Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ФИЗТЕХ-СОЮЗ
ФОНД «ИННОПРАКТИКА»
ФОНД РАЗВИТИЯ ФИЗТЕХ-ЛИЦЕЯ

НАУКА В РЕГИОНЫ

Методические материалы по математике. 8 класс.

Смена 27 марта - 9 апреля 2017 г.

МФТИ
2017

Авторы и составители: преподаватели кафедры высшей математики МФТИ Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Головко А.Ю., Молчанов Е.Г., Глухов И.В.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков и факультативов, школьников, и может использоваться для подготовки к начальным этапам математических олимпиад.

МАТЕМАТИКА

Корректор: А.Д. Рыбаков
Компьютерная верстка: И.В. Вовченко, А.Д. Рыбаков

Оглавление

Глава 1

Факультативное обучение математике.

Составители к.ф.-м.н. Агаханов Н.Х., к.ф.-м.н. Подлипский О.К.

1.1 Введение.

Среди задач, которые современное общество ставит перед школьным образованием, важное место занимают поиск и отбор способных учащихся, а также мотивирование школьников на углубленное изучение выбранного предмета.

Апробированным и хорошо зарекомендовавшим себя методом решения этих задач является проведение предметных олимпиад школьников.

Стимулируя интеллектуальное развитие учащихся, содействуя в их профессиональном самоопределении, олимпиады также способствуют профессиональному росту и самореализации ищущих творческих учеников преподавателей.

Математика занимает центральное место как в системе школьного образования, так и в системе научного познания мира. Во-первых, в современном мире цифровых технологий математика является как основным инструментом обработки эмпирического знания, так и единым языком всех наук. Во-вторых, уровень способности восприятия математики позволяет судить об уровне креативности учащегося, его способности к восприятию и логической обработке нового знания (большинство вузов России ранее включало экзамен по математике в перечень обязательных на вступительных экзаменах). Математические способности, отражающие способности к аналитической обработке знаний, в построении модели и ее последующем исследовании, являются востребованными в различных областях знания.

Основу школьного образования составляет усвоение учащимися определенного набора знаний и овладевание ими определенным набором навыков. Таким образом, задачей школьного образования и обязанностью школьного учителя является привитие своим ученикам этих стандартных знаний и навыков. При этом каждый учащийся должен достичь одинакового со всеми одноклассниками уровня обучения предмету, независимо от степени восприятия ими предмета.

В олимпиадной математике, напротив, в основу заданий закладывается элемент новизны, когда школьник должен самостоятельно построить логическую конструкцию, то есть продемонстрировать умение «нестандартно мыслить». В действительности грань между стандартной школьной математикой и олимпиадной математикой не всегда является такой четкой. В традициях российской математической школы всегда было включение в учебники так называемых задач повышенной трудности и «занимательных» задач («Арифметика» Магницкого), являющихся, по своей сути, олимпиадными. Авторы таких учебников стремились помочь учителю в поиске способных учеников, в поддержке у них интереса к предмету, который не может вызвать рутинное изучение стандартных приемов и методов.

Работа с мотивированными учащимися невозможна без педагога-энтузиаста – школьного учителя, руководителя кружка, факультатива. А качественно подобранные учебно-методические материалы позволяют вести способного мотивированного школьника к достижению новых успехов.

1.2 Тематика факультативного обучения.

Математика, изучаемая в школе, повторяет в определенной степени процесс естественнонаучного познания мира и развития науки, происходивших от Древних времен до современности (точнее, до построения классиками науки Ньютоном, Лейбницем, Кантором основ математического анализа). Это, последовательно, арифметика и построение простейших фигур (квадрат, прямоугольник), изучаемых в начальной школе; изучение основ алгебры и геометрии Евклида (среднее звено школы). Наконец, более глубокое изучение алгебры и геометрии, изучение основ комбинаторики, теории вероятностей и математического анализа в старшем звене школы. Система изучения математики в школе подразумевает, в основном, овладение вычислительными и только в малой степени логическими алгоритмами. В то же время, основное назначение математических олимпиад – отбор талантливых школьников и учащихся, обладающих творческими способностями, требует как раз отказа от стандартных методов решения задач. Кроме того, не только российский, но и международный опыт показывают, что даже при более раннем овладении математическим аппаратом, успешное использование его, как правило, возможно, только в старшем школьном возрасте и даже в студенческие годы.

Поэтому ошибочным является обучение в школах с углубленным изучением математики учащихся по вузовским программам высшей математики.

Для работы с успешными в усвоении математики учащимися, мотивированными на дополнительное изучение предмета, ведущим учебным заведениям общего полного образования необходимо применение программ углубленного изучения школьного курса математики. Это создает основу сохранения и развития интереса к изучению математики, к учебе в целом.

Переход на углубленное изучение предмета предполагает как введение дополнительных часов на его изучение, предусмотренных планом факультативных занятий, так и корректировку программ. Еще раз отметим, что эффективность занятий предполагает не изучение в дополнительные часы университетских курсов высшей математики (к сожалению, такая практика присутствует в худших образцах школ, работающих по программам углубленного изучения математики), а более глубокое и содержательное рассмотрение на занятиях различных разделов элементарной математики, входящих в школьную программу. В первую очередь работа должна быть направлена на развитие логического мышления, умение создавать математические модели и исследовать их. В соответствии с указанными целями вносятся корректировки в программу.

Классический школьный курс дополняется в первую очередь следующими разделами:

1. **Арифметика, теория чисел.**

   В начальной школе и в среднем звене формируются начальные представления о целых числах, теории делимости. В то же время, серьезные задания по теории чисел дают возможность развития не только стандартных навыков применения алгоритмов в курсе математики (например, решение квадратных уравнений), но и позволяют значительно расширить как сам список этих алгоритмов (развитие когнитивности), так и позволяет предлагать учащимся задачи, которые не является простым выбор требуемых для решения заданий алгоритмов из списка освоенных. В ряде случаев требуемый алгоритм учащийся должен найти (придумать, создать) самостоятельно (развитие креативности).

Так, в список требуемых алгоритмов входят:

Алгоритмы нахождения наибольшего общего делителя нескольких натуральных чисел; Алгоритмы нахождения наименьшего общего кратного нескольких натуральных чисел; Алгоритм Евклида; Применение теории сравнений по модулю; Понятие асимптотики и скорости роста последовательностей; Признаки делимости (в частности рассмотрение четности числовых величин); Формулы сокращенного умножения в приложении к числовым и буквенным выражениям; Преобразование дробных и иррациональных выражений; Метод доказательства от противного; Метод конечного перебора; Основная теорема арифметики; Конструкции (построение набора числовых множеств, обладающего указанными свойствами).

Помимо этого изучаются свойства простых и составных чисел, рациональных чисел, иррациональных чисел, степеней простых чисел.

2. **Комбинаторика.**

Помимо классического школьного курса комбинаторики (вычислительная комбинаторика – сочетания, размещения, классическая вероятность как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов), проверяющего навыки выполнения стандартных вычислений в классической вероятностной схеме, в углубленном курсе добавляются разделы комбинаторики: принцип Дирихле, метод крайнего, основы теории графов, логические задачи, инварианты, полуинварианты. В среднем звене школы – это включение в задания задач на переливание, взвешивание, разрезание фигур; рассмотрение четности, как инварианта; задач на логику. В старшем звене к указанным темам добавляются основы теории графов, экстремальные задачи.

3. **Алгебра.**

Расширение и углубление стандартного школьного курса алгебры идет за счет значительно более глубокого изучения темы «Неравенства», в том числе доказательства и применения неравенств о среднем арифметическом, геометрическом, квадратичном и гармоническом; неравенства Коши - Буняковского; метода Штурма; приложений темы «неравенства» к решению экстремальных задач в геометрии, к выводу асимптотики и оценок в теории чисел. Указанные темы как включаются в олимпиадные задания, так и позволяют более качественно подготовиться к последующему обучению в ведущих учебных заведениях высшего профессионального образования. Помимо приведенных тем обязательным является изучение метода математической индукции, приложение метода для решения задач на делимость, доказательство тождеств, доказательство неравенств, задач комбинаторной геометрии. Это позволяет развивать математическую технику, в том числе построения доказательств утверждений в алгебре. Другой алгебраической темой, включаемой в программу, является тема «Многочлены», в том числе теорема Виета для многочленов степени, выше второй, теорема Безу, теорема о целом корне многочлена с целыми коэффициентами. Более глубоким должно быть исследование множеств на координатной плоскости, в том числе методы доказательства геометрических теорем алгебраическими методами (в качестве приложений: теорема о высотах треугольника, окружность Аполлония, оптические свойства параболы). В старшем звене – изучение свойств множеств, задаваемых системами уравнений, и неравенств на координатной плоскости. В теме «Исследование функций» – это решение задач с привлечением идей монотонности, периодичности, оценок. В теме «Графики функций» – преобразование графиков, асимптотическое поведение функций, исследование функций с помощью производной.

4. **Тригонометрия.**

   Помимо стандартных преобразований тригонометрических выражений и решения тригонометрических уравнений, обязательным является решение тригонометрических неравенств, систем тригонометрических уравнений, решение задач с использованием свойств тригонометрических функций (ограниченность, периодичность, четность).

5. **Планиметрия.**

   К стандартному школьному курсу планиметрии добавляются разделы: выпуклость и выпуклые фигуры, неравенство треугольника и решение задач с использованием неравенства треугольника, свойства биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника. Для развития математического аппарата, применяемого в физике, более глубоким должно быть изучение темы «Векторы», в том числе теоремы о базисе (теорема о разложении векторов), в программу необходимо включение основ метода масс. Необходимо также включение заданий на приложение тригонометрии не только к вычислительным задачам планиметрии, но и к доказательству терем (теорема Птолемея, теорема Эйлера о радиусах вписанной и описанной около треугольника окружностей).

