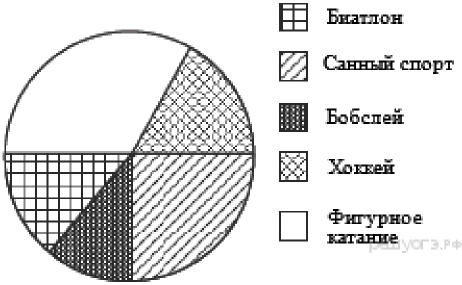
Унылая пора! очей очарованье! Приятна мне твоя прощальная краса — Люблю я пышное природы увяданье, В багрец и в золото одетые леса,	В их сенях ветра шум и свежее дыханье, И мглой волнистою покрыты небеса, И редкий солнца луч, и первые морозы, И отдаленные седой зимы угрозы. А.С. Пушкин

5.2 Примеры задач по теме

«Чтение, анализ и представление данных» по мотивам ВПР, ОГЭ И ЕГЭ

№1

Учащимся сочинских школ был задан вопрос: «По какому виду спорта вы хотели бы посетить соревнования на Зимней олимпиаде в Сочи?». Их ответы можно увидеть на диаграмме. Сколько примерно учащихся хотели бы посетить соревнования и по хоккею, и по санному спорту, если всего в опросе приняли участие 400 школьников?



В ответе укажите номер правильного варианта.

1. 180
2. 240
3. 120
4. 200

№2

В таблице приведены размеры штрафов за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленных на территории России с 1 сентября 2013 года.

Превышение скорости, км/ч	21 — 40	41 — 60	61 — 80	81 и более
Размер штрафа, руб.	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 195 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 110 км/ч?

Уроки протекают с использованием различных видов деятельности: урок-диалог, практическое занятие в малых группах, урок-практикум в парах, урок-исследование, урок-игра, урок-конкурс, творческая мастерская. Эти уроки — это всегда фонтаны идей и гипотез, их обоснование и проверка. Всегда поощряется инициативность и изобретательность, ученики становятся активными «творцами».

При работе в **малых группах** учащиеся получают возможность получить навыки работы в команде. Иногда на роль учащегося возлагается роль эксперта, который должен не только уметь объяснить, но и оценить работу других. При этом у учащегося возрастает уверенность в себе и в своих знаниях. Запоминается лучше то, что ты объясняешь другим. Те, кому он объясняет, лучше его понимают, они говорят на «одном языке» (нет разницы в возрасте и интересах). Также в процессе выполнения этого упражнения учащиеся получают понятие об объективности оценивания.

При **фронтальной** работе идет развитие речи учащихся. Они получают возможность научиться формулировать свои мысли, слушать других, оппонировать и рецензировать.

«Пять принципов», которые используются на данных уроках.

1. Четкий тайминг на решение задач или каких-либо действий. План урока расписывает четко по минутам и видам деятельности. Сначала необходимо к этому привыкнуть, зато дети четко понимают ход и этапы урока, выполняют его строго по плану и продуктивность работы значительно возрастает.

2. При ответе ученика не высказывать своего мнения, своего способа решения. Выслушав всех, прийти к согласию, разобрав все плюсы и минусы всех решений. Если решений нет или неверные рассуждения – метод наводящих вопросов.

3. Обоснования каждого шага решения. Учащиеся внимательно выслушивают аргументы, приводимые, работающим у доски, и вносят в них поправки и добавления. Так рождаются осознанные решения.

4. Поощрять наблюдательность и инициативу. Тем самым это стимулирует их к нахождению рациональных решений и смелости.

5. Обсуждать полученный результат. Например, при решении текстовых задач иногда приходится получать несколько ответов.

> Надо приучать обучающихся осмысливать ответ задачи, выполнять там, где это возможно, проверку, делать прикидку результата. Надо выработать у учащихся умения самопроверки. Для этого возможно создавать ситуации, которые приводят учащихся к неправильному ответу, которые заставляют их критически мыслить. Или проверить ответы своего товарища. Роль учителя в этом случае заключается в умелом приведении контрпримеров для выявления ошибок в ответах учащихся.

Такая систематическая организация обучения через деятельность служит основой для формирования творческого мышления.

Подводя итоги, хочется отметить, что системно-деятельностныи подход - это своего рода философия, которая дает возможность учителю творить, искать, становиться в содружестве с учащимися мастером своего дела.

6 Составление новых примеров в математике

Безусловно, создание с нуля любых примеров или задач — это крайне творческая деятельность, требующая от составителя глубоких знаний и понимания моделей типов примеров в математике. Разберем один из вариантов составления нового уравнения по типу исходного уравнения. При этом новое уравнение должно обладать адекватными, в рамках школьной программы, коэффициентами, а также иметь красивое решение.

Чтобы научиться создавать пример с нуля, для начала нужно научиться составлять примеры подобные данному, но с другими коэффициентами. В подборе подходящих коэффициентов нам поможет программа Microsoft Ecxel.

6.1 Пример 1

Разберем, как это делать на примере: $x^3 - 202 = \sqrt{x^3 - 220}$.

И первое, с чего стоит начать — это решить пример: $x^3 - 202 = \sqrt{x^3 - 20}$

Введём замену: $t = \sqrt{x^3 - 20}$ $(0 \leqslant t)$, тогда $t^2 = x^3 - 20$, $x^3 = t^2 + 20$. Учитывая замену, получим: $t^2 + 20 - 202 = t \Leftrightarrow t^2 - t - 182 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{lcr} t_1 & = & -13 \\ t_2 & = & 14 \end{array}\right.$$

Поскольку $t \geqslant 0$, то $t_1 = -13$ не подходит.

При $t_2 = 14$ имеем: $x^3 = 14^2 + 20 \Leftrightarrow x = 6$.
Ответ: $x = 6$.

Общий вид этого уравнения $x^3 - k = \sqrt{x^3 - p}$. Вводя замену, как в решении рассмотрим конечное квадратное уравнение с переменной t, его корни должны быть разных знаков (чтобы один из корней отпал, с учетом ОДЗ замены) и разность модулей большего и меньшего корней этого уравнения должна быть равна 1. Пусть корнем нового квадратного уравнения будет $t_2 = 5$. Тогда второй корень уравнения $t_1 = -4$. При этом уравнение вида $x^3 = t^2 + p$ должно иметь целочисленное решение для красивого ответа. Найдем пару таких коэффициентов t и p с помощью таблицы Exel, чтобы x был целочисленным. (изменяя в разумных пределах, и учитывая, что $t = 5$ находим подходящее p. Таблица 1)

Осталось записать исходный вид нового уравнения, а для этого найти k. Зная корни для квадратного уравнения с переменной t и коэффициент p, находим k по формуле $k = t_1 \cdot t_2 - p$ (таблица 2).

Таблица 1

x	t	p
-4	5	-89
-3	5	-52
-2	5	-33
-1	5	-26
0	5	-25
1	5	-24
2	5	-17
3	5	2
4	5	39
5	5	100
6	5	191
7	5	318
8	5	487
9	5	704

Таблица 2

x	t	p	k
-4	5	-89	69
-3	5	-52	32
-2	5	-33	13
-1	5	-26	6
0	5	-25	5
1	5	-24	4
2	5	-17	-3
3	5	2	-22
4	5	39	-59
5	5	100	-120
6	5	191	-211
7	5	318	-338
8	5	487	-507
9	5	704	-724

Также следует учесть ОДЗ исходного уравнения, а именно $x^3 - k \geqslant 0$ и $x^3 - p \geqslant 0$. Для этого можно сделать проверку на соблюдение этих условий в таблице Ecxel или же осуществить проверку вручную.

Таким образом, изменяя t_2 и при этом задавая желаемый корень мы получим таблицу 2 с коэффициентами уравнения $x^3 - k = \sqrt{x^3 - p}$.

6.2 Пример 2

Рассмотрим ещё один пример: $\sqrt{2x+2} - \sqrt{7-2x} = -3$. Решим его:

Первый способ

$$\sqrt{(2x+2)} - \sqrt{(7-2x)} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+2)} + 3 = \sqrt{(7-2x)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2+6\sqrt{(2x+2)}+9 = 7-2x, \\ 2x+2 \geqslant 0, \\ 7-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{(2x+2)} = -2x-2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3.5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(2x+2) = (-2x-2)^2, \\ -2x-2 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(2x+2) - (2x+2)^2 = 0, \\ x \leqslant -1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3.5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+2)(9-2x-2) = 0, \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ x & = & 3.5 \end{array} \right. \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

Второй способ

Введя замену $u = \sqrt{(2x+2)}$; $v = \sqrt{(7-2x)}$ (при этом $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$) первоначальное уравнение примет вид: $u - v = -3$.

