Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НАУКА В РЕГИОНЫ

С. Е. Городецкий

Геометрия окружностей

Методические материалы
по математике
для учащихся 8 класса

Фонд развития Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Городеций С. Е.

А23 Геометрия окружностей: методические материалы по математике для учащихся 8 класса / С. Е. Городецкий. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 53 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии даётся обзор приемов и методов, использующихся при решении задач по геометрии, с примерами решения задач различного уровня сложности.

Книга предназначается учащимся 8 класса школ с углубленным изучением математики, учителям математики, руководителям кружков и факультативов по математике, а также всем людям, увлекающимся математикой.

Городецкий Сергей Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ, ведущий методист ЗФТШ.

Содержание

Простейшие свойства окружности

Окружностью называется множество точек, удалённых от заданной точки (центра окружности) на заданное расстояние (радиус окружности).

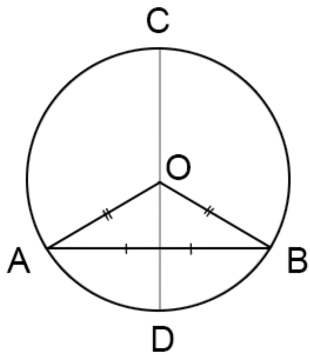
Некоторые свойства окружности выводятся непосредственно из определения с применением признаков равенства треугольников, признаков и свойств равнобедренного треугольника, суммы углов треугольника. Их мы и рассмотрим в этом параграфе.

Теорема 1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть AB — данная хорда, а CD — данный диаметр. Возможны два случая:

1) AB является диаметром окружности. Тогда утверждение теоремы очевидно.

2) AB не является диаметром. В этом случае обозначим центр окружности через O (на рисунке ниже).

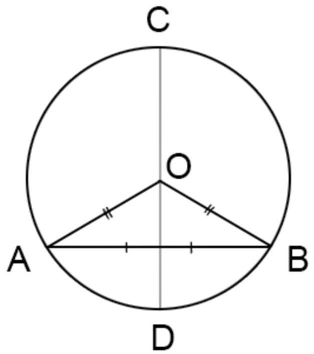


Треугольник $\triangle OAB$ — равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы), поэтому его медиана является высотой. Следовательно, диаметр CD перпендикулярен хорде AB. Теорема доказана.

Замечание. Первый пункт доказательства необходим, так как в этом случае не образуется треугольник $\triangle OAB$ (точки O, A, B лежат на одной прямой), и рассуждение, приведённое во втором пункте, не проходит.

Теорема 2. (обратная к теореме 1) Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть O — центр окружности, CD — данный диаметр, AB — данная хорда (при этом, поскольку AB не диаметр, точка O не лежит на отрезке AB).



Треугольник $\triangle OAB$ равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы), значит, медиана в нём является также и высотой. Поэтому $CD \perp AB$. Теорема доказана.

Замечание. Если опустить условие, что хорда не является диаметром, то теорема станет неверной. Действительно, если взять два диаметра, то они делят друг друга пополам, при этом они могут пересекаться под любым углом от 0° до 90°.

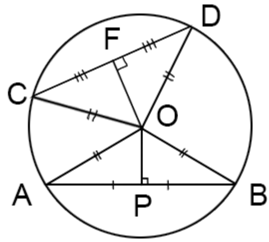
Теорема 3. Две хорды одной окружности равны тогда и только тогда, когда они удалены от центра окружности на равные расстояния.

Замечание. Подобная формулировка теоремы («**А** тогда и только тогда, когда **Б**», где **А**, **Б** — некоторые утверждения) подразумевает равносильность **А** и **Б**. Иначе говоря, должны выполняться следующие соотношения:

1) если выполнено **А**, то верно **Б**;

2) если выполнено **Б**, то верно **А**.

Таким образом, нам потребуется доказать два утверждения.