Наиболее популярными в олимпиадной геометрии являются задачи с окружностями. Это и понятно: весьма ограничен круг задач на «линейные объекты» геометрии: отрезки, прямые, многоугольники. К тому же, в силу простоты нахождения решений этих задач аналитическими методами (координатными, векторными), что фактически «убивает» геометрическую суть задач, задачные композиторы стремятся предлагать олимпиадные задачи, включающие более сложный с аналитической точки зрения объект – окружность. Ведь окружность является единственной изучаемой в школьном курсе геометрии фигурой, не задаваемой линейным уравнением (у многоугольника каждая отдельная сторона – отрезок). Особое место в олимпиадной геометрии занимает тема «Вписанный угол», позволяющая создавать большое количество новых красивых геометрических задач. в силу чего тема «Вписанные углы», широко представлена в олимпиадной математике. Поэтому тема должна обязательно включаться в углубленный курс математики. В качестве примеров на приложение теорем обязательным является доказательство изогонального сопряжения высоты треугольника и радиуса описанной окружности, теорема Птолемея. Среди метрических теорем обязательным является изучение теорем Менелая и Чевы, их приложений, в том числе к теореме о трех центрах подобия.

6. **Стереометрия.**

   Обязательным является углубленное изучение тем: «Сечения многогранников», «Комбинации многогранников и круглых тел», «Многогранные углы», «Углы и расстояния в пространстве», «Круглые тела», «Объемы многогранников». Для качественного понимания стереометрии обязательным является знакомство с теоремой Эйлера для многогранников и ее приложение.

7. **Основы математического анализа.**

   Данный курс является, по сути, промежуточным между школьной математикой и высшей математикой, включенной в программы всех технических вузов и университетов математического профиля. Здесь основу программы должна составлять практическая сторона курса: применение методов математического анализа для исследования функций, решения экстремальных задач.

1.3 Темы факультативных занятий.

Выделим основные темы углубленного обучения математике, использующиеся также и на олимпиадах начального уровня. Данные темы рекомендуется рассматривать во время факультативных занятий со школьниками.

Ниже приведены темы олимпиадных занятий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

1.3.1 VI-VII классы.

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД.

Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на $2, 3, 5, 6, 9$.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции

Функция. График функции. Функции: $y = kx, y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров. Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

1.3.2 VIII-IX классы.

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком.

Признаки делимости на $2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11$.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

1.3.3 X-XI классы.

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на $2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11$. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π .

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Рекомендуемая литература для подготовки факультативных занятий по математике

Журналы: «Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников».

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика.

Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. , Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е.Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958.

Раскина И.В., Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс:
http://www.problems.ru/

Глава 2

Функции.

Составитель к.ф.-м.н. Агаханов Н.Х.

2.1 Задачи к семинару.

Задача 1

Как расположена точка $(3; 5)$ по отношению к прямой $y = 3x + 2$: выше, ниже или лежит на этой прямой?

Ответ: Ниже.

Решение.

Точка с координатами $(3; 11)$ лежит на прямой, поэтому точка $(3; 5)$ лежит ниже.

Задача 2

Известно, что точка $(3; 7)$ расположена выше прямых $y = ax+b$ и $y = cx+d$. А как эта точка может быть расположена по отношению к прямой $y = 0{,}5(a+c)x+0{,}5(b+d)$ (только выше; только ниже; или же ответ зависит от коэффициентов)?

Ответ: Только выше.

Решение.

При $x = 3$ функция $y = 0{,}5(a+c)x + 0{,}5(b+d)$ принимает значение равное полусумме значений функций $y = ax + b$ и $y = cx + d$, каждое из которых меньше 7.

Задача 3

а) Найдите точку пересечения прямых $y = 2x + 2$ и $y = -x + 5$;

б) докажите, что при любом значении параметра a прямые $y = a(2x+2) + (a-1)(x-5)$ проходят через одну точку.

Ответ: а) $(1; 4)$.

Указание: б) Вне зависимости от значения параметра а прямые проходят через точку $(1; 4)$.

Задача 4

Докажите, что все прямые $y = ax + b - 2$ проходят через одну точку, если выполняется условие $3a + 5b = -1$.

Указание: Исключите одну из переменных.

Задача 5

На плоскости нарисованы прямые как на приведенном рисунке:

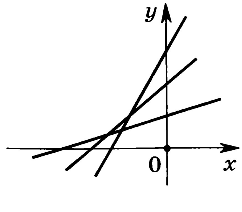

Рис. 1

а) Могут ли эти прямые быть графиками функций $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$?

б) Могут ли эти прямые быть графиками функций $y = ax - b - c$, $y = bx - c - a$, $y = cx - a - b$?

Ответ: а) Не могут; б) Не могут.

Решение.

а) Предположим противное. Пусть уравнение прямой l_1 (см. рисунок 2) имеет вид $y = bx + c$. У этой прямой самый большой угловой коэффициент, в частности $b > c$. Но прямая l_1 пересекает ось ординат в точке с ординатой c, прямая l_2 — в точке с ординатой b, причем из рисунка видно, что $b < c$. Полученные неравенства противоречат друг другу, следовательно, таких чисел a, b и c не существует.

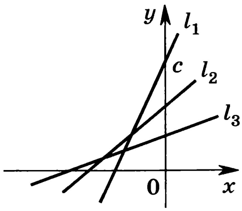

Рис. 2

б) Предположим противное. Заметим все три прямые должны проходить через точку $(-1; -a-b-c)$. Но на рисунке три прямые не проходят через одну точку. Значит, таких чисел a, b и c не существует.

Задача 6

Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(1;2)$, и равноудаленных от точек $B(5;-1)$ и $C(-1;3)$.

Ответ: $y = -x + 3$, $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Указание: Рассмотрите два случая:

1) точки B и C лежат по разные стороны от искомой прямой;

2) точки B и C лежат по одну сторон от искомой прямой.

В первом случае прямая проходит через середину отрезка BC, во втором случае прямая параллельна отрезку BC.

Задача 7

Докажите теорему о высотах треугольника с помощью применения разбираемой темы: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Указание: Выберите систему координат так, чтобы две вершины треугольника лежали на оси Ox, а третья – на оси Oy. Запишите уравнения сторон. Запишите уравнения высот, используя следующее свойство: прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $ac = -1$. Найдите точку пересечения высот (на оси Oy).

Задача 8

Постройте на координатной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями:

$$y = |x - 1| + |x + 1|,\ y = ||2x - 1| - 5| + 1.$$

Указание: Используйте свойства модуля и преобразования графиков функций.

Задача 9

Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?

Ответ: Верно.

Решение.

Так как $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то $b^2 \geq 4ac$, откуда $b^6 \geq 64a^3c^3$. Если $ac > 0$, то $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$, а если $ac < < 0$, то $b^6 \geq 0 > 4a^3c^3$ – в обоих случаях $b^6 \geq 4a^3c^3$, то есть дискриминант неотрицателен.

Задача 10

Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2 + + px + q$, у которых $2p + q = 2017$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

Решение.

Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 2$. Тогда $y = x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2p + q = 4 + 2017 = 2021$, то есть графики всех трехчленов проходят через точку (2; 2021).

Задача 11

Про квадратные трехчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а трехчлен $f_1 - f_2$ корней не имеет. Докажите, что трехчлен $f_1 + f_2$ имеет корни.

Решение.

Предположим противное: $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Есть два варианта: f_+ и f_- одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни – противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни – противоречие.

Задача 12

На координатной плоскости нарисована ломаная, задаваемая следующим образом:

$$y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x < -2 \\ 3x+7, & \text{если } -2 \le x \le 3 \\ 7x-5, & \text{если } 3 < x \end{cases}$$

Найдите формулу, в которую входят только линейные функции и модули, описывающую данную функцию.

Ответ: $y = |x+2| + 2|x-3| + 4x - 1$

Указание: Искомую функцию нужно искать в виде $y = a|x+2| + b|x-3| + cx + d$.

2.2 Задачи для факультативной работы.

Задача 13

При каких значениях a прямые $y = 2x - 1$, $y = x + a + 3$ и $ay = -x - 4$ проходят через одну точку?

Ответ: $a = -2$.

Решение.

Выразим из первого уравнения y, и подставим во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} 2x - 1 = x + a + 3 \\ 2ax - a = -x - 4 \end{cases}$$

Исключив из данной системы переменную x, получаем: $a^2 + 4a + 4 = 0$.

Задача 14

Числа a, b, c таковы, что прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ имеют общую точку. Докажите, что $a = b = c$.

Решение.

Пусть $P(x_0;\ y_0)$ – общая точка данных прямых. Вычитая из первого уравнения второе, из второго – третье, а из третьего – первое, и перемножив полученные равенства, получаем: $(a-b)(b-c)(c-a)x_0^3 = (c-b)(a-c)(b-a)$. Отсюда, если разности в скобках не равны нулю, получаем: $x_0^3 = -1$, то есть $x_0 = -1$. Подставив это значение в равенства $y_0 = ax_0 + b$, $y_0 = bx_0 + c$, $y_0 = cx_0 + a$ получаем: $y_0 = b - a = c - b = a - c$, откуда $a = b = c$.

Задача 15

Положительные числа a, b, c таковы, что точка $K(1; 2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определите, как эта точка расположена по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$.

Ответ: Ниже графика параболы.

Решение.

Заметим, что при $x = 1$ обе параболы проходят через точку A с координатами $(1;\ a+b+c)$. Раз точка K лежит ниже графика первой параболы, и ветви первой параболы направлены вверх, то она лежит ниже точки A (т.е. $2 < a + b + c$). Но так как ветви второй параболы также направлены вверх и точка K лежит ниже точки A параболы, то K лежит и ниже графика второй параболы.