Заметим, что коэффициенты при x в подкоренных выражениях противоположны. Поэтому справедливо уравнение: $u^2+v^2 = 9$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} u - v = -3, & (1) \\ u^2 + v^2 = 9. & (2) \end{cases}$$

Выразив u из первого уравнения и подставив во второе получим:

$$(v-3)^2 + v^2 = 9 \Leftrightarrow 2v^2 - 6v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} v_1 & = & 0 \\ v_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

При $v_1 = 0$, $u_1 = -3$, что не удовлетворяет условию $u \geqslant 0$.
При $v_2 = 3$, $u_2 = 0$. Отсюда следует, что $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Для составления аналогичного уравнения воспользуемся вторым способом его решения. Решим в общем виде систему:

$$\begin{cases} u - v = k, \\ u^2 + v^2 = p. \end{cases}$$

Эта система сводится к решению квадратного уравнения $2v^2 + 2kv + k^2 - p = 0$. С помощью таблицы Ecxel варьируя k и p выбираем такую пару, чтобы у квадратного уравнения были целые корни. В таблице 3 представлена вариация получившихся корней в случае $k = -3$, и переменным параметром p. Таким образом таблицу можно с легкостью менять параметр k на другие значения и тем самым подобрать любое из предложенных, у которого в итоге получаются целые корни. В таблице 3 Коэффициенты B и C считаются автоматически, исходя из k и p. Из таблицы видно, что при $k = -3$ и $p = 9$ получаются корни, как в решении примера, а значит таблица построена верно.

Таблица 3

Параметры исходного уравнения		Коэффициенты квадратного уравнения			Корни уравнения	
k	p	A	B	C	V1	V2
-3	0	2	-6	9		
-3	1	2	-6	8	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
-3	2	2	-6	7	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
-3	3	2	-6	6	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
-3	4	2	-6	5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
-3	5	2	-6	4	2	1
-3	6	2	-6	3	2,366025404	0,633974596
-3	7	2	-6	2	2,618033989	0,381966011
-3	8	2	-6	1	2,822875656	0,177124344
-3	9	2	-6	0	3	0
-3	10	2	-6	-1	3,158312395	-0,1583124
-3	11	2	-6	-2	3,302775638	-0,30277564

-3	12	2	-6	-3	3,436491673	-0,43649167
-3	13	2	-6	-4	3,561552813	-0,56155281
-3	14	2	-6	-5	3,679449472	-0,67944947
-3	15	2	-6	-6	3,791287847	-0,79128785
-3	16	2	-6	-7	3,897915762	-0,89791576
-3	17	2	-6	-8	4	-1
-3	18	2	-6	-9	4,098076211	-1,09807621
-3	19	2	-6	-10	4,192582404	-1,1925824
-3	20	2	-6	-11	4,283882181	-1,28388218
-3	21	2	-6	-12	4,372281323	-1,37228132
-3	22	2	-6	-13	4,458039892	-1,45803989
-3	23	2	-6	-14	4,541381265	-1,54138127
-3	24	2	-6	-15	4,622498999	-1,622499
-3	25	2	-6	-16	4,701562119	-1,70156212
-3	26	2	-6	-17	4,778719262	-1,77871926
-3	27	2	-6	-18	4,854101966	-1,85410197
-3	28	2	-6	-19	4,9278273	-1,9278273
-3	29	2	-6	-20	5	-2
-3	30	2	-6	-21	5,070714214	-2,07071421
-3	31	2	-6	-22	5,140054945	-2,14005494

Построим таблицу для другого k, например пусть $k = 6$.

Таблица 4

Параметры исходного уравнения		Коэффициенты квадратного уравнения			Корни уравнения	
k	p	A	B	C	V1	V2
6	0	2	12	36	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	1	2	12	35	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	2	2	12	34	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	3	2	12	33	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	4	2	12	32	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	5	2	12	31	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	6	2	12	30	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!

6	7	2	12	29	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	8	2	12	28	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	9	2	12	27	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	10	2	12	26	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	11	2	12	25	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	12	2	12	24	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	13	2	12	23	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	14	2	12	22	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	15	2	12	21	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	16	2	12	20	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	17	2	12	19	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	18	2	12	18	-3	-3
6	19	2	12	17	-2,29289322	-3,70710678
6	20	2	12	16	-2	-4
6	21	2	12	15	-1,77525513	-4,22474487
6	22	2	12	14	-1,58578644	-4,41421356
6	23	2	12	13	-1,41886117	-4,58113883
6	24	2	12	12	-1,26794919	-4,73205081
6	25	2	12	11	-1,12917131	-4,87082869
6	26	2	12	10	-1	-5
6	27	2	12	9	-0,87867966	-5,12132034
6	28	2	12	8	-0,76393202	-5,23606798
6	29	2	12	7	-0,65479212	-5,34520788
6	30	2	12	6	-0,55051026	-5,44948974
6	31	2	12	5	-0,45049024	-5,54950976
6	32	2	12	4	-0,35424869	-5,64575131
6	33	2	12	3	-0,26138721	-5,73861279
6	34	2	12	2	-0,17157288	-5,82842712
6	35	2	12	1	-0,08452405	-5,91547595
6	36	2	12	0	0	-6
6	37	2	12	-1	0,082207001	-6,082207
6	38	2	12	-2	0,16227766	-6,16227766
6	39	2	12	-3	0,240370349	-6,24037035
6	40	2	12	-4	0,31662479	-6,31662479
6	41	2	12	-5	0,391164992	-6,39116499

6	42	2	12	-6	0,464101615	-6,46410162
6	43	2	12	-7	0,535533906	-6,53553391
6	44	2	12	-8	0,605551275	-6,60555128
6	45	2	12	-9	0,674234614	-6,67423461
6	46	2	12	-10	0,741657387	-6,74165739
6	47	2	12	-11	0,807886553	-6,80788655
6	48	2	12	-12	0,872983346	-6,87298335
6	49	2	12	-13	0,937003937	-6,93700394
6	50	2	12	-14	1	-7

Из ограничений при замене переменных следует что, для того чтобы у исходного уравнения были корни, необходимо получить, хотя бы одно значение $v \geqslant 0$. Анализируя таблицу, делаем вывод, что, если $p < 36$, оба корня v отрицательные. Возьмем из таблицы значения $k = 6$ и $p = 50$. Тогда получаем, что $v = 1$, а $u = 7$. Пусть $u = \sqrt{sx + d}$; $v = \sqrt{h - sx}$. Теперь требуется подобрать такие s, d и h, чтобы оба этих уравнения обладали одинаковым решением относительно . Для этого необходимо, чтобы $h + d = 50$. Например удобно взять $d = 40$, а $h = 10$. И если взять $s = 3$, то получится желаемое, красивое решение $= 3$. Осталось записать получившееся уравнение:

$$\sqrt{3x + 40} - \sqrt{10 - 3x} = 6.$$

Общие рекомендации по составлению уравнений:

1. Придумайте структуру уравнения, или возьмите исходное уравнение и решите его.

2. Разбивайте сложную структуру примера на несколько отдельных частей, которые зависят друг от друга.

3. Заменяйте коэффициенты в уравнении параметрами и ищите взаимосвязи, которым подчиняются эти параметры.

4. Составляйте таблицы, в которых варьируете параметры, и смотрите, как будет изменяться ответ примера.

5. Не забывайте про соблюдение ОДЗ.

7 Приложения Google для работы с учениками онлайн и офлайн

В данной главе представлены материалы занятий, прочитанных автором в рамках курсов повышения квалификации на базе автономной некоммерческой общеобразовательной организации «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы.

Современный учитель для повышения эффективности своей работы использует различные навыки и компетенции. Особое внимание следует уделить IT-технологиям в обучении. В этой связи в данном пособии не только материалы, необходимые для повышения уровня математической культуры, но и описание удобной платфоры для организации учебного процесса.

Первая часть главы посвящена использованию сервиса Google Classroom для упрощения организации образовательного процесса.

Во второй части представлены материалы, которые необходимы для успешного решения задач с развёрнутым ответом ЕГЭ по теме «Арифметика и алгебра».

По всем вопросам обращаться к автору: galitskiiboris@mail.ru.

7.1 Google Classroom

Google Classroom — продукт корпорации Google, разработанный для учебных заведений с целю популяризации безмубажного пути создания, распространения и оценивания заданий. Проект был запущен 12 августа 2014 года, и с тех пор стал одним из самых популярных и удобных сервисов, используемых для модернизации и упрощения образовательного процесса.