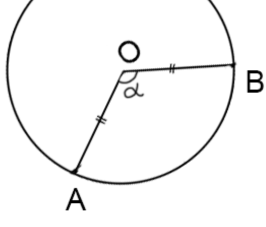


Доказательство. Пусть O — центр окружности, AB и CD — данные хорды, P и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на AB и CD соответственно (рисунок выше). Проведём радиусы OA, OB, OC и OD. Треугольники $\triangle OCD$ и $\triangle OAB$ — равнобедренные, поэтому их высоты OF и OP являются медианами, т. е. $CF = DF$, $AP = BP$.

Докажем сначала, что если хорды равны, то равны и расстояния от центра, окружности до этих хорд. Итак, пусть $AB = CD$. Тогда $AP = CF$ (как половины равных отрезков); треугольники $\triangle APO$ и $\triangle CFO$ равны по катету и гипотенузе ($CO = AO$ как радиусы). Следовательно, $OF = OP$. Утверждение доказано.

Теперь докажем, что если расстояния от центра окружности до хорд равны (т. е. $OF = OP$), то равны и сами хорды (т. е. $AB = CD$). И действительно, треугольники $\triangle APO$ и $\triangle CFO$ равны по катету и гипотенузе ($OP = OF$ по условию, $OA = OC$ как радиусы), поэтому $AP = CF$. Так как $CB = 2CA$, а $AB = 2AP$, отсюда получаем, что $AB = CD$. Теорема доказана.

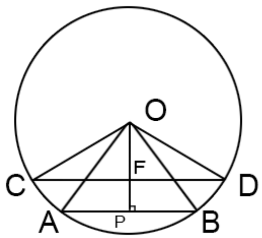
Напомним, что градусной мерой дуги называется градусная мера соответствующего центрального угла.

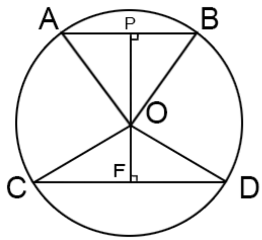


Если $\angle AOB = \alpha$ (рисунок выше), то точками A и B окружность делится на две дуги (α и $360^\circ - \alpha$). Вместо слов «градусная мера дуги AB равна α» для краткости чаще говорят «дуга AB равна α» .

Теорема 4. Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны между собой.

Доказательство. Пусть O — центр окружности, AB и CD — данные параллельные хорды, P и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на хорды AB и CD соответственно (на рисунках ниже).





Треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ равнобедренные ($OA = OB = OC = OD$ как радиусы), поэтому их высоты OP и OF являются также биссектрисами. Отсюда:

$$\angle POA = \angle POB, \tag{1}$$

$$\angle COF = \angle DOF. \tag{2}$$

Далее необходимо учесть, что возможны разные случаи расположения хорд: центр окружности O лежит между хордами (рисунок справа) или не лежит между хордами (рисунок слева). Случай, когда центр окружности лежит на одной из хорд, рассмотрите самостоятельно.

Итак, для случая на рисунке слева вычитаем из равенства (2) равенство (1) и получаем $\angle COF - \angle POA = \angle DOF - \angle POB$, т. е. $\angle COA = \angle DOB$.

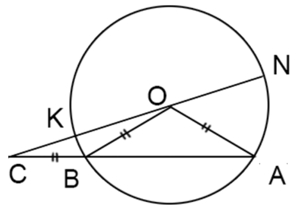
Для случая на рисунке справа из равенства $180^\circ = 180^\circ$ вычтем сумму первого и второго равенств. Получаем

$$180^\circ - \angle POA - \angle COF = 180^\circ - \angle POB - \angle DOF.$$

Откуда $\angle COA = \angle DOB$. Полученное равенство центральных углов как раз и означает равенство дуг AC и BD. Теорема доказана.

Пример 1. На продолжении хорды AB окружности с центром O за точку B отмечена точка C такая, что отрезок BC равен радиусу окружности. Прямая CO пересекает окружность в точках K и N (K лежит между C и O). Найдите угол $\angle ACN$, если угол $\angle AON$ равен $33°$.