Задача 16

Парабола $y = ax^2$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение.

Поскольку график пересекает прямые, $a > 0$. Заметим, что прямая $y = c$ $(c > 0)$ пересекает данную параболу в точках, симметричных относительно оси ординат, поэтому данные в условии отрезки имеют длины $2x_1$,$2x_2$, $2x_3$, где – положительные корни уравнений x_1, x_2, x_3. Следовательно, сумма квадратов длин первых двух отрезков равна $(2x_1)^2 + (2x_2)^2 = = 4\frac{1}{a} + a\frac{2}{a} = 4\frac{3}{a}$. Значит, эта сумма равна квадрату длины третьего отрезка. Утверждение доказано.

Задача 17

Докажите, что при любых a и b уравнение $(a^2 - b^2)x^2 + + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ имеет решение.

Решение.

Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то данное уравнение квадратное с дискриминантом $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \geq 0$. Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то уравнение имеет корень.

Задача 18

Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 – корни данного трехчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0, то есть число $a + b + 1$ составное.

Задача 19

Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2+ax+b=0$ и x^2+cx+d не имеют корней, то и уравнение $x^2+\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}=$ $=0$ также не имеет корней?

Ответ: Верно.

Решение.

Первое. По условию $a^2 < 4b$ и $c^2 < 4d$. Покажем, что тогда $\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 < 4\left(\dfrac{b+d}{2}\right)^2$. Имеем $\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{4}(a^2+2ac+$ $+c^2) \le \dfrac{1}{4}(a^2(a^2+c^2)+c^2) = \dfrac{1}{2}(a^2+c^2) \le (4b+4d)$.

Второе. Пусть, $f_1 = x^2+ax+b$, $f_2 = x^2+cx+d$. По условию $f_1 > 0$ и $f_2 > 0$ при всех x, так как $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$. Но тогда и $f = x^2 + \dfrac{a+c}{2}x + \dfrac{b+d}{2} = \dfrac{f_1+f_2}{2}$, значит, уравнение $f = 0$ не имеет корней.

Задача 20

Дан график функции $y = x^2 + ax + a$. Найдите a.

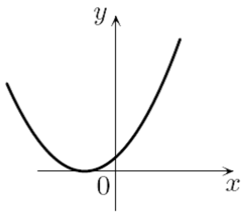

Рис. 3

Решение.

График касается оси Ox, поэтому $y = (x+x_0)^2$, $y = x^2 +$ $+2xx_0 + x_0^2$, то есть $a = 2x_0$ и $a = x_0^2$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$.

Задача 21

На доске написали квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Каждую минуту на доске дописывают квадратный трехчлен, причем у каждого следующего трехчлена все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится трехчлен, не имеющий корней.

Решение.

Пусть сначала на доске был написан трехчлен ax^2+bx+c. Тогда через n минут будет выписан трехчлен $(a+n)x^2+(b+ +n)x+(c+n)$. Его дискриминант $D=(b+n)^2-4(a+n)(c+n)= =-3n^2+(2b-4a-4c)n+(b^2-4ac)$ является квадратным трехчленом (относительно переменной n) с отрицательным старшим коэффициентом. Значит, при некотором натуральном n дискриминант будет отрицательным. Поэтому на доске появится трехчлен, не имеющий корней.

Задача 22

Все коэффициенты квадратного трехчлена – целые нечетные числа. Может ли он иметь целый корень?

Ответ: Не может.

Решение.

Предположим, что нашелся такой квадратный трехчлен $P(x)=ax^2+bx+c$, что a,b,c – нечетные, а x_1 – его целый корень. Но тогда если x_1 – нечетно, то $P(x_1)$ нечетно как сумма трех нечетных чисел, если же x_1 – четно, то $P(x_1)$ нечетно как сумма двух четных и одного нечетного числа. Но 0 – четное число. Значит, $P(x_1)\neq 0$.

Задача 23

Найдите сумму корней всех квадратных трехчленов вида $y = x^2 + px - 2017$, где p принимает все целые значения от –100 до 100.

Ответ: 0.

Решение.

Поскольку $D = p^2 + 4 \cdot 2017$ для любого p, то все трехчлены имеют вещественные корни. Заметим, что по теореме Виета сумма корней трехчлена $y = x^2 + px - 2017$ равна $-p$, то есть сумма корней всех написанных трехчленов равна $100 + 99 + + 98 + \cdots + (-99) + (-100) = 0$.

Задача 24

На рисунке 4 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$, $cx^2 + ax + b$?

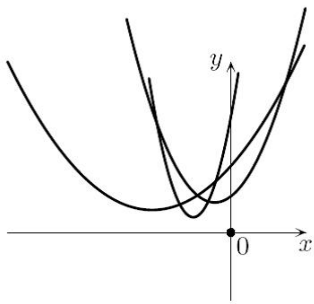

Рис. 4

Ответ: Не могут.

Решение.

Предположим противное. Заметим, что значения данных трехчленов в точке $x = 1$ совпадают (они равны $a + b + c$).

Но из рисунка видно, что каждые две из парабол пересекаются в двух точках, причем все эти шесть точек пересечения различны. Получили противоречие.

Задача 25

Дискриминант приведенного квадратного трехчлена $P(x)$ положителен. Сколько корней может иметь уравнение $P(x) + P(x+\sqrt{D}) = 0$?

Ответ: Один.

Решение.

Первое. Пусть $P(x) = x^2 + px + q$ и $D = p^2 - 4q > 0$. Тогда уравнение примет вид $P(x) + P(x+\sqrt{D}) = x^2 + px + q + (x+\sqrt{D})^2 + p(x+\sqrt{D}) + q = 2x^2 + 2(x+\sqrt{D})x + 2q + D + p\sqrt{D} = 0$ Посчитаем четверть дискриминанта получившегося квадратного уравнения. Она равна $(p+\sqrt{D})^2 - 2(2q + D + p\sqrt{D}) = p^2 - 4q - D = 0$. То есть уравнение имеет ровно один корень.

Второе. Если $x_1 < x_2$ – корни квадратного трехчлена $P(x)$, то $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$, откуда следует, что график $y = P(x)$ получается из графика трехчлена сдвигом влево вдоль оси Ox на расстояние $\sqrt{D}$, равное расстоянию между точками пересечения графика $y = P(x)$ с осью Ox. Это означает, что графики трехчленов $y = P(x)$ и $y = P(x+\sqrt{D})$ пересекают ось Ox в общей точке с абсциссой $x = x_1$ и симметричны относительно прямой $x = x_1$. Поэтому график квадратного трехчлена $P(x)+P(x+\sqrt{D})$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = x_1$ и симметричен относительно прямой $x = x_1$. Значит, квадратный трехчлен $P(x)+P(x+\sqrt{D})$, во-первых, имеет корень $x = x_1$, во-вторых, не может иметь других корней, так как все его корни должны быть симметричны относительно точки $x = x_1$, и наличие других корней означало бы, что их не меньше трех.

Задача 26

Нарисуйте на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

а) $|x| + |y| \le 4$; б) $|x + y| + |x - y| \le 4$.

Ответ: а) Квадрат с вершинами в точках $(0;4)$, $(4;0)$, $(0;-4)$, $(-4;0)$;

б) квадрат с вершинами в точках $(2;2)$, $(2;-2)$, $(-2;-2)$, $(-2;2)$.

Указание: а, б) Используйте симметрию и разберите один из случаев раскрытия модуля.

Задача 27

На плоскости нарисованы координатные оси без масштаба, а также прямые, заданные уравнениями $y = ax + b$, $y = bx + a$ (сами коэффициенты a и b – различные неизвестные числа). Постройте с помощью циркуля и линейки прямую, заданную уравнением $y = 2(a + b)x$.

Указание:

1) Прямая $y = 2(a + b)x$ проходит через точку $O(0;0)$ – пересечение координатных осей и точку A.

2) Прямые $y = ax + b$ и $y = bx + a$ пересекаются в точке B.

3) Длина перпендикуляра, проведенного из точки B к оси Ox в два раза меньше длины перпендикуляра, проведенного из точки A к оси Ox.

Задача 28

Существуют ли несколько различных строго возрастающих линейных функций таких, что квадрат любой из них при всех значениях x больше суммы остальных линейных функций?

Ответ: Не существуют.

Указание: Рассмотрите точки пересечения прямых с осью Ox и выберите прямую (одну из таких, если их несколько), пересекающую ось Ox в самой правой из этих точек.

Глава 3

«Оценка+пример»

Составитель к.ф.-м.н. Подлипский О.К.)

3.1 Задачи к семинару.

Задача 29

Каково наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на 990?

Ответ: 11.

Решение.

Поскольку в разложение числа 990 на простые множители входит число 11, то n не менее 11. С другой стороны, $n = 11$ удовлетворяет условию задачи.

Задача 30

Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?

Ответ: 7 человек.

Решение.

Пусть n – число всех участников кружка, а d – число девочек. По условию $0{,}4n < d < 0{,}5n$. Условие можно записать в виде $2d < n < 2{,}5d$. Значит, $0{,}5d > 1$, то есть $d > 2$. При $d = 3$ получаем $6 < n < 7{,}5$, и наименьшее n равно 7.

Задача 31

Несколько камней вместе весят 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трехтонок можно гарантированно увезти этот груз за один раз?

Ответ: На 5 трехтонках.

Указание: 4 трехтонок не хватит, если будет 13 камней по $\frac{10}{13}$ т. 5 трехтонок гарантированно хватит, так как на одной трехтонке можно увезти не менее 2 т камней.

Задача 32

В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 50 боксеров. Какое наименьшее количество боев надо провести, чтобы выявить победителя?

Ответ: 49 боев

Решение.