Ниже будет описана лишь необходимая часть возможностей данного сервиса. Со всем интерфейсом Вы можете ознакомиться на официальном сайте в разделе «Справка».

7.1.1 G Suite for Education

Для некоммерческих образовательных организаций корпорация Google позволяет получить бесплатную лицензию на G Suite for Education: пакет продуктов Google, позволяющий пользоваться всеми достижениями современной IT-индустрии.

Для получения бесплатной лицензии на G Suite for Education необходимо перейти по ссылке https://gsuite.google.com/signup/edu/welcome и пошагово заполнить анкету.

Данная лицензия обеспечивает дополнительную конфиденциальность и безопасность данных.

7.1.2 Авторизация

Для авторизации необходимо перейти по ссылке https://classroom.google.com/ и войти, используя свой аккаунт Google. Обратите внимание, что если ***ваша школа получила лицензию*** G Suite for Education, то ***администратор должен завести для Вас отдельный аккаунт***. При этом помните о том, что ***учащиеся не смогут входить в сервис*** «Google Classroom» с помощью обычного аккаунта, потому ***администратор должен завести учётные записи*** и для них.

После авторизации откроется главная страница сервиса.

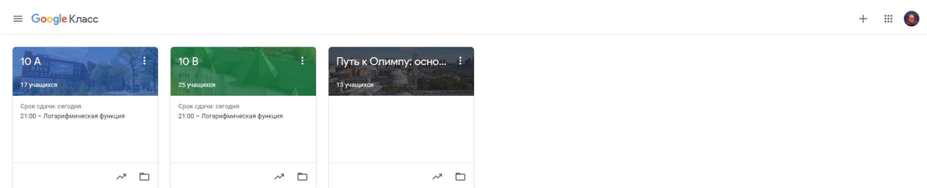


Рис. 1: Главная страница сервиса

Чтобы создать новый курс, необходимо нажать на знак «+» в правом верхнем углу, нажав затем «Создать курс» (рис. 2), а затем указать в открывшемся окне информацию о созданном курсе (рис. 3).

После создания курса открывается его главная страница (рис. 4):

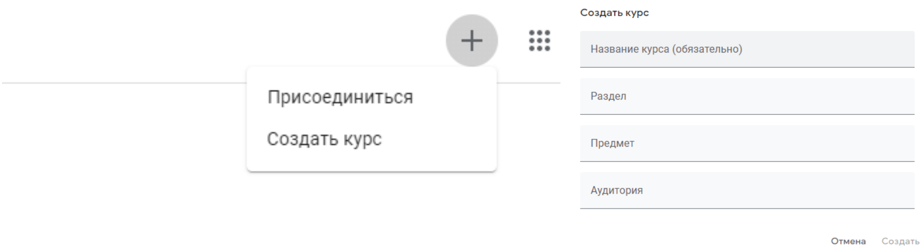


Рис. 3: Информация о курсе

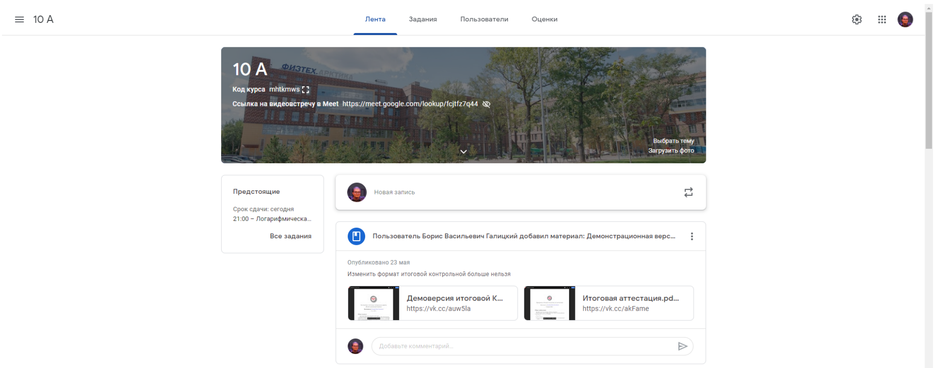


Рис. 4: Главная страница курса

На ней, под названием, Вы можете увидеть код курса. Его нужно будет сообщить учащимся, чтобы они присоединились. Для этого необходимо также перейти по ссылке https://classroom.google.com/, войти, используя соответствующий аккаунт Google (такого же типа, как и у учителя), затем нажать в правом верхнем углу на знак «+» в правом верхнем углу, нажав затем «Присоединиться» (рис. 2). После этого откроется окно (рис. 5), в котором нужно ввести код курса и нажать «Присоединиться».

7.1.3 Добавить новое объявление

Одно из преимуществ Google Classroom в том, что после добавления новых материалов приходят оповещения. Причём, если установить приложение на телефон, оповещения будут также отображаться и на

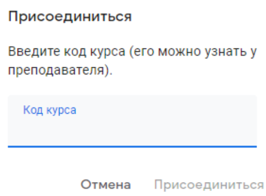


Рис. 5: Добавление нового курса

нём в виде push-уведомлений.

На главной странице курса текстовое поле, в котором можно написать объявление слушателям. Для это необходимо ввести его текст (рис. 6). К нему можно также прикрепить материалы, для этого необходимо нажать на кнопку «Добавить» (правый нижний угол рис. 6).

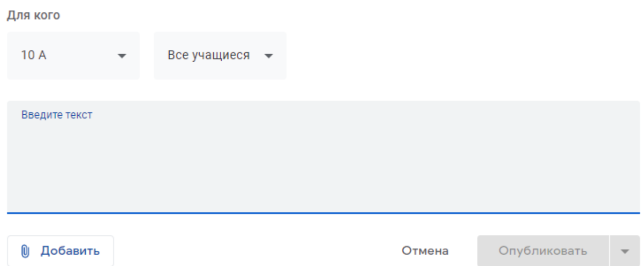


Рис. 6: Добавление нового объявления слушателям курса

В раскрывшемся меню (рис. 7) необходимо выбрать:

- Google Диск, если нужно прикрепить что-то, размещённое на вашем Google-диске;
- Ссылка, если Вы хотите поделиться ссылкой на ресурс со слушателями курса;
- Файл, если Вы хотите прикрепить файл к сообщению;
- YouTube, если Вы хотите прикрепить видеофайл, размещённый на видеохостинге https://www.youtube.com/.

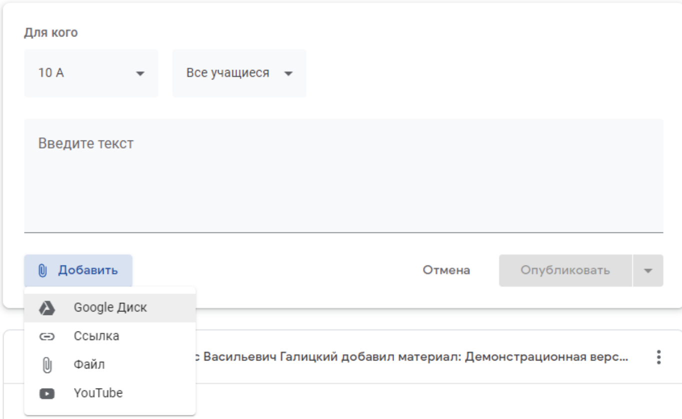


Рис. 7: Добавление материалов к объявлению

При этом, в случае добавления видео с YouTube существуют два пути: найти видео по запросу (рис. 8) или добавить ссылку на видео (рис. 9).

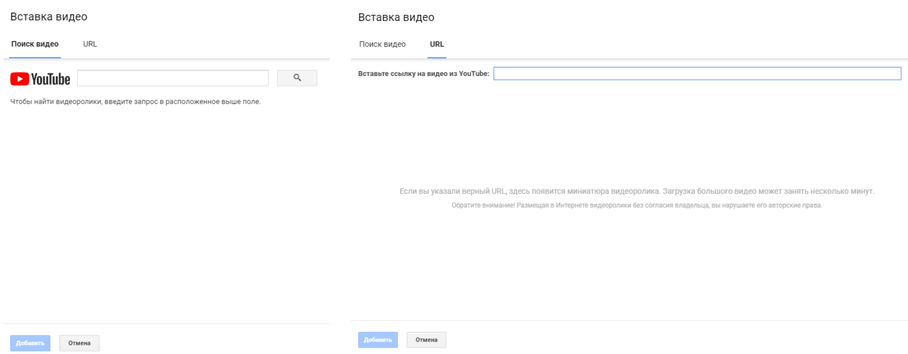


Рис. 9: Добавление видео по ссылке

Помимо этого, если у Вас несколько курсов, и Вы в них хотите одновременно опубликовать одно и то же объявление для слушателей, необходимо под надписью «Для кого» нажать на раскрывающийся список, и выбрать те курсы, в которых должно быть опубликовано объявление (рис. 10).