Решение. Проведём радиус BO и обозначим искомый угол ACN через α (рисунок ниже). Треугольник $\triangle OBC$ равнобедренный ($OB = BC$), поэтому $\angle BOC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABO = \angle BOC + \angle BCO = 2\alpha$.

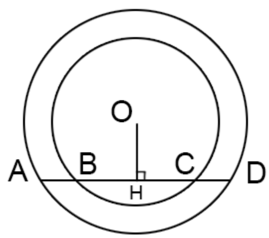


Треугольник $\triangle AOB$ также равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = 2\alpha$, $\angle AOB = 180° - \angle ABO - \angle OAB = 180° - 4\alpha$. Отсюда получаем, что $\angle AON = 180° - \angle BOC - \angle AOB = 180° - \alpha - (180° - 4\alpha) = 3\alpha$. Так как $3\alpha = 33°$, то $\alpha = 11°$.

Ответ: $11°$.

Пример 2. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между окружностями, равны.

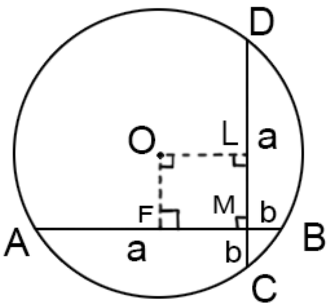
Решение. Пусть O — центр окружности, AD и BC — данные хорды. Опустим из точки O перпендикуляр OH на данную прямую.



Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, точка H является серединой каждого из отрезков AD и BC, т. е. $AH = DH$ и $BH = CH$. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $AB = CD$. Утверждение доказано.

Пример 3. Каждая из двух пересекающихся хорд делится точкой пересечения на отрезки a и b ($a > b$). Найдите расстояние от центра окружности до каждой из этих хорд, если известно, что данные хорды перпендикулярны.

Решение. Пусть O — центр окружности, AB и CD — данные хорды, M — точка пересечения AB и CD, $AM = DM = a, CM = BM = b$. Опустим из точки O перпендикуляры OF и OL на AB и CD соответственно.



Тогда получаем, что в четырёхугольнике $OFML$ три угла прямые ($\angle FML = 90°$ по условию, $\angle OFM = \angle OLM = 90°$ по построению), т.е. он является прямоугольником. Кроме того, расстояния от центра окружности до равных хорд равны и поэтому $OF = OL$ (это означает, что $OFML$ — квадрат).

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам. Отсюда F — середина AB, поэтому

$$FM = AM - AF = AM - \frac{1}{2}AB = a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b).$$

Значит, искомые расстояния равны $\frac{1}{2}(a-b)$.

Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)$.

Теорема 5. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, есть окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, за исключением точек A и B.

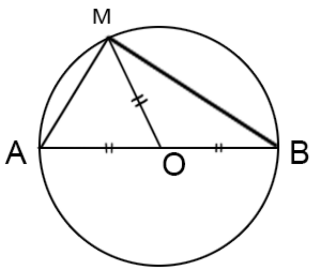
Замечание. 1. Пусть точка A не лежит на прямой AB. Тогда слова «отрезок AB виден из точки M под углом α означают, что $\angle AMB = \alpha$.

2. Под геометрическим местом точек понимается множество всех точек плоскости, удовлетворяющих какому-либо условию. Для того, чтобы доказать, что множество X есть геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию Y, требуется доказать два утверждения:

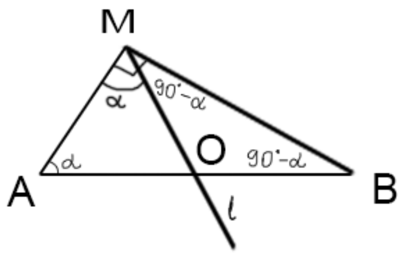
1) если точка лежит в множестве X, то условие Y выполнено;

2) если точка удовлетворяет условию Y, то она лежит в множестве X.