После каждого боя из соревнований выбывает один боксер – проигравший в этом бою. Поскольку всего к концу соревнований выбыть должны все, кроме победителя, всего должно быть 49 боев, независимо от того, как составляется расписание.

Задача 33

Имеется 26 монет, одна из которых фальшивая, причем она легче других. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти фальшивую монету?

Ответ: 3 взвешивания.

Указание: Если взвешиваний 2 или меньше, то всего вариантов возможных показаний весов не более $3 \cdot 3 = 9$. За 3 взвешивания найти монету можно. Для этого монеты нужно делить на 3 «примерно равные по количеству» кучки. Так для первого взвешивания нужно разбить монеты на 9, 9 и 8. И взвесить 9 и 9 монет.

Задача 34

Какое наибольшее количество:

а) ладей;

б) королей;

в) слонов;

г) коней, не бьющих друг друга

можно расставить на доске 8×8?

Ответ:

а) 8;

б) 16;

в) 14;

г) 32.

Указание: Посмотрите сколько фигур можно поставить

а) на одну горизонталь;

б) в квадрат 2×2 клетки;

в) на одну диагональ;

г) в прямоугольник 2×4 клетки.

Задача 35

Из шахматной доски вырезали одну угловую клетку. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать эту фигуру?

Ответ: 18.

Решение.

Слева на рисунке 5 показано, как разрезать данную фигуру на 18 равновеликих треугольников. Докажем, что это число — максимально возможное. Примем за единицу площадь одной клетки. Данная фигура представляет собой невыпуклый шестиугольник $ABCDEF$ площади 63 с углом $270°$ в вершине D (правый нижний рисунок). Если мы имеем разбиение фигуры на треугольники, то, очевидно, что точка D должна принадлежать по крайней мере двум треугольникам, причем у одного из них сторона лежит на прямой DE, а у другого — на DC. Более того, по крайней мере для одного из них она лежит на соответствующем отрезке. Для определенности предположим, что это треугольник DKL, причем K лежит на DC. Тогда основание DK этого треугольника не больше $DC = 1$, а высота – не больше $BC = 7$. Поэтому площадь треугольника DKL не больше 3,5. По условию, мы имеем разбиение данной фигуры на равновеликие треугольники. Поскольку площадь одного треугольника не больше 3,5, то всего треугольников не меньше 18.

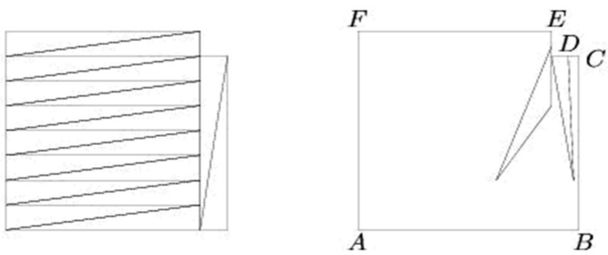

Рис. 5

Задача 36

Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, ..., 1 + a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что каждые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Ответ: 4 числа.

Решение.

Заметим, что если k нечётно, то число $1 + a^{nk}$ делится на $1 + a^n$. Каждое из чисел $1, 2, ..., 15$ имеет один из видов k, $2k$, $4k$, $8k$, где k нечётно. Таким образом, каждое из выписанных чисел делится либо на $1 + a$, либо на $1 + a^2$, либо на $1 + a^4$, либо на $1 + a^8$. Поэтому, если мы возьмем хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два, кратных одному и тому же числу, большему 1; значит, они не будут взаимно просты. Итак, оставшихся чисел не более четырёх. Четыре числа могли остаться: если $a = 2$, то можно оставить числа $1+2 = 3, 1+2^2 = 5, 1+2^4 = 17$ и $1+2^8 = 257$. Все они попарно взаимно просты.

Задача 37

Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Ответ: 33 лампочки.

Решение.

Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Можно считать, что первая лампочка – красная. Поскольку рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трех последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем $48/3 = 16$. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут. Итак, синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17. Такой случай возможен: если лампочки с номерами $2, 5, 8, 11, ..., 50$ – синие, а остальные – красные, то в гирлянде – 33 красные лампочки.

Задача 38

За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них – либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

Ответ: При $k = 2013$.

Решение.

Пусть A и B – люди, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами, соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу, A – рыцарь, а B – лжец. Поэтому ни один из них не мог произнести вторую фразу. Следовательно, $k \leq 2013$. Ситуация, когда оставшиеся 2013 человек смогут сказать вторую фразу, возможна. Пусть сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами $1, 2, 3, ..., 2015$; при этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные – лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую – все, кроме людей с карточками 1 и 2015.

Задача 39

На шахматной доске расставили n белых и n черных ладей так, чтобы ладьи разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 16.

Решение.

Докажем, что при $n > 16$ осуществить указанную расстановку невозможно. Заметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали могут располагаться ладьи только одного цвета (либо она может оказаться свободной от ладей). Будем обозначать горизонталь (вертикаль) тем же цветом, что и цвет ладей, стоящих на ней. Так как ладей больше 16, то белых горизонталей не меньше трех. Если белых горизонталей ровно три, то в одной из них – не менее 6 ладей, то есть белых вертикалей не менее шести, а черных – не больше двух. Это, как показано выше, невозможно. Итак, белых горизонталей – не меньше четырех, значит, черных – не больше четырех. То же верно и для черных вертикалей. Следовательно, черных ладей не больше 16. Противоречие.

Пример возможной расстановки при $n = 16$ можно получить, поставив 16 белых ладей в левый нижний квадрат доски размером 44, а 16 черных – в правый верхний.

Задача 40

В компании «Рога и Копыта» 100 акционеров и любые 66 из них владеют не более чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом акций может владеть один акционер?

Ответ: 25%.

Решение.

Пусть M – акционер, владеющий наибольшим процентом акций, и у него x% акций. Разобьём остальных 99 акционеров на три группы A, B и C по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a, b и c процентами акций. Тогда $2(100-x) = 2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a) \geq 50+50+50$, откуда $x \leq 25$.

Если же каждый из 99 акционеров, кроме M, владеет $75/99\%$ акций, то любые 66 из них без M владеют ровно 50%, а любые 66, включая M, владеют более 50%, при этом у M – ровно 25% акций.

Задача 41

На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел – иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ: 3 числа.

Решение.

Предположим, что на доске написано не меньше четырёх чисел. Обозначим любые четыре из них через a, b, c, d. Тогда числа $a+b+c$ и $a+b+d$ будут рациональными. Значит, и их разность, равная $(b+c+d)-(a+b+c) = d-a$ также будет рациональным числом. Аналогично можно показать, что $b-a$ и $c-a$ будут рациональными. Таким образом, $b = a+r_1$, $c = a+r_2$, $d = a+r_3$, где r_1, r_2, r_3 – рациональные числа. Но, поскольку число $a+b+c = 3a+r_1+r_2$ рационально, число $a+b+c = 3a+r_1+r_2$ также рационально. Значит, и число $a+b = 2a+r_1$ рационально, что противоречит условию. Итак, на доске не более трёх чисел. Осталось заметить, что на доске могли быть написаны три числа, удовлетворяющие условию, например, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$.

Задача 42

Какое наименьшее число попарно непересекающихся кругов, не содержащих данную точку O, можно расположить на плоскости так, чтобы любой луч, выходящий из точки O, пересекал не менее трех из них?

Ответ: 7 кругов.

Решение.

Разобьем полный угол с вершиной в данной точке на 7 равных углов (далее они называются секторами). Рассмотрим угол, составленный из трех соседних секторов, и впишем в него круг. Рассмотрим далее угол, составленный из трех следующих секторов, и тоже впишем в него круг. Проделаем это построение 7 раз, следя за тем, чтобы каждый следующий круг не пересекался с предыдущими (для этого, например, его можно выбирать значительно больших размеров, чем предыдущие). Так как каждый сектор входит в три из семи построенных углов, лучи, входящие в него, пересекают 3 соответствующих круга.

Докажем, что шестью кругами обойтись нельзя. Пусть имеется 6 кругов, не содержащих данную точку O. Рассмотрим окружность с центром в точке O, не пересекающую этих кругов. Для каждого круга рассмотрим на окружности дугу, высеченную касательными к нему, проведенными из точки O. Заметим, что луч с началом в точке O пересекает круг тогда и только тогда, когда точка пересечения этого луча с построенной окружностью принадлежит соответствующей дуге. Значит, луч пересекает три круга тогда и только тогда, когда точка его пересечения с окружностью принадлежит сразу трем дугам. Но каждая дуга меньше $180°$. В сумме они дают меньше $6 \cdot 180° = 1080° = 3 \cdot 360°$ и, значит, не могут покрыть окружность в три слоя. Поэтому найдется точка на окружности, принадлежащая не более чем двум дугам. Соответствующий луч пересекает не более двух кругов.

3.2 Задачи для факультитивной работы.

Задача 43

Каково наименьшее натуральное n такое, что $n!$ делится на 18, на 19, на 20 и на 21?

Ответ: 19.

Решение.

Так как число 19 простое, то $n \geq 19$. Осталось заметить, что 19! делится на 18, на 19, на 20 ($20 = 5 \cdot 4$) и на 21 ($21 = 7 \cdot 3$).

Задача 44

В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары подругому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Ответ: Один.

Решение.

Самый сильный обязательно станет призёром. Покажем, что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки 1 – 2, 3 – 4, ..., 99 – 100, во втором: 100 – 1, 2, – 3, ..., 98 – 99. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

Задача 45

За круглый стол сели 12 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть лжец». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть рыцарь»?

Ответ: 8

Решение.

Заметим, что два лжеца не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой лжец не может сказать вторую фразу.

С другой стороны, 3 рыцаря также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-лжец). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть лжец, то есть не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более 8 человек могли сказать вторую фразу.