Если объявление предназначено только для конкретных слушате-

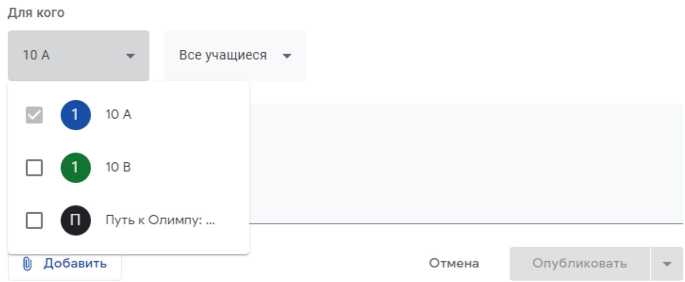


Рис. 10: Выбрать несколько курсов для публикации одного сообщения

лей курса, необходимо нажать на «Все учащиеся» и выбрать в списке только получателей (рис. 10). Обратите внимание, что данная опция доступна только в том случае, когда Вы публикуете новое объявление в одном курсе.

Можно установить время публикации. Для публикации в текущий момент времени достаточно нажать на кнопку опубликовать (рис. 10). Обратите внимание, что нельзя нажать на кнопку, если объявление пустое.

Если же Вы не хотите публиковать объявление сейчас, его можно:

- сохранить (как черновик);
- опубликовать в указанные день и время.

Для этого необходимо нажать на кнопку со стрелкой рядом с кнопкой «Опубликовать» (рис. 10) и в раскрывшемся списке выбрать «Сохранить черновик» (рис. 11), если Вы хотите просто сохранить объявление, не опубликовав его.

Если же Вы хотите опубликовать объявление в определённые день и время, необходимо выбрать «Добавить в расписание» (рис. 11), а затем в открывшемся окне указать день и время публикации (рис. 12), после чего нажать на кнопку «Добавить в расписание».

После того, как Вы добавили в расписание сообщение слушателям курса, до публикации будет в верху страницы надпись «Сохранённые

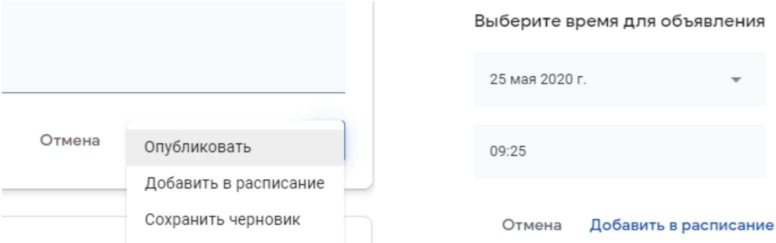


Рис. 12:

объявления (их количество)» (рис. 13). При нажатии на данную надпись раскрывается список сохранённых объявлений (рис. 14).

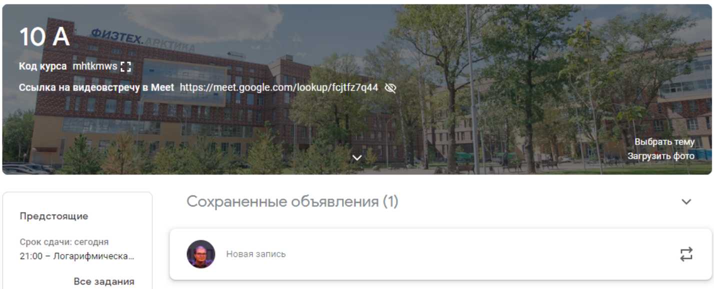


Рис. 13: Сохранённые объявления

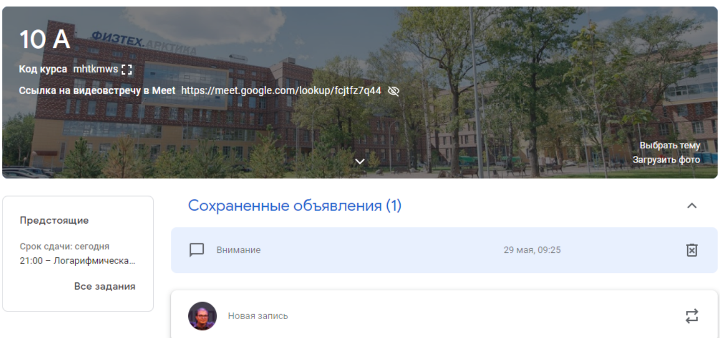


Рис. 14: Сохранённые объявления: раскрытый список

Сохранённые объявления можно:

- редактировать, просто нажав на них;
- удалять, нажав на значок урны в правой части строки (рис. 14).

7.1.4 Добавить новое задание

Чтобы добавить новое задание, необходимо открыть вкладку «Задания» в верхней панели страницы курса (рис. 15).

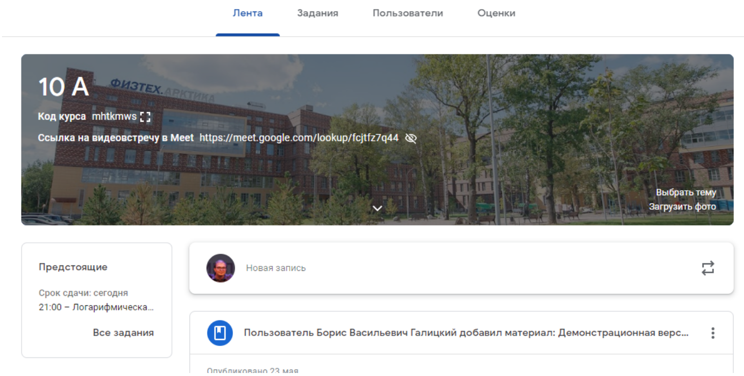


Рис. 15: Главная страница курса

Для добавления нового материала необходимо нажать на кнопку «Создать».

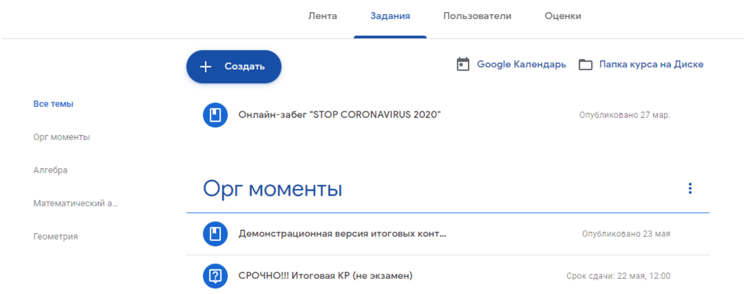


Рис. 16: Вкладка «Задания»

В открывшемся окне выбрать тип создаваемого задания:

- задание, если в качестве ответа должен быть приложен файл;
- задание с тестом, если Вы создаёте задание в формате теста на при помощи инструмента «Формы» от Google;
- вопросы, если ответ должен быть кратким;
- материал, если Вы хотите поделиться источником, и никакие решения не принимаете;
- тема, если Вы хотите создать отдельную тему, в рамках которой будут публиковаться материалы.

Если же выбрать «Использовать повторно» (рис. 17), то Вы можете опубликовать повторно ранее размещённый материал. Для этого необходимо выбрать нужную запись, если она была опубликована в этом курсе (рис. 18).