Доказательство. 1. Сначала покажем, что если точка M лежит на окружности с диаметром AB и не совпадает ни с одной из точек A или B, то $\angle AMB = 90^\circ$. Действительно, пусть O — центр окружности, тогда $AO = MO = BO$ (как радиусы). Обозначим $\angle AMO = \alpha$, $\angle BMO = \beta$. Так как треугольники $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ равнобедренные, то $\angle MAO = \alpha$, $\angle MBO = \beta$. Записывая сумму углов треугольника $\triangle ABM$, получаем: $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 90^\circ$, т. е. $\angle AMB = 90^\circ$.



2. Покажем теперь, что если $\angle AMB = 90^\circ$, то точка M лежит на окружности с диаметром AB Обозначим $\angle MAB = \alpha$. Отложим от луча MA в плоскость, содержащую точку B, луч l, образующий с лучом MA угол α (на рисунке ниже). Обозначим точку пересечения луча l и отрезка AB через O. Тогда $\angle BMO = \angle BMA - \angle AMO = 90^\circ - \alpha$, $\angle ABM = 180^\circ - \angle BAM - \angle BMA = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$. Значит, оба треугольника $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ равнобедренные, откуда $AO = MO = BO$.

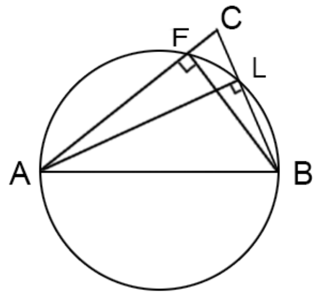


Это означает, что окружность с центром O радиуса OA проходит через точки A, B, M. Таким образом, отрезок AB является её диаметром, и она проходит через точку M. Теорема доказана.

Замечание. Если использовать теорему о медиане прямоугольного треугольника (и обратную к ней), то доказательство можно существенно упростить. Фактически, в нашем доказательстве свойство медианы прямоугольного треугольника было полностью обосновано.

Пример 4. В треугольнике $\triangle ABC$ проведены высоты AL и BF. Докажите, что точки A, B, F, L лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим окружность с диаметром AB.

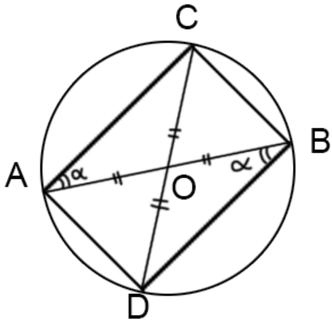


Поскольку из точек F и L отрезок AB виден под прямым углом (на рисунке выше), эти точки лежат на рассматриваемой окружности. Утверждение доказано.

Пример 5. Известно, что AB — диаметр окружности, а хорды AC и BD параллельны. Докажите, что $AC = BD$, а CD — также диаметр.

Решение. Углы $\angle CAB$ и $\angle ABD$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD. Кроме того, $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, так как точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Следовательно, прямоугольные треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда сразу получаем, что $AC = BD$.

Обозначим центр окружности через O. Чтобы доказать, что CD — диаметр, проведём отрезки CO и OD и покажем, что $\angle COD = 180°$ (это означает, что точки , O, D лежат на одной прямой).



Пусть $\angle CAO = \alpha$. Тогда $\angle ACO = \alpha$ (т. к. треугольник $\triangle ACO$ — равнобедренный), $\angle AOC = 180° - 2\alpha$. Так как $\angle DBO = \angle CAO$, то $\angle DBO = \alpha$, $\angle BDO = \alpha$ (треугольник $\triangle BOD$ равнобедренный), $\angle AOD = \angle DBO + \angle BDO = 2\alpha$ (теорема о внешнем угле треугольника).