Ровно 8 (рыцарей) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: ЛРРЛРРЛРРЛРР.

Задача 46

Имеется 9 карточек с числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Ответ: 8.

Решение.

Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед – карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно. Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: $9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5$.

Задача 47

Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?

Ответ: 10

Решение.

Заметим, что произведение двух чисел делится на квадрат их наибольшего общего делителя (НОД). Но максимальный квадрат, на который может делиться число 600 – это 100. Поэтому НОД не может быть больше 10. Если же, например, $a = 60$, $b = 10$, то их произведение равно 600, а НОД равен 10.

Задача 48

В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть – рыцари (они всегда говорят правду), а остальные – лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 яблока»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше $3, 4, \ldots, 10$ яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?

Ответ: 5.

Решение.

Так как 10 человек взяли по яблоку из мешка, то в мешке изначально было не меньше 10 яблок. После того, как первые

4 человека взяли по яблоку из мешка, в мешке осталось не менее 6 яблок. Значит, пятый вошедший (сказавший, что в мешке больше 5 яблок) сказал правду. Аналогично, сказали правду первые четверо. Это означает, что рыцарей не меньше 5, а лжецов не больше $10 - 5 = 5$.

С другой стороны, 5 лжецов среди этих 10 человек быть могло, если, например, в мешке изначально лежало 10 (или 11) яблок. Тогда первые пять человек скажут правду, а все, начиная с шестого (перед его приходом в мешке будет только 5 или 6 яблок), солгут.

Задача 49

На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причём никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не может стоять 13 книг) Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

Ответ: 336.

Решение.

Разобьем книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я,…; 2-я, 16-я,…; …; 14-я, 28-я,… Из того, что $666 = 14\cdot 47+8 = (8+6)\cdot 47+8$, следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 цепочек по 47 книг. По условию в каждой из цепочек книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 (а таких цепочек восемь) их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 (а таких цепочек шесть) их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего $(8+6)\cdot 24 = 14 \cdot 24 = 336$ книг.

Задача 50

На смотре войска Острова лжецов и рыцарей вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге лжецы». (Воины стоящие в конце шеренги сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец»). Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?

Ответ: 1003.

Решение.

Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, то есть среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей. Значит, всего в шеренге не более $1002 + 1 = 1003$ рыцарей.

Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

Задача 51

На доске написано несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Ответ: 3 числа.

Решение.

Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a – число с минимальным модулем. Из остальных трех чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их b и c; тогда $bc = |bc| \geq |a|^2 = a^2$, что противоречит условию.

Осталось привести пример трёх чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа 1,2,-3.

Задача 52

Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит фишку в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую фишку на какую-то клетку, либо переставить фишку из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда фишка попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить фишку на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество фишек потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

Ответ: n.

Решение.

Покажем, что n фишек достаточно. Для этого заметим, что на каждую строку хватит одной фишки: можно поставить её в клетку строки с минимальным номером, а затем обойти все клетки строки в порядке возрастания номеров.

С другой стороны, покажем, что меньше, чем n фишек, может и не хватить. Для этого пронумеруем клетки так, чтобы клетки одной диагонали были пронумерованы $1,2,3,\ldots,n$ (остальные клетки нумеруем произвольно). Тогда одна фишка не сможет побывать на двух клетках этой диагонали: если фишка встала на одну из этих клеток, то следующим ходом она обязана будет пойти на клетку с номером, большим n, и значит, после этого она не сможет вернуться на диагональ.

Наконец, поскольку на каждой клетке диагонали должна побывать фишка, Пете придётся использовать не менее n

фишек.

Задача 53

Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. $0, 2, 4, 6$ или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

Ответ: За 2 хода.

Решение.

Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

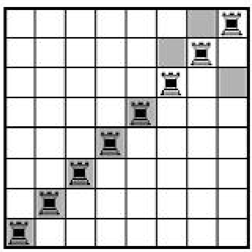

Рис. 6

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B а также на клетки C и D лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что A и B соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рисунке 6. Тогда он не выиграет, если Васины клетки – отмеченные серым на том же рисунке.

Задача 54

Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

Ответ: 1250 сумм.

Решение.

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоит хотя бы $x^2 + (50 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2 = 2x^2-100x+50^2 = 2(x-25)^2+2\cdot 25^2 \geq 2\cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500 - 1250 = 1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, \cdots, 25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны – числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26-\sqrt{2}, 27-\sqrt{2}, \ldots, 50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ сумм рационального и иррационального чисел.

Задача 55

На доске написаны пять ненулевых чисел. К ним дописаны еще пять чисел, получаемых следующим образом: из квадрата каждого из исходных чисел вычитается сумма четырех остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех десяти чисел на доске?

Ответ: 8 чисел.

Решение.

Если все пять исходных чисел отрицательны, то все пять новых чисел будут положительными, как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. Всего получится пять отрицательных чисел.

Пусть теперь среди пяти исходных чисел a, b, c, d, e есть положительное, например, $e > 0$. Рассмотрим пять чисел: $a, b, c, d, e - (a + b + c + d)$. Их сумма равна $e^2 > 0$. Значит, среди этих чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа e, и поэтому отрицательных чисел не больше восьми.

Покажем, что восемь отрицательных числе среди десяти написанных на доске могло быть. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a = b = c = d = -1, e = 10$. Тогда среди пяти дописанных чисел будут четыре отрицательных числа, равных -6, и одно положительное число 104.

Задача 56

За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Оба моих соседа – рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным.)

Ответ: 9.

Решение.

Заметим, что все 10 не могли сказать такую фразу. Так как за столом есть и рыцарь, и лжец, то найдутся лжец и рыцарь, сидящие рядом. Но тогда у этого рыцаря не оба соседа рыцари. Если же за столом сидит 9 лжецов и 1 рыцарь, то каждый из этих 9 лжецов мог сказать фразу «Оба моих соседа – рыцари», так как у каждого лжеца среди соседей есть лжец.

Задача 57

Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Закрашенные уголки не должны перекрываться.)

Ответ: 4

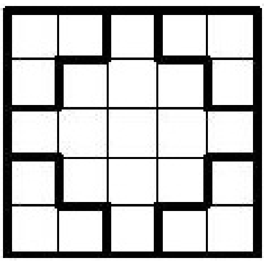

Рис. 7

Решение.

Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рисунке 7. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.

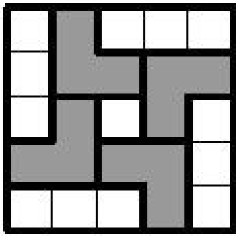

Рис. 8

На рисунке 8 показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

Задача 58

Назовем число, большее 25, *полупростым*, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

Ответ: 5.

Решение.

Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n+1$, $2n+3$ и $2n+5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа $2n-1$, $2n+1$ и $2n+3$ – простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие.

Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, $30 = 17 + 13$, $31 = 29 + 2$, $32 = 19 + 13$, $33 = 31 + 2$, $34 = 23 + 11$.

Задача 59

На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

Ответ: Три.

Решение.

Пусть $a \leq b \leq c \leq d$ – данные числа. Из условия следует, что $b + c + d < a$. Но $a \leq b$, значит, $b + c + d < a \leq b$, откуда следует, что $c + d < 0$. Значит, по крайней мере одно из двух самых больших чисел, написанных на доске, отрицательно. Следовательно, отрицательных чисел не меньше трёх. Пример чисел $-5, -4, -3, 1$ показывает, что одно из чисел может быть положительным.

Глава 4

Комбинаторика.

Составитель Молчанов Е.Г.

4.1 Вступление.

1. **Объяснить 2- или 3-класснику, почему при перестановке множителей произведение не меняется.**

   Неправильные ответы:

   - Запомните правило: при перестановке множителей произведение не меняется (а, теперь, запомните другое правило: 2+2=5).
   - Поверьте на слово
   - А их и нельзя переставлять: нужно всегда следить за порядком умножения.

   Пример правильного ответа:

   - Возьмем прямоугольники и посчитаем количество клеток в нем по столбцам и по строкам.

2. **Правило произведения.** Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, и после каждого такого выбора объект a_2 можно выбрать n_2 способами, то выбор упорядоченной пары (a_1,a_2) можно осуществить $n_1 n_2$ способами.

   Обратить внимание: а) После каждого выбора могут быть разные доступные объекты a_2 (прямоугольник, где в каждой строке закрашено одинаковое количество клеток, но в разных стобцах). Главное, чтобы каждый раз было одно и то же количество.
   б) Если объект a_1 – строка, объект a_2 – столбец. (a_1,a_2) – координата клетки. Упорядоченная – значит, что (a_2,a_1) – совершенно другая клетка.

3. **Правило суммы.** Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, а объект a_2 можно выбрать n_2 способами, причём результаты выбора объектов a_1 и a_2 никогда не совпадают, то выбор «либо a_1, либо a_2» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

4.2 Задачи к семинару.

Задача 60

Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов золотую, серебряную и бронзовую медали?

Решение.

Выбрать золотого медалиста (объект a_1) можно 20-ю способами. После этого выбрать серебряного медалиста (объект a_2) среди оставшихся участников можно 19-ю способами. После розыгрыша золотой и серебряной медали выбрать бронзового медалиста (объект a_3) можно 18-ю способами. Из правила произведения получаем, что количество способов разыграть между спортсменами золотую, серебряную и бронзовую медали равно $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Задача 61

Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов три призовых места?

Ответ: 6840.

Решение.

Пусть количество способов выбрать 3 призовых места из 20 участников равно m. Разыграем среди этих призёров золотую, серебряную и бронзовую медали. Количество способов разыграть 3 медали среди трёх участников равно $3! = 6$. Заметим, что в итоге среди 20 участников были разыграны золотая, серебряная и бронзовая медали.