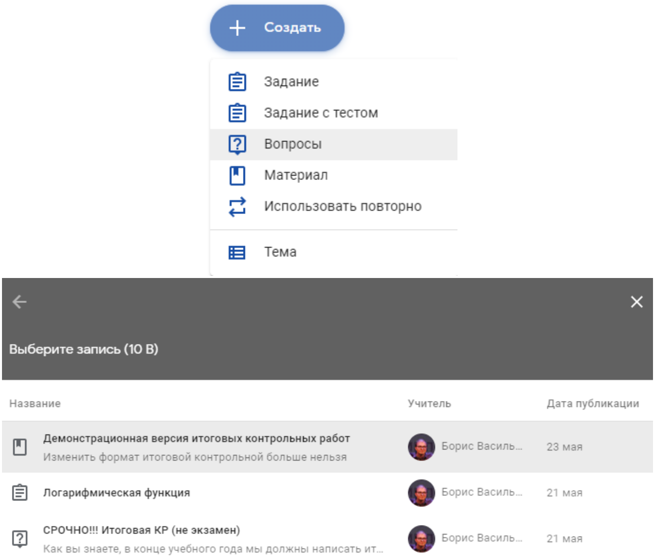


Рис. 18: Список опубликованных записей

Если же необходимо опубликовать запись, размещённую в другом курсе, созданном в рамках данного аккаунта, необходимо

1. Нажать на стрелочку над надписью «Выберите запись» (рис. 18);
2. Выбрать курс, в котором находится нужна запись (рис. 19);
3. В открывшемся курсе выбрать нужную запись;
4. Нажать на кнопку «Использовать повторно» (рис. 20);
5. Установить параметры публикации (об этом пойдёт речь ниже);
6. Опубликовать, сохранить черновик или добавить в расписание.

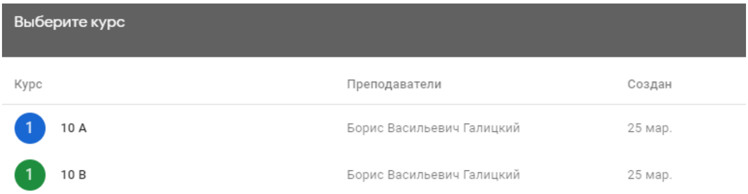


Рис. 19: Список созданных курсов

Рис. 20:

Рассмотрим создание обычного задания, поскольку это наиболее распространённый тип, к тому же, на данном примере будут продемонстрированы все параметры публикуемых материалов.

После того, как Вы выбрали «Задание» (рис. 17), открывается новое окно (рис. 21), в котором необходимо указать параметры задания.

У создания заданий и объявлений есть общие особенности. Можно:

- задание опубликовать, сохранить черновик или добавить в расписание;
- указать в качестве получателей задания как и слушателей нескольких курсов, так и отдельных слушателей данного курса;

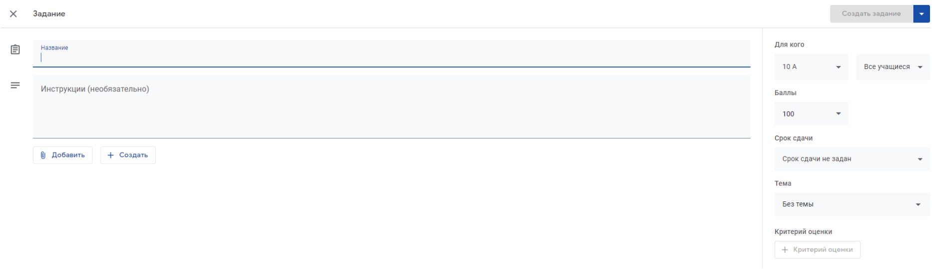


Рис. 21: Создание нового задания

- прикрепить к заданию те же ресурсы, что и к объявлению.

Как это сделать, было описано ранее.

Обсудим дополнительные параметры задания. Оно может быть оценено указанным Вами количеством баллов, а может и не давать баллов вовсе. Для корректировки этого параметра необходимо нажать на поле под надписью «Баллы» (рис. 21) и указать количество баллов за задание, либо выбрать вариант «Без оценки».

Чтобы указать дедлайн, необходимо нажать на поле под надписью «Срок сдачи» (рис. 21), выбрать день сдачи (рис. 22) и, при необходимости, время (рис. 23). Если Вы хотите убрать день и (или) время сдачи, нужно нажать на крестик в соответствующем поле.

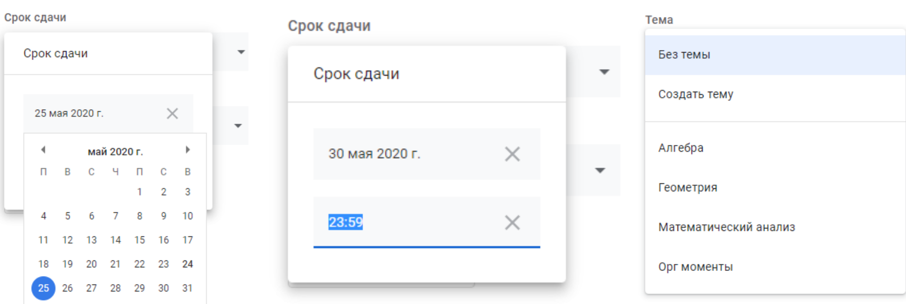


Рис. 24:

Как было указано выше, записи в Classroom можно публиковать по темам. Чтобы указать тему задания, необходимо нажать на поле под надписью «Тема» и либо выбрать уже существующую тему, либо нажать на «Создать тему» и написать название новой темы (рис. 24).

Помимо этого, можно создать документ прямо во время создания задания. Для этого нужно нажать на кнопку «Создать» (рис. 21) и выбрать в появившемся списке нужный тип файла (рис. 25).

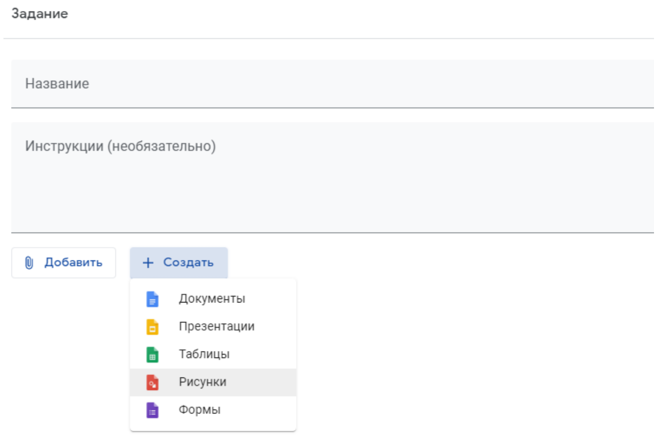


Рис. 25: Создание нового документа

Как было сказано выше, задание после этого всего можно опубликовать, сохранить черновик или добавить в расписание.

7.1.5 Изменение / удаление записей

Принцип работы функционала для изменения или удаления записей одинаков, потому опишем данные процедуры на примере заданий.

Для того, чтобы изменить или удалить задание, необходимо открыть вкладку «Задания», найти нужное, нажать на 3 вертикальные точки, расположенные напротив него и выбрать в раскрывшемся списке «Изменить» или «Удалить» соответственно для изменения и удаления (рис. 26).

Если нажмёте «Удалить», система попросить Вас подтвердить или отменить это действие.

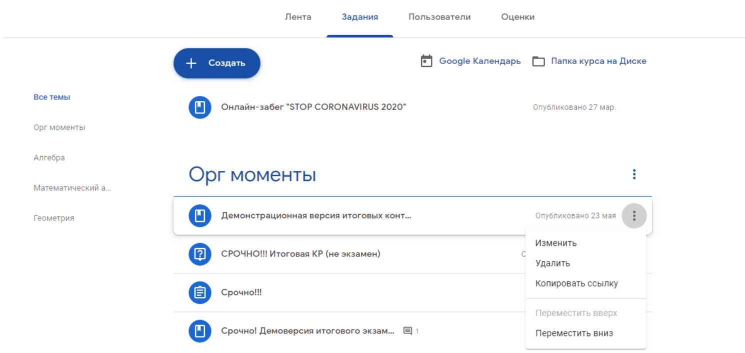


Рис. 26: Изменение / удаление задания

Если же нажмёте «Изменить», то откроется то же окно, что и при создании задания (рис. 21).

7.1.6 Проверка заданий

Чтобы оценить задание, необходимо его найти либо во вкладке «Лента» (рис. 27), либо во вкладке «Задания» (рис. 28).

Там будет указано количество работ, которые сданы, назначены и возвращены соответственно (последнее – при наличии). Обращу внимание, что статус задания «назначено», что слушатель курса не отправил работу на проверку.

Чтобы просмотреть и (или) оценить работы определённой категории, нужно нажать на соответствующее число.

Далее отображаются работы соответствующей категории, причём работы, которые сданы с опозданием, отмечены соответствующей подписью (рис. 29; личные данные пользователей здесь вырезаны с целью соблюдения закона о персональных данных).

При нажатие на конкретную работу открывается окно, в котором можно просмотреть работу и написать комментарии к ней (рис. 30).