Итак, $\angle COD = \angle AOC + \angle AOD = (180° - 2\alpha) + 2\alpha = 180°$, откуда следует, что CD — диаметр.

Далее без доказательства напомним свойства серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла.

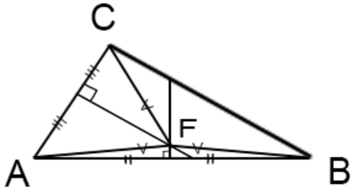
Теорема 6. Серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка.

Теорема 7. Биссектриса угла есть геометрическое место точек, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон.

Первая из этих теорем пригодится нам, чтобы определить положение центра окружности, описанной около треугольника.

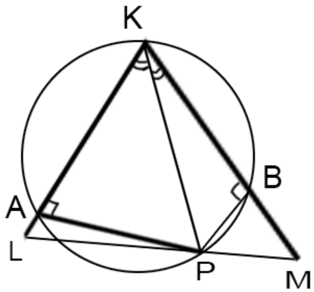
Теорема 8. Серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник. Проведём серединные перпендикуляры к его сторонам AB и AC и обозначим их точку пересечения через F (если бы оказалось, что они не пересекаются, это означало бы, что точки A, B, C лежат на одной прямой).



Точка F лежит на серединном перпендикуляре к AB, поэтому $AF = BF$, точка F также лежит на серединном перпендикуляре к AC, следовательно, $AF = CF$. Отсюда $BF = CF$, а это означает, что точка F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Кроме того, поскольку $AF = BF = CF$, точка F является центром окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$. Теорема доказана.

Пример 6. Окружность, построенная на биссектрисе KP треугольника $\triangle KLM$ как на диаметре пересекает его стороны KL и KM в точках A и B. Найдите AK, если $BK = 10$.



Решение. Поскольку KP — диаметр окружности, а точки A и B лежат на этой окружности, $\angle PAK = \angle PBK = 90°$. Треугольник $\triangle AKP$ и $\triangle BKP$ равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $AK = BK = 10$.

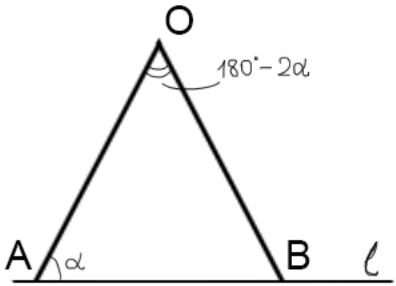
Ответ: 10.

Касательная к окружности

Определение. Прямая называется касательной к окружности, если она имеет с ней ровно одну общую точку.

Теорема 9. Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что радиус оказался не перпендикулярен касательной. Пусть O — центр окружности, l — касательная, A — точка касания. Обозначим острый угол между радиусом OA и прямой l через α. Отложим от луча OA угол $180^\circ - 2\alpha$, т. к. $\alpha < 90^\circ$, то $2\alpha < 180^\circ$ и $180^\circ - 2\alpha > 0$.

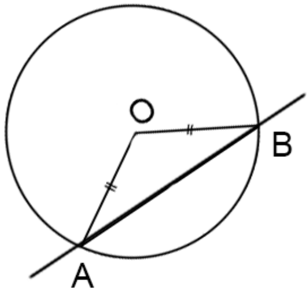


Пусть B — точка пересечения отложенного луча с прямой l. По сумме углов треугольника $\triangle OAB$ находим, что $\angle ABO = \alpha$, следовательно, треугольник $\triangle OAB$ равнобедренный, $OB = OA$.

Так как оказалось, что отрезок OB равен радиусу окружности, точка B также лежит на данной окружности. Но тогда у окружности две точки пересечения с прямой l, что противоречит условию (касательная должна иметь ровно одну общую точку с окружностью). Теорема доказана.

Теорема 10. Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку, является касательной к окружности.