С одной стороны, по правилу произведения количество способов разыграть медали среди 20 участников равняется $m \cdot 3!$. С другой стороны, это количество уже было подсчитано ранее, и оно равно $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Обратить внимание: «Правила деления» не было. И вводить не советую. Желательно изначально объяснять через «правило умножения» по образцу этой задачи, а только после понимания этого разрешать делить.

Задача 62

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи, чтобы они не «били» друг друга?

Ответ: 3136.

Решение.

Выбор объекта a_1 – поля для белой ладьи – может быть сделан 64-мя способами. Независимо от этого выбора белая ладья «бьёт» 15 полей, поэтому для чёрной ладьи (a_2) остаётся $64-15=49$ возможных полей. По правилу произведения общее количество способов поставить белую и чёрную ладьи равно $64 \cdot 49 = 3136$.

Задача 63

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Ответ: 151200.

Решение.

Пусть количество таких слов равняется m. Если бы все буквы были различны, то это количество равнялось бы 10! в соответствии с числом перестановок. Но в нашем слове буквы «т», «м» встречаются 2 раза, а буква «а» – 3 раза.

Сделаем эти буквы различными, приписав одинаковым буквам нижние индексы. Для начала трём одинаковым буквам «а» припишем разные индексы («$а_1$», «$а_2$» и «$а_3$» соответственно) – число слов теперь будет равняться $m \cdot 3!$. Затем сделаем «разными» буквы «т» и «м».

Теперь, в слове «$м_1а_1т_1ем_2а_2т_2ика_3$» все буквы действительно будут различны, и при перестановке букв получится $m \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 10!$ различных слов.

Задача 64

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 если цифры в записи числа не повторяются, и в числе есть цифра 7.

Решение.

Начнём с цифры 7. Если эта цифра стоит в числе на первом месте, то останется разместить 5 цифр из 9, т. е. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Если цифра 7 не стоит на первом месте, то она может стоять на одном из оставшихся 5 мест (5 способов). Далее посмотрим на первую цифру. Независимо от того, где находится цифра 7, первую цифру можно выбрать восемью способами из множества 1, 2, …, 6, 8, 9. (Ноль на первое место ставить нельзя.)

Наконец, восемь оставшихся цифр (теперь включая ноль) нужно упорядоченно поставить на 4 оставшихся места. Итого, по правилу произведения, различных чисел, не начинающихся с 7, удовлетворяющих условию задачи, будет $5\cdot 8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. По правилу суммы, получаем ответ.

Ответ: Ответ: $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 5\cdot 8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 82320$.

Задача 65

На параллельных прямых a и b отмечено 11 и 12 точек соответственно. Сколько треугольников можно составить с вершинами в отмеченных точках?

Ответ: 1386.

Решение.

Треугольники, составленные из отмеченных точек, разделим на два типа. К первому типу отнесём треугольники с двумя точками на прямой а и одной точкой на прямой b. Таких треугольников $\frac{10\cdot 11}{2\cdot 12} = 660$. Ко второму типу отнесём треугольники, у которых, наоборот, две точки на прямой b и одна – на прямой a. Треугольников второго типа $11\cdot\frac{11\cdot 12}{2} = 726$. Каждый треугольник принадлежит либо первому, либо второму типу, следовательно, количество всех треугольников равняется $660 + 726 = 1386$.

Задача 66

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове буква «к» не стоит непосредственно за буквой «и»?

Ответ: 136080.

Решение.

Посчитаем, наоборот, количество слов, в которых есть «ик». Обе буквы встречаются ровно по разу и если буква «к» идёт строго следом за буквой «и», мы можем считать, что существует новая «буква» «ик», на которую были заменены обе буквы. Таким образом, в перестановках участвуют только 9 букв, среди них три буквы «а», две буквы «м» и две буквы «т». Аналогично задаче 2, получим, что количество таких слов будет равно $\frac{9!}{3!\cdot(2!)^2}$. Для того, чтобы получить количество слов, в которых нет подслова «ик», данное число надо отнять из общего количества слов 151200 и получим ответ: $151200 - \frac{9!}{3!\cdot(2!)^2} = 136080$.

Задача 67

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове буква «м» не стоит непосредственно за буквой «е»?

Ответ: 90720.

Решение.

В предыдущей задаче буквы подслова «ик» встречались в исходном слове по разу. Здесь же в подслове «ем» буква «е» встречается один раз, а буква «м» – два раза. Рассмотрим слова, содержащие подслово «ем». Т.к. буква «ем» встречается ровно один раз, то можно однозначным образом выделить ещё одну букву за буквой «е», это будет буква «м», образовать букву «ем». Обратно, из буквы «ем» сделать две буквы «е» и «м» легко. В связи с этим в этом пункте ещё верен метод, описанный в предыдущей задаче. Количество слов, содержащих букву «ем» среди оставшихся 9 букв, в которых есть две одинаковых «т» и три одинаковых «а» (двух букв «м» уже нет) равняется $\frac{9!}{2!\cdot3!}$, а ответ – $151200 - \frac{9!}{2!\cdot3!} = 120960$.

Задача 68

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы они не «били» друг друга?

Ответ: 3612.

Решение.

Поставим для начала на доску белого короля. Невозможна ситуация, когда один король бьёт другого, а второй – не бьёт первого. Таким образом, достаточно поставить чёрного короля на одно из мест, которые не бьёт белый король.

Количество клеток битых первым королём клеток будет зависеть от его местоположения:

Если белый король стоит в углах (4 способа), он бьёт 3 клетки, и чёрный король может стоять на оставшихся $60 = (64 - 1 - 3)$ клетках.

Если белый король стоит на одной из сторон шахматной доски (24 способа), но не в угле, он бьёт 5 клеток, и чёрный король может стоять на оставшихся $58 = (64-1-5)$ клетках.

Наконец, если белый король стоит не на краю шахматной доски (36 способов), он бьёт 8 клеток, и чёрный король может стоять на оставшихся $55 = (64 - 1 - 9)$ клетках. Согласно правилам суммы и произведения, общее количество способов поставить белого и чёрного короля, не бьющих друг друга, равняется $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$.

Задача 69

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове буква «а» не стоит непосредственно за буквой «м»?

Ответ: 75150.

Решение.

В этой задаче в слове «ма» обе буквы «м» и «а» встречались в исходных словах по три и два раза. Попробуем посчитать количество слов, в которых есть подслово «ма». Если мы будем решать эту задачу так же, как в предыдущих аналогичных задачах, вводя «ма» как новую «букву», мы получим проблему того, что не всегда в слове, содержащем «м» и «а» друг за другом, мы сможем однозначно поставить в соответствие слово с новой буквой «ма». Как пример – изначальное слово «математика».

Если алфавит слова состоит из 8 букв «м», «а», «т», «е», «т», «и», «к», «а», и одной сдвоенной буквы «ма», то это слово можно прочесть неоднозначно – либо начиная со сдвоенной буквы, либо начиная с разных букв. Строго говоря, неоднозначность возникает тогда, когда подслово «ма» содержится дважды. И слова, содержащие «ма» дважды, мы с помощью этого метода и подсчитали дважды в виду двух способов определить, что из двух вхождений «ма» является сдвоенной буквой, а что – двумя разными буквами.

Таким образом, количество слов с подсловом «ма» равняется количеству слов из девяти букв (со сдвоенной «ма», букв «а» и «т» осталось по 2 штуки, $\frac{9!}{2!\cdot 2!} = 90270$ способов) минус количество дважды посчитанных вариантов, в котором букв «ма» две штуки. Количество слов, в которых подслово «ма» встречает дважды, найдем, введя слова из шести букв: «т», «е», «т», «и», «к», «а» и двух сдвоенных «ма»: $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$ (делим ещё раз на 2!, т.к. сдвоенная буква «ма» также встречается дважды). Итоговое количество слов, в которых содержится подслово «ма», равняется $151200 - 90270 + 10080 = 75150$.

4.3 Задачи для факультативной работы.

Задача 70

На шахматной доске в клетке а) a1 б) c3 «вырыли яму». Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи так, чтобы они не били друг друга, если на клетку с ямой ставить ладью нельзя и две ладьи, стоящие в одной вертикали или горизонтали «через яму» друг друга не бьют.

Ответ: а) 1519 б) 1539.

Решение.

а) В этом пункте нет проблемы того, что две ладьи стояли на одной вертикали или горизонтали и после того, как между ними вырыли яму, стали бить друг друга, т.к. яма находится скраю доски. Поэтому здесь из общего количества способов расставить две небьющих ладьи, нужно отнять количество способов, в которых одна из ладей изначально стояла в яме на клетке a1.

Общее количество способов считается следующим образом: первую ладью можно поставить 64-ю способами, на любую клетку. Вторую ладью можно поставить на 49 клеток, которые не бьёт первая ладья. С учётом того, что ладьи одинаковые, получаем $\frac{64 \cdot 49}{2} = 1568$. Если же одна ладья стояла на клетке a1, вторая ладья, её небьющая, стояла на одной из 49 оставшихся клетках, поэтому количество таких способов – 49. Проведя вычитание, получим 1519 способов

Замечание: Важно, что мы при подсчёте «лишних» вариантов не умножаем и не делим их количество, 49 на два (хоть и ладьи «одинаковые»).