Здесь можно отправить личные комментарии к работе, а также выставить оценку за неё в поле «Оценка». Там же указано максималь-

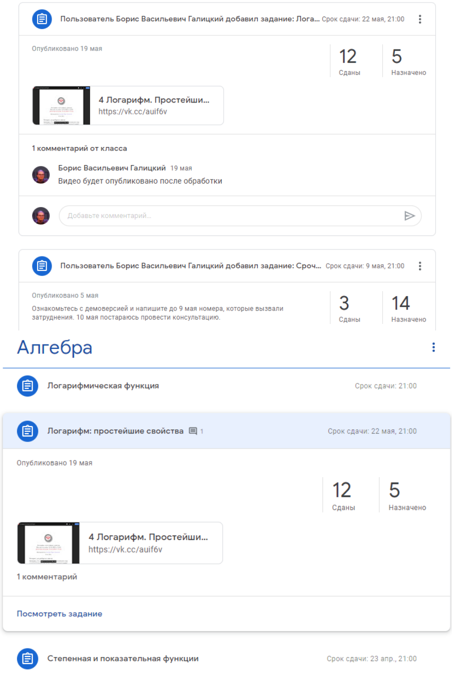


Рис. 28:

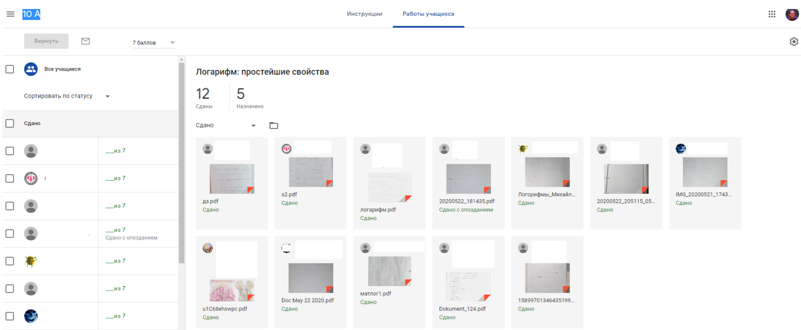


Рис. 29: Список сданных работ по конкретному заданию

ное количество баллов за данное задание. Обращаю внимание на то, что Classrooom позволяет ставить оценку, бОльшую максимального количества баллов.

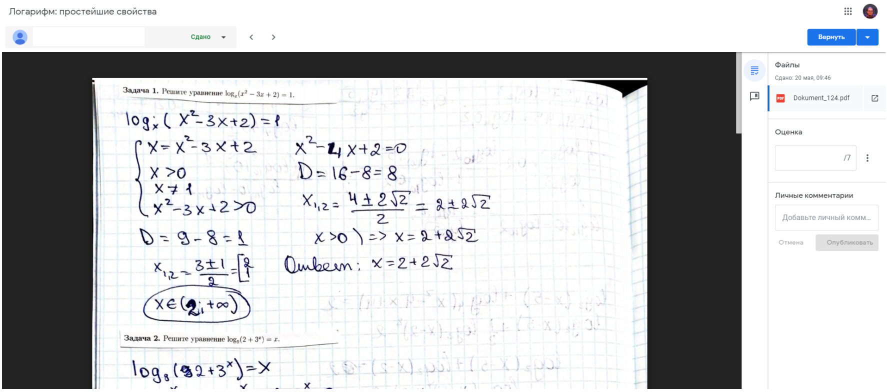


Рис. 30: Проверка работы

Чтобы завершить проверку работы, необходимо выставить оценку и нажать на кнопку «Вернуть» (рис. 30, правый верхний угол). Далее система Вас попросит подтвердить, что Вы действительно хотите вернуть работу слушателю курса. После нажатия «Вернуть» в открывшемся окне слушатель увидит свою оценку и получит соответствующее уведомление.

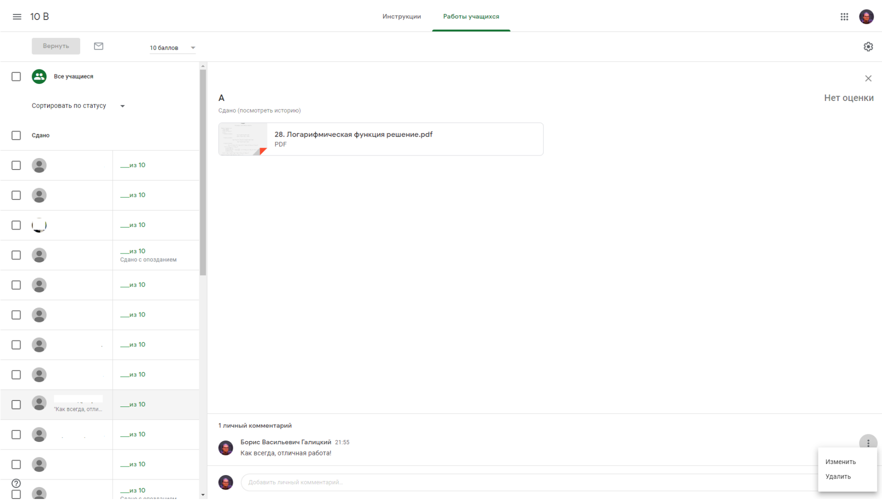


Рис. 31:

Если Вы хотите изменить или удалить комментарий к работе, нужно перейти на страницу с работами по данному заданию (рис. 29), в списке справа выбрать нужную работу и нажать на неё.

Откроется окно, в котором будут отображены ссылка на работу, оценка, а также комментарии к данной работе (рис. 31). Чтобы изменить или удалить комментарий, нужно на него навести курсор, нажать на три вертикальные точки напротив него и выбрать «Изменить» или «Удалить» для изменения или удаления комментария соответственно.

7.1.7 Добавление новых пользователей

Есть две категории пользователей: «Преподаватели» и «Учащиеся». Чтобы добавить нового пользователя, необходимо открыть вкладку «Пользователи» (рис. 32), нажать на значок человека с плюсом напротив соответствующей категории, а дальше ввести e-mail или имя пользователя (рис. 33; не забывайте, что аккаунт должен быть соответствующего типа: либо от администратора G Suite, либо обычный).

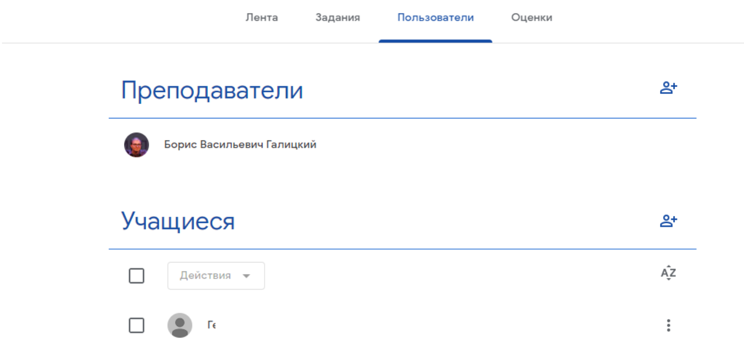


Рис. 32:

Также Вы можете выбрать учащихся или преподавателей, которым можете отправить письмо на e-mail. Либо же для удалить их из курса или игнорировать (игнорированные слушатели не смогут комментировать записи курса). Для этого нужно выбрать нужную группу пользователей, нажать на кнопку «Действия», и в открывшемся списке выбрать «Отправить письмо», «Удалить» или «Игнорировать» соответственно (рис. 34).

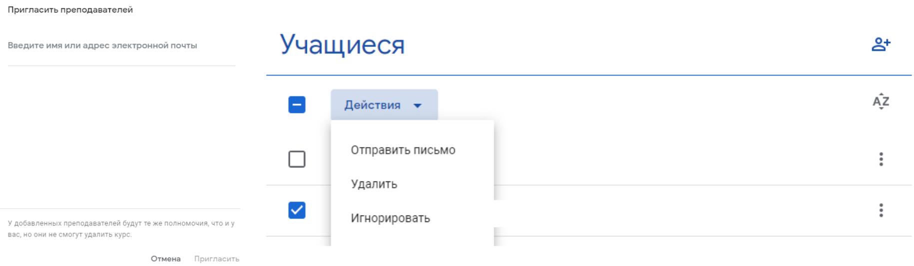


Рис. 34:

7.2 Арифметика и алгебра

В данной главе представлен теоретический материал, а также задачи второй части ЕГЭ по данной теме, разобранные на курсах.