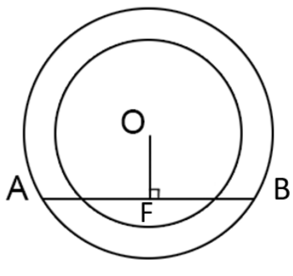
Доказательство. Также проведём от противного. Предположим, что данная прямая не касается окружности, т. е. имеет с ней две общие точки. Обозначим центр окружности через O, а точки пересечения прямой с окружностью через A и B.



Тогда треугольник $\triangle OAB$ равнобедренный. Так как углы при основании равнобедренного треугольника острые, то $\angle OAB = \angle OBA < 90°$. Но по условию данная прямая перпендикулярна радиусу, проведённому в точку A. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 7. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

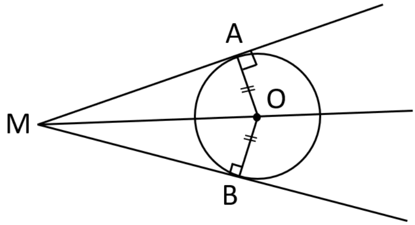
Решение. Напомним, что окружности называются концентрическими, если они имеют общий центр. Пусть O — центр окружностей, AB — хорда большей окружности, F — её точка касания с меньшей окружностью.



Поскольку радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, $OF \perp AB$. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точка F является серединой AB (OF — часть диаметра большей окружности, AB — её хорда). Утверждение доказано.

Теорема 11. Длины отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой.

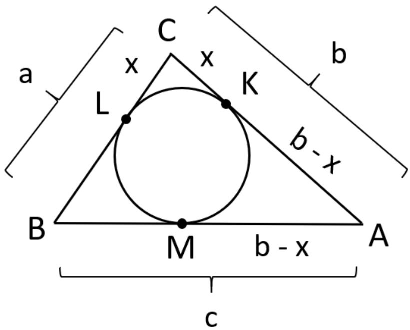
Доказательство. Пусть дана окружность с центром O, точка M лежит вне окружности, MA и MB — касательные к окружности (A и B — точки касания).



Тогда $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$ (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной). Следовательно, $\triangle AOM = \triangle BOM$ по катету ($AO = BO$ как радиусы) и гипотенузе (OM — общая). Откуда $MA = MB$, что и требовалось доказать. Отметим также, что из доказанного равенства треугольников следует, что $\angle OMA = \angle OMB$. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 12. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Пример 8. Дан треугольник со сторонами a, b, c. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону b точка касания вписанной окружности с этой стороной.



Решение. Обозначим один из исходных отрезков через x, тогда второй равен $b - x$ (на рисунке выше). Отсюда $BL = a - x$; $BM = BL = a - x$. Так как $AB = AM + BM$, получаем уравнение $(a - x) + (b - x) = c$, откуда

$$x = \frac{a+b-c}{2}.$$

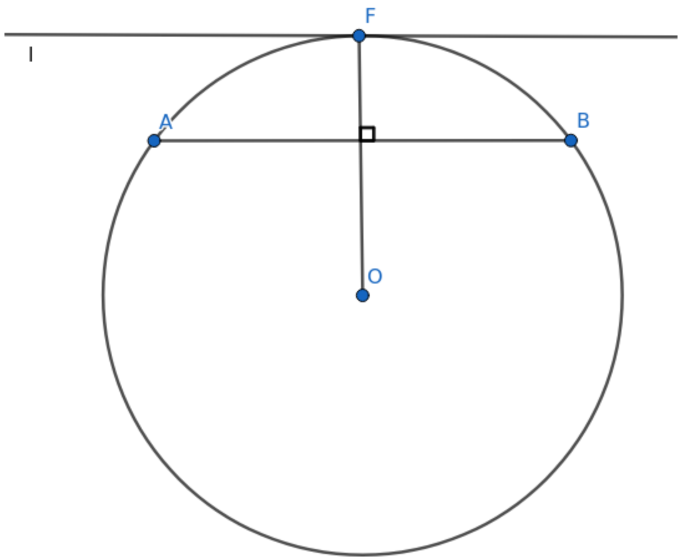
Значит, $b - x = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a+b-c}{2}$ и $\dfrac{b+c-a}{2}$