Поделить на 2 мы не сможем как минимум потому, что получим нецелое число в качестве ответа на вопрос о «количестве способов». Однако здесь нам «повезло» с четностью –

была бы доска 7×7 вместо доски 8×8, вместо числа 49 в этом месте было бы число 36, которое уже на два делится. Поэтому все равно комбинаторно объясним, почему на два делить здесь не нужно. В отличие от исходного подсчета ладей здесь каждый вариант считаем не дважды, а единожды – одна (первая при подсчете) ладья стоит в клетке a1, вторая – не стоит. Поменяться и быть учтёнными дважды при нашем подсчёте они не смогут. Умножение же на два соответствовало бы тому, что ладьи считаются разными: способы «белая ладья стоит на a1» и «черная ладья стоит на a1» считались бы по отдельности, складывались и количество «лишних» способов равнялось бы $49 + 49 = 49 \cdot 2 = 98$, что и соответствовало бы нетребуемому умножению на два.

б) В этом пункте уже есть проблема того, что две ладьи стояли на одной вертикали или горизонтали и после того, как между ними вырыли яму, стали бить друг друга, т.к. яма находится не скраю доски.

Для начала, посчитаем количество способов расставить две ладьи так, чтобы они не били друг друга, если клетка c3 существует. Из предыдущего пункта, это количество равняется $\frac{64\cdot49}{2} = 1568$. Однако, в этом ответе здесь некоторое количество вариантов являются лишними, а некоторые, наоборот, не посчитаны.

«Не учтёнными» являются варианты, когда две ладьи стоят в третьей строке или в третьем столбце, причем клетка c3 стоит между ними. Они били друг друга, пока клетка c3 была без ямы, и мы их не учитывали. Теперь – бьют. Если эти ладьи стоят в третьей строке, то у ладьи, стоящей слева от c3 – 2 способа расположения. У ладьи, стоящей справа от c3 – 5 способов расположения. Итого $2 \cdot 5 = 10$ способов по третьей строке, ещё 10 – по третьему столбцу, итого 20 способов являются неучтенными.

«Лишними» являются варианты, когда одна из ладей стоит в клетке с ямой. Тогда вторая ладья стоит в одной из 49 клеток, которые «не бьет» эта ладья, таким образом, количество «лишних» способов – 49.

Замечание. Когда мы добавляли неучтённые варианты, они уже были упорядочены по способу подсчета – из двух одинаковых ладей одна была «левой», другая «правой», и также делить на два не требовалось.

Задача 71

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух ферзей так, чтобы они не били друг друга.

Указание: Иногда гораздо быстрее будет не «стрелять» из пушки по воробьям, пытаясь разделить все варианты и посчитать их с помощью строго применения правил произведения и суммы, а поставить в каждой клетке шахматной доски количество клеток, бьющих ферзя, стоящих в данной, найти закономерность и полученные числа сложить.

Задача 72

Сколькими способами можно разделить 12 школьников на 4 а) разных б) одинаковых команды по три человека в каждой?

Указание: Ответьте на 2 вопроса:

1. Какая из задач является переформулировкой задачи 60 из раздатки и почему? (Расположим школьников по алфавиту, раздадим таблички с номерами команд, получим слово перестановкой карточек 111, 222, 333, 444 – пункт а) этой задачи, ответ $\frac{12!}{3!^4} - 369600$.)

2. Во сколько раз должны отличаться ответы в этих задачах? (в 4! раза ответ в б) меньше – $\frac{369600}{4} = 15400$.)

Глава 5

Теория чисел.

Составитель Головко А.Ю.

5.1 Основная теорема арифметики.

Теорема. Любое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых множителей единственном образом с точностью до порядка.

Задача 73

Может ли число $n!$ Оканчиваться ровно на 5 нулей?

Ответ: Нет, не может.

Решение.

Заметим, что при $n \leq 24$ в разложении на простые множители числа $n!$ входит не более 4 пятерок, и, следовательно, оно оканчивается не более, чем на 4 нуля, а при $n \geq 25$ в разложении на простые множители числа $n!$ входит не менее 6 пятерок и не менее 6 двоек, и, следовательно, оно оканчивается не менее, чем на 6 нулей. Таким образом, число $n!$ не может оканчиваться ровно на 5 нулей.

Задача 74

Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 120.

Решение.

Заметим, что хотя бы одно из пяти послевательных чисел делится на 3, хотя бы одно из пяти последовательных чисел делится на 4 и хотя бы одно из пяти последовательных чисел делится на 5. Так как помимо числа, делящегося на 4, среди пяти последовательных чисел есть еще хотя бы одно число, делящееся на 2, то в разложение на простые множители произведения пяти последовательных чисел двойка входит хотя бы в третьей степени, то есть оно делится на 8. Так как 3, 5 и 8 — попарно взаимно простые числа, то произведение делится и на $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

Задача 75

Имеет ли решение ребус $AB \cdot CD = EEFF$, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы обозначают разные цифры.

Ответ: Нет, не имеет.

Решение.

Заметим, что правая часть равенства делится на 11, а левая часть равенства не делится на 11 (так как двузначное число делится на 11 тогда и только тогда, когда его цифры равны), так как 11 — простое число. Таким образом, равенство $AB \cdot CD = EEFF$ не может выполняться.

Задача 76

Имеет ли решение ребус $AB \cdot CD = EFEF$, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы обозначают разные цифры.

Ответ: Нет, не имеет.

Решение.

Заметим, что правая часть равенства делится на 101 ($EFEF = 101 \cdot EF$), а левая часть равенства не делится на 101, так как 101 — простое число. Таким образом, равенство $AB \cdot CD = EFEF$ не может выполняться.

Задача 77

Найдутся ли какие-нибудь 4 натуральных числа таких, чтобы среди наибольших общих делителей пар встретились 6 последовательных чисел?

Ответ: Нет, не найдутся.

Решение.

Рассмотрим делимость на 3. Заметим, что из шести последовательных натуральных чисел ровно два делятся на 3. Заметим, что наибольший общий делитель двух чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих двух чисел делится на 3. Таким образом, получаем, что если из четырех чисел не более двух делится на 3, то не более одного общего делителя делится на 3. Если же из четырех чисел на 3 делится хотя бы три числа, то хотя бы три наибольших общих делителя делятся на три. Мы получаем, что хотя бы ровно два наибольших общих делителя на 3 делиться не могут, то есть среди пар наибольших общих делителей не могут быть шесть последовательных чисел.

5.2 Остатки.

Определение. Целое число N имеет остаток r при делении на целое ненулевое m, если $N = km + r$, где $0 \leq r < m$.

Утверждение 1. Сумма любых двух чисел и сумма их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m.

Утверждение 2. Произведение любых двух чисел и произведение их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m.

Задача 78

Пусть $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 4. Докажите, что x или y делится на 4.

Решение.

Перебором остатков убеждаемся, что полный квадрат дает остаток 0, 1 или 4 от деления на 8, причем полный квадрат нечетного числа дает остаток 1; четного числа, не делящегося на 4, — остаток 4; числа, делящегося на 4 — остаток 0. Если бы каждое из чисел x и y было бы нечетным, то z^2 давал бы остаток 2 от деления на 8, что невозможно. Если бы одно из чисел x и y было бы нечетным, а другое четным, но не делящимся на 4, то z^2 давал бы остаток 5 от деления на 8, что также невозможно. Таким образом, мы доказали, что либо каждое из чисел x и y четно, либо одно из них делится на 4. Таким образом, xy делится на 4.

Докажем, что x или y делится на 4. В силу показаного выше, достаточно проверить, что невозможен случай, когда каждое из чисел x и y являются четными, но не делящимися на 4. Предположим, что это так. Но тогда $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, где x_1, y_1 — нечетные числа. Тогда $x^2 + y^2 = 4x_1^2 + 4y_1^2 = 4(x_1^2 + y_1^2) = z^2$. Из последнего равенства следует, что z четное, то есть ровно $z = 2z_1$, откуда $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. В силу того, что x_1, y_1 — нечетные числа, получаем противоречие.

Замечание 1. Можно было рассматривать остатки от деления на 16. В этом решении был бы больший перебор, но не пришлось бы отдельно рассматривать случай двух четных чисел.

Замечание 2. Типичной ошибкой при решении этой задачи является перебор остатков полных квадратов при делении на 4. Ведь из того, что полный квадрат делится на 4 не следует, что само число делится на 4.

Задача 79

Пусть a, b, c — натуральные числа, причем $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

Решение.

Перебором остаков от деления на 3 получаем, что числа a^3 и a дают одинокавый остаток от деления на 3. Аналогично с остатками от деления на 2 (четностью). Таким образом, числа $a^3 + b^3 + c^3$ и $a + b + c$ дают одинаковый остаток от деления на 3 и на 2, откуда следует утверждение задачи.

Задача 80

Доказать, что если $a^2 + b^2$ делится на 7, то и ab делится на 7.

Указание: Перебрать остатки от деления на 7.

Следующие две задачи можно решить с помощью перебора остатков.

Задача 81

Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

Задача 82

Докажите, что $n^4 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

Задача 83

p, $2p^2 + 1$ — простые числа. Найдите p.

Ответ: $p = 3$.

Решение.

Перебором остатком от деление на 3 числа p убеждаемся, что одно из чисел p и $2p^2 + 1$ делится на 3, а так так является простым равно 3. Если $2p^2 + 1 = 3$, то $p = 1$ и не является простым. Осталось заметить, что $p = 3$ удовлетворяет условию.

Глава 6

Геометрия.

Составитель Глухов И.В.

6.1 Углы.

Задача 84

(Москва-округ 2015-2016) $ABCD$ - выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CDB = 20^\circ$. Найдите $\angle CDB$.

Ответ: $\angle CDB = 30^\circ$.

Решение.

Так как $\angle CAB = 60^\circ, \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 60^\circ$, то треугольник ABC - равносторонний. Далее представим одно из рассуждений.

В треугольнике $ABD : \angle ABD = 40^\circ, \angle BAD = \angle BAC + + \angle CAD = 100^\circ$, значит, $\angle BDA = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$, значит, этот треугольник равнобедренный. Таким образом, $AB = BC = CA = AD$, поэтому треугольник CAD – также равнобедренный.