7.2.1 Комбинаторика

Утверждение 1 (Правило сложения). *Если объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, причём выборы объектов A и B несовместимы, то выбрать A* ***или*** *B можно $m+n$ способами.*

Утверждение 2 (Правило умножения). *Если объект A можно выбрать n способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами (независимо от выбора A), то выбрать A* ***и*** *B можно $m \cdot n$ способами.*

Теорема 1 (Формула включений - исключений). *Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо равенство:*

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Повтор есть?	ПоРядок важен?	Кол-во элементов = = кол-ву мест?	Название	Формула
нет	да	не обязательно	Размещения	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
нет	да	да	ПеРестановки	$P(n) = n!$
нет	нет	не обязательно	Сочетания	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$
да	да	не обязательно	Размещения с повторениями	$\overline{A}_k^n = k^n$
да	да	да	ПеРестановки с повторениями	$\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}$
да	нет	не обязательно	Сочетания с повторениями	$\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$
нет	да	да	БеспоРядки	$!n = n! \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i}{i!} = = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)!$

7.2.2 Делимость

Определение 1. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$: $b \neq 0$. Говорят, что a ***делится на*** b (обозначение $a \vdots b$), если $\exists c \in \mathbb{Z}$: $b \cdot c = a$.

Определение 2. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$: $b \neq 0$. Говорят, что b ***делит*** a (обозначение $b|a$), если $a \vdots b$.

Теорема 2 (Свойства делимости)**.** *Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$: $b, c, d \neq 0$. Тогда если*

1. *$a \vdots b$, $b \vdots c$, то $a \vdots c$.*
2. *$a \vdots b$, то $\forall k \in \mathbb{Z} \hookrightarrow ka \vdots b$.*
3. *$a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a+b) \vdots c$.*
4. *$a \vdots c$, $b \vdots d$, то $ab \vdots cd$.*
5. *$a \vdots b$ и $a \neq 0$, то $|a| \geqslant |b|$.*

Теорема 3 (О делении с остатком)**.** *Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$: $b \neq 0$. Тогда $\exists q, r \in \mathbb{Z}$: $0 \leqslant r \leqslant |b|$ и $a = b \cdot q + r$. Число r называется **остатком от деления** a **на** b, число q называется **частным** (**неполным частным**) **от деления** a **на** b, если $r = 0$ $(r \neq 0)$.*

Теорема 4. *Среди n подряд идущих целых чисел существует и единственно число, делящееся на n.*

7.2.3 НОД. НОК. Алгоритм Евклида

Определение 3. Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Пусть $c \in \mathbb{Z}$: $c|a$ и $c|b$. Тогда c называется ***общим делителем чисел*** a ***и*** b.

Замечание 1. *Любые два целых числа всегда обладают общими делителями* 1 *и* -1.

Определение 4. Числа a и b называются ***взаимно простыми***, если их общими делителями являются только 1 и -1.

Определение 5. Число d называется ***наибольшим общим делителем (НОД)*** целых чисел a и b (обозначение (a, b) или НОД(a, b)), если:

1. d является общим делителем чисел a и b;
2. d делится на любой другой общий делитель a и b.

Теорема 5 (О существовании НОД)**.** *Для любой пары целых чисел $a \neq 0$ и (или) $b \neq 0$ существует наибольший общий делитель.*

Определение 6. ***Линейной комбинацией чисел*** x_1***,*** x_2***, …,*** x_k ***с коэффциентами*** a_1***,*** a_2***, …,*** a_k, где $k \in \mathbb{N}$, a_1, a_2, …, a_k, x_1, x_2, …, $x_k \in \mathbb{R}$, называется число, равное $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$.

Теорема 6 (О линейном представление НОД)**.** *Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$: $a \neq 0$ и (или) $b \neq 0$. Тогда (a,b) представим в виде линейной комбинации чисел a и b, то есть $\exists \alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}$: $d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$.*

Определение 7. Числа $a \neq 0$ и $b \neq 0$ называются ***взаимно простыми***, если $(a, b) = 1$.

Теорема 7 (Алгоритм Евклида)**.** *Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$: $a \geqslant b > 0$. Тогда $(a,b) = (a - b,b)$.*

Доказательство. Пусть $d = (a, b)$. Тогда $\exists\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$: $a = d \cdot k_1$, $b = d \cdot k_2$.

Докажем, что $(k_1, k_2) = 1$.

Предположим «противное»: пусть $(k_1, k_2) = d_1 > 1$. Тогда $\exists\ l_1$, $l_2 \in \mathbb{Z}$: $k_1 = d_1 \cdot l_1$, $k_2 = d_1 \cdot l_2$.

Таким образом

$$(a, b) = (d \cdot k_1, d \cdot k_2) = (d \cdot d_1 \cdot l_1, d \cdot d_1 \cdot l_2),$$

откуда видно, что a и b имеют общий множитель, не меньший $d \cdot d_1$.

Следовательно, $(a,b) \geqslant d \cdot d_1$. Но тогда $d = (a, b) \geqslant d \cdot d_1 > d$, так как $d_1 > 1$. Полученное противоречие $(d > d)$ доказывает, что $(k_1, k_2) = 1$.

Таким образом, $(a-b, b) = (d \cdot k_1 - d \cdot k_2, d \cdot k_2) = (d \cdot (k_1 - k_2), d \cdot k_2)$.

Докажем, что из $(k_1, k_2) = 1$ следует, что $(k_1 - k_2, k_2) = 1$.

Предположим «противное»: пусть $d_2 = (k_1 - k_2, k_2) > 1$. Тогда $(k_1 - k_2) \vdots d_2$ и $k_2 \vdots d_2$. Следовательно, согласно свойствам делимости, доказанным ранее, $k_1 \vdots d_2$.

Но тогда $1 = (k_1, k_2) \geqslant d_2 > 1$. Полученнное противоречие $(1 > 1)$ доказывает, что $(k_1 - k_2, k_2) = 1$.

В силу того, что $(a - b, b) = (d \cdot (k_1 - k_2), d \cdot k_2)$ и $(k_1 - k_2, k_2) = 1$, получаем, что $(a - b, b) = d = (a, b)$. □

Теорема 8 (Обобщенный алгоритм Евклида)**.** *Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$: $a \geqslant b > 0$ и $a = b \cdot q + r$, где p, $q \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant r < b$. Тогда $(a,b) = (b,r)$.*

Определение 8. ***Наименьшим общим кратным (НОК) целых чисел*** $a \neq 0$ ***и*** $b \neq 0$ (обозначение $[a,b]$ или НОК(a, b)) называется наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел.

Теорема 9. *Наименьшее общее кратное чисел a и b является делителем их любого общего кратного.*

7.2.4 Модульная арифметика

Определение 9. Пусть a, b, $c \in \mathbb{Z}$: $c > 0$. Говорят, что a ***сравнимо с*** b ***по модулю*** c (обозначение $a \underset{c}{\equiv} b$ или $a \equiv b \pmod{c}$), если a и b дают одинаковые остатки при делении на c. Число c называется ***модулем сравнения***.

Замечание 2. *Поскольку все целые числа сравнимы друг с другом по модулю* 1*, и, следовательно, сравнение по модулю* 1 *не несет смысловой нагрузки, то в дальнейшем будем рассматривать модули сравнения, бОльшие* 1.

Теорема 10 (Свойства сравнения как отношения)**.** *Пусть* a, b, c, $m \in \mathbb{Z}$: $m > 1$. *Тогда выполнены свойства*

1. ***Рефлексивности:*** $a \underset{m}{\equiv} a$;
2. ***Симметричности:*** *если* $a \underset{m}{\equiv} b$, *то* $b \underset{m}{\equiv} a$;
3. ***Аддитивности:*** $a \underset{m}{\equiv} b$ *и* $b \underset{m}{\equiv} c$, *то* $a \underset{m}{\equiv} c$.

Теорема 11 (Арифметические операции со сравнениями)**.** *Пусть* a, b, c, $m \in \mathbb{N}$: $m > 1$. *Тогда выполнены свойства*

1. *Если* $a \underset{m}{\equiv} b$, *то* $\forall c \in \mathbb{Z} \hookrightarrow a + c \underset{m}{\equiv} b + c$.
2. *Если* $a \underset{m}{\equiv} b$, *то* $\forall c \in \mathbb{Z} \hookrightarrow ac \underset{m}{\equiv} bc$.
3. *Если* $a \underset{m}{\equiv} b$, *то* $\forall k \in \mathbb{Z}$: $k \neq 0 \hookrightarrow ka \underset{km}{\equiv} kb$.
4. *Если для некоторого* $k \in \mathbb{Z}$: $k \neq 0 \hookrightarrow ka \underset{km}{\equiv} kb$, *то* $a \underset{m}{\equiv} b$.
5. *Если* $a \underset{m}{\equiv} b$ *и* $c \underset{m}{\equiv} d$, *то* $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$.
6. *Если* $a \underset{m}{\equiv} b$ *и* $c \underset{m}{\equiv} d$, *то* $ac \underset{m}{\equiv} bd$.

7.2.5 Взаимно простые числа

Теорема 12 (Критерий взаимной простоты двух чисел)**.** *Числа a, $b \in \mathbb{Z}$ взаимно просты тогда и только тогда, когда $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = 1$.*

Теорема 13 (Свойства взаимно простых чисел)**.** *Пусть a, b, c, m, $n \in \mathbb{Z}$: $c \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Тогда:*

1. *Если $a \cdot b \,\vdots\, c$ и $(a, c) = 1$, то $b \,\vdots\, c$.*

2. *Если (a,c) $= 1$ и (b,c) $= 1$, то $(a \cdot b, c) = 1$.*

3. *Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \,\vdots\, a$, $c \,\vdots\, b$ и $(a, b) = 1$, то $c \,\vdots\, a \cdot b$.*

4. *Если $(a, b) = 1$, $a \,\vdots\, p$ и $b \,\vdots\, q$, то $(p, q) = 1$.*

7.2.6 Прогрессии

Определение 10. ***Числовая последовательность*** — множество пар (n, x), где каждому $n \in 1, 2, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие единственный $x \in \mathbb{R}$. Если $N < \infty$, то последовательность конечная; иначе — бесконечная.

Определение 11. ***Арифметическая прогрессия*** — числовая последовательность, все элементы которой (начиная со второго) больше предыдущего на фиксированное число d, называемое разностью арифметической прогрессии; $d \neq 0$.

Утверждение 3 (формула для нахождения n-го члена арифметической прогресии)**.**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Утверждение 4 (сумма первых n членов арифметической прогрессии)**.**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Доказательство. Докажем по индукции:

База индукции: $n = 1$:

$$S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$$
$$a_1 = a_1,$$

то есть база доказана.

Предположение индукции:

Пусть утверждение верно при $n = k$:

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k.$$

Индукционный переход:

Докажем утверждение для $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + a_{k+1} = \frac{ka_1 + ka_k + 2a_{k+1}}{2} =$$
$$= \frac{ka_1 + k(a_{k+1} - d) + a_{k+1} + a_1 + kd}{2} = \frac{a_1(k+1) + a_{k+1}(k+1) - kd + kd}{2} = a$$

шаг индукции доказан. □

Утверждение 5 (сумма первых n членов арифметической прогрессии)**.** *Сумму первых n членов можно выразить через первый:*

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

Утверждение 6. *Пусть a, b, c — 3 последовательных члена арифметической прогрессии. Тогда*

$$2b = a + c.$$

Доказательство. Так как a, b, c — 3 последовательных члена арифметической прогрессии, то $b = a + d$, $c = b + d = a + 2d$. Тогда

$$2b = 2(a + d) = 2a + 2d = a + (a + 2d) = a + c,$$

то есть

$$2b = a + c,$$

что и требовалось доказать. □

Определение 12. ***Геометическая прогрессия*** — числовая последовательность, все элементы которой (начиная со второго) больше предыдущего в фиксированное число q, называемое знаменателем геометической прогрессии; $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 1$.

Утверждение 7 (формула для нахождения n-го члена геометической прогресии)**.**

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Утверждение 8 (сумма первых n членов геометической прогрессии)**.**

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Утверждение 9 (сумма первых n членов геометической прогрессии)**.**

$$S_n = \frac{q \cdot b_n - b_1}{q - 1}.$$

Определение 13. Геометрическая прогрессия называется убывающей, если $0 < |q| < 1$.

Утверждение 10 (Сумма убывающей геометрической прогрессии)**.**

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Доказательство. Мы знаем, что

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Однако, при $0 < |q| < 1, n \to \infty :$

$$S_n \underset{n \to \infty}{\to} b_1 \frac{-1}{q - 1} = \frac{b_1}{1 - q}.$$

□

Утверждение 11. *Пусть a, b, c — 3 последовательных члена геометрической прогрессии. Тогда*

$$b^2 = ac.$$

Доказательство. Так как a, b, c — 3 последовательных члена геометрической прогрессии, то $b = aq$, $c = bq = aq^2$.

Тогда
$$b^2 = (aq)^2 = a^2q^2 = a \cdot aq^2 = ac,$$
следовательно
$$b^2 = ac,$$
что и требовалось доказать. □

Отдельно стоит рассмотреть конечные целочисленные геом. прогрессии.

Стоит отметить, что в этом случае $q \in \mathbb{Q}$, (при этом не равен 0 или 1), поскольку если мы домножим целочисленный ненулевой член геом. прогрессии на иррациональное число, то получим иррациональное число. Значит, $q = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} \backslash 0$, при этом $q \neq 1$.

Утверждение 12. *Конечная целочисленная геометрическая прогрессия, состоящая из 3 членов, имеет вид:*
$$kn^2, kmn, km^2; m \in \mathbb{N}; k, m \in \mathbb{Z} \backslash 0.$$

Доказательство. Рассмотрим целочисленную геометрическую прогрессию, состоящую из 3 членов: a, b, c.

Как было отмечено, $q = \frac{m}{n}$, причем будем считать дробь несократимой (если она сократимая, то сократим на их НОД и получим новую дробь). Тогда $b = a \cdot q = a \cdot \frac{m}{n}$, $c = a \cdot q^2 = a \cdot \frac{m^2}{n^2}$.

Поскольку дробь $\frac{m}{n}$ несократимая, то m^2 не делится на n^2. Следовательно, $a \vdots n^2$, то есть $a = k \cdot n^2, n \in \mathbb{Z} \backslash 0$.

Значит, $a = k \cdot n^2$, $b = a \cdot q = k \cdot n^2 \cdot \frac{m}{n} = k \cdot n \cdot m$, $c = b \cdot \frac{m}{n} = k \cdot m \cdot n \cdot \frac{m}{n} = k \cdot m^2$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 13 (вид конечной целочисленной геом. прогрессии, состоящей из l членов)**.** *Конечная целочисленная геом. прогрессия, состоящая из l членов, имеет вид:*
$$kn^{l-1}, kn^{l-2}m, \ldots, knm^{l-2}, km^{l-1},$$

где $k, m \in \mathbb{Z} \backslash 0; n \in \mathbb{N}$.

7.2.7 Комбинаторная теория чисел

Теорема 14 (основная теорема арифметики)**.** *Любое натуральное число, бОльшее* 1*, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей, причём единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей и расстановки знаков).*

Утверждение 14. *Сумма натуральных делителей натурального числа* n *равна* 1*, если* $n = 1$*, и равна*

$$\sigma(n) = (1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{\alpha_k}),$$

если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *— каноническое разложение* n.

Утверждение 15. *Количество натуральных делителей числа* n *равно* 1*, если* $n = 1$*, и равно*

$$\tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_k),$$

если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ *— каноническое разложение* n.

7.2.8 Задачи для разбора

Задача 1 (ЕГЭ-2019)**.** Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

1. Пусть $q = 34$. Найдите все возможные значения p.
2. Пусть $p + q = 22$. Найдите все возможные значения q.
3. Пусть $q^2 - p^2 = 2812$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Задача 2 (ЕГЭ-2019)**.** В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждые из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество чисел меньше, чем в предыдущий день.

1. Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 8. Может ли n быть больше 7?

2. Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 4, среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4,5?

3. Известно, что $n = 4$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

Задача 3 (ЕГЭ-2014)**.** а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Задача 4. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

Задача 5. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше 37,05?

в) Найдите максимально возможное значение S.

Задача 6. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Задача 7. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

1. Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?
2. Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?
3. Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

Задача 8 (ЕГЭ-2019)**.** Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, больше 1.

а) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 26?

б) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 23?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех пяти чисел?

Задача 9 (ЕГЭ-2018)**.** а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \leqslant n$ и $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{14}$.

Задача 10. а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0, 1{,}2{,}3$.

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0, 1{,}2{,}3$, ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0, 1{,}2{,}3$, ровно 130 способами?

Задача 11. С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

Задача 12. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задача 13. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d - наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству 3x = 8y - 29.

а) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\dfrac{q}{d}$.

Задача 14 (ЕГЭ-2016)**.** Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а сумма которых больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

а) 80;

б) 82;

в) 81.

Задача 15. а) Приведите пример трехзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?

в) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

Задача 16 (ЕГЭ-2018)**.** а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Задача 17. а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.