Тогда $\angle ADC = \angle ACD = (180^\circ - \angle CAD)/2 = 70^\circ, \angle CDB =$ $= \angle CDA - \angle BDA = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Задача 85

(Москва-округ 2009-2010) В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 40°. Найдите угол ABC.

Ответ: $\angle ABC = 110^\circ$.

Указание: Достройте треугольник ABC до параллелограмма.

Задача 86

(Москва-округ 2013-2014) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: $\angle AKD = 75^\circ$.

Указание: Опустите перпендикуляр AH из точки A на отрезок MK. Рассмотрите треугольники AMB, AMH, AKH и AKD.

Задача 87

(Шабунин) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC расположены точки E и F так, что $CE = \sqrt{2}CF$, $AE = EF = FB$. Найдите угол B.

Ответ: $\cos \angle B = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Решение.

Продлим медиану CF за точку F на ее длину и получим точку D. Четырехугольник $CEDB$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Используем «неочевидное свойство» диагоналей параллелограмма, что сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей параллелограмма: $2(\sqrt{2}CF)^2+2BC^2 = (2BF)^2 + (2CF)^2$, значит, $BC^2 = 2CF^2 = \frac{2}{9}AB^2$. Следовательно, $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 88

(Шабунин) Найдите угол при вершине B равнобедренного треугольника $ABC(AB = BC)$, если медианы AD и CE взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\angle B = 2\beta$, где $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

Указание: Проведите высоту из вершины B.

Задача 89

(Шабунин) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC расположены точки D и E так, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle BCE, 4CD = 3\sqrt{3}CE$. Найдите угол ABC.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Указание: Опустите перпендикуляры из точек E и D на катеты треугольника ABC.

Задача 90

(Шабунин) В равнобедренном треугольнике $ABC(AB = BC)$ медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Найдите угол ADB.

Ответ: $90^\circ + \alpha$, где $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

Решение.

Обозначим точку пересечения AD и CE буквой O. Заметим, что CO - это высота и биссектриса треугольника ACD, значит, треугольник ACD равнобедренный, следовательно,

$AC = \frac{BC}{2}$. Опустим из вершины B треугольника ABC на основание AC медиану BH, $BH = \frac{BC}{4}$. Треугольник ABC равнобедренный, значит, BH – высота треугольника ABC, значит, $cos\angle BCH = \frac{1}{4}$. Обозначим $\angle BCH$ за 2α. $\angle BDA = 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ - (90^\circ - \angle CDO) = 90^\circ + \alpha$, где $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

Задача 91

(Москва-округ 2009-2010) В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BD к боковой стороне. На продолжении основания BC выбрана точка E так, что угол EDB - прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

Ответ: $BE = 2$.

Указание: Продолжите прямую ED до пересечения со стороной AB в точке F. Заметьте, что треугольник EBF является равнобедренным.

6.2 Некоторые свойства и признаки геометрических объектов.

Задача 92

(Олимпиада "Физтех-2017") В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$. Найдите отрезок DE.

Ответ: $DE = 8$.

Решение.

По свойству биссектрисы треугольника получаем

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB}, \frac{CE}{EB} = \frac{CM}{MB},$$

а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB},$$

поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

Задача 93

(Шабунин) Биссектриса AE треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекает высоту BD в точке O, а высота O, а высота AF пересекает BD в точке K. Найдите отношение $\frac{BK}{KD}$, если $OB = 3OD$.

Ответ: $\frac{BK}{KD} = 7$.

Указание: Примените свойство биссектрисы для треугольника ABD. Рассмотрите подобие треугольников AKD и BAD.

Задача 94

(Москва-округ 2010-2011) В параллелограмме $ABCD$ провели высоту DH к стороне AB. Точки E и F – середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $BF = EH$.

Решение.

Представим одно из решений. Из условия задачи следует, что $BE = AF$ и $BE \parallel AF$, следовательно, $BEFA$ – параллелограмм и $AB \parallel FE$. Таким образом, $HBEF$ – трапеция. Докажем, что она равнобокая. В прямоугольном треугольнике

AHD отрезок HF является медианой, проведенной к гипотенузе, следовательно, $HF = \frac{AD}{2} = AF$ (это свойство медианы следует из свойства диагоналей прямоугольника). Таким образом, $HF = BE$, то есть трапеция $HBEF$ – равнобокая. В равнобокой трапеции диагонали равны, поэтому $BF = HE$.

Также можно доказать по другому. Например, можно доказать, что четырехугольник $BEFD$ – параллелограмм и треугольник HED – равнобедренный.

Задача 95

(Москва-округ 2010-2011) В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

Указание: Достройте трапецию до треугольника AMD. Рассмотрите треугольник EMD.

Задача 96

(Москва-округ 2013-2014) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN на стороны CD и AD соответственно, а из вершины D – высоты на DP и DQ на стороны BC и AB соответственно. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Указание: Рассмотрите диагонали прямоугольников $BMDQ$ и $BPDN$. Вспомните признак прямоугольника.

Задача 97

(Гордин) Стороны AB и BC треугольника ABC равны 10 и 12 соответственно, а медиана BM, проведенная к третьей

стороне, равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 48$.

Решение.

Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника, значит, площадь треугольника ABC совпадает с площадью равнобокого треугольника $ABD(AB = BD = 10)$. В треугольнике ABD высоту BH из вершины B на сторону AD. Треугольник ABH – прямоугольный, по теореме Пифагора вычислим, что $BH = 8$ (треугольник ABH – Египетский!), следовательно, искомая площадь равна $\frac{1}{2}AD \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Задача 98

(Москва-округ 2010-2011) В треугольнике ABC отметили произвольную точку D на медиане BM. Затем через D провели прямую, параллельную AB, а через C – прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке E. Докажите, что $BE = AD$.

Указание: Докажите, что $ABED$ – параллелограмм. Продлите медиану BM за точку M на ее длину, получите точку F. Рассмотрите четырехугольник $ABCF$.

6.3 Площадь.

Задача 99

(Гордин) Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n, AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Решение.

Соединим точки M и C. Высоты, проведенные из вершины C в треугольниках MAC и ABC совпадают, значит, $\dfrac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{AM}{AB} = \frac{m}{n}$. Высоты, проведенные из вершины M треугольников AMN и MAC, следовательно, $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MAC}} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{p}{q}$. Перемножим полученные равенства: $\dfrac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} \cdot \dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MAC}} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q}$, значит, $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q}$.

Задача 100

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и B_2 таким образом, что $AB_1 = B_1B_2 = B_2C$. На стороне AB отмечены точки C_1 и C_2 таким образом, что $AC_1 : C_1C_2 : C_2B = 2 : 2 : 1$. Точка A_1 - середина стороны BC. Найдите площадь пятиугольника $A_1B_2B_1C_1C_2$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S.

Ответ: $S_{A_1B_2B_1C_1C_2} = \frac{3}{5}S$.

Решение.

Применим результат предыдущей задачи три раза и получим, что $S_{\triangle C_2BA_1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{10}S, S_{\triangle A_1CB_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S$ и $S_{\triangle B_1AC_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}S = \frac{2}{15}S$. $S_{A_1B_2B_1C_1C_2} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle C_2BA_1} -$ $- S_{\triangle A_1CB_2} - S_{\triangle B_1AC_1} = \left(1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} - \frac{2}{15}\right) S = \frac{3}{5}S$.

Задача 101

(Шабунин) Медианы BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки P и Q расположены на отрезках BE и CF так, что $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{2}, \frac{CQ}{QF} = \frac{5}{4}$. Найти площадь треугольника POQ, если площадь треугольника ABC равна 72.

Ответ: $S_{\triangle POQ} = \frac{3}{5}S$.

Указание: Примените результат 16 задачи несколько раз.

Задача 102

Дан треугольник ABC ($S_{\triangle ABC} = 308$). AM - медиана, BL - биссектриса. P их точка пересечения. Найти S_{PLCM}, если $BA : BC = 4 : 3$.

Ответ: $S_{PLCM} = 90$.

Указание: Примените свойство биссектрисы для треугольников ABM и ABC. Примените результат 16 задачи для треугольников PAL и CAM.

Задача 103

(Олимпиада "Физтех-2015"). На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом $90°$.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырехугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ: $a) \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{LPMC}} = \frac{9}{40}$; б) $\cos\angle CBL = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Решение.

а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x, MC = 5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{7}$.

Далее можно воспользоваться результатом задачи 99, но мы пойдем по другому пути.

б) Обозначим площадь треугольников ABP и MBP за S_1, площадь треугольника APL – за S_2, площадь $LPMC$ – за S_4. Так как высоты, опущенные из вершины B треугольников ABL и CBL, совпадают, выполняется $\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle CBL}} = \frac{S_1+S_2}{S_1+S_4} = \frac{AL}{LC} = \frac{2}{7}$. Аналогично получаем, что $\frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle CAM}} = \frac{2S_1}{S_2+S_4} = \frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$. Отсюда получаем, что искомое отношение $\frac{S_1}{S_4} = \frac{9}{40}$.

Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведенная из вершины A, то $\frac{BP}{PL} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{5}$. Пусть $BP = 9y, PL = 5y$. Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BMP получаем, что $\cos\gamma = \frac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma = \frac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x = y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Задача 104

(Шабунин) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON равны соответственно S_1, S_2 и S_3.

Ответ: $S_{\triangle CMN} = \dfrac{S_1 S_2 (S_2 + S_1)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1 S_3)}$.

Указание: Распишите отношения $\frac{BP}{PL}$, $\frac{AL}{LC}$, как отношения площадей некоторых треугольников.

Задача 105

Докажите теорему Менелая через площади.

Указание: Решение аналогично решению прошлой задачи.