Замечание. Если обозначить полупериметр треугольника через p, то эти отрезки можно выразить следующими формулами:

$$x = \frac{a+b+c}{2} - c = p - c; \quad b - x = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - a = p - a.$$

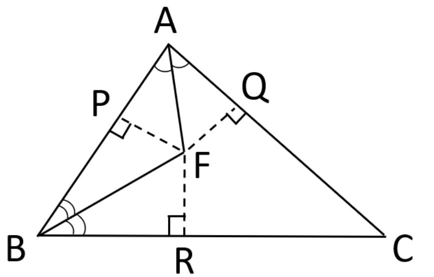
Пример 9. Прямая, касающаяся окружности в точке F, параллельна хорде AB этой окружности. Докажите, что треугольник $\triangle ABF$ равнобедренный.



Решение. Пусть l — данная касательная, O — центр окружности. Так как $OF \perp l$, а $l \parallel AB$, то $OF \perp AB$. Но тогда прямая OF делит хорду AB пополам, то есть в треугольнике $\triangle ABF$ высота, проведённая из вершины F, является также и медианой. Следовательно треугольник $\triangle ABF$ равнобедренный.

Теорема 13. Биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник.

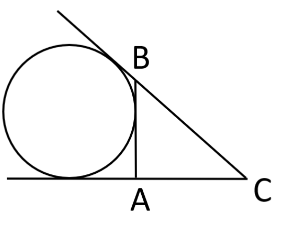
Доказательство. Проведем биссектрисы углов A и B треугольника и обозначим их точку пересечения через F.



Так как точка F лежит на биссектрисе угла A, она равноудалена от его сторон (теорема 7), следовательно $FP = FQ$ (через P, Q, R обозначены основания перпендикуляров, опущенных из вершины F на прямые AB, AC, BC соответственно). Аналогично, $FP = FR$. Отсюда получаем, что $FQ = FR$, то есть точка F равноудалена от сторон угла C, поэтому она лежит на его биссектрисе. Это означает, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Кроме того, мы получили, что $FP = FQ = FR$. Значит, окружность с центром F радиуса FP касается всех трёх сторон треугольника, то есть является вписанной окружностью.

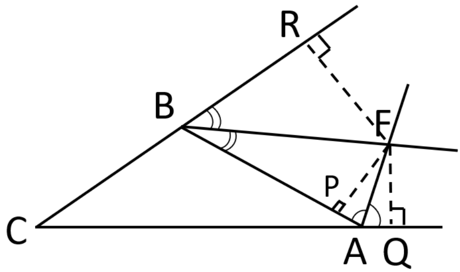
Определение. Окружность называют вневписанной для треугольника, если она касается одной из его сторон и продолжений двух других сторон.



Пример вневписанной оружности треугольника показан на рисунке выше.

Теорема 14. Биссектриса внутреннего угла треугольника и биссектрисы двух его внешних углов пересекаются в одной точке. Эта точка является центром одной из вневписанных окружностей.

Доказательство. Пусть биссектрисы внешних углов при вершинах A и B треугольника ABC пересекаются в точке F. Обозначим через P, Q, R основания перпендикуляров, опущенных из точки F на прямые AB, AC, BC соответственно.

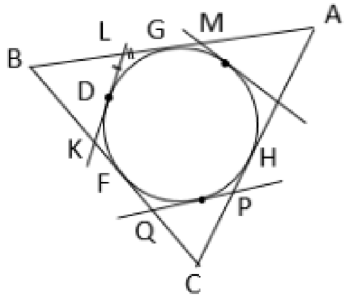


Так как точка F лежит на биссектрисе угла B, $FR = FP$. Аналогично $FP = FQ$ (F лежит на биссектрисе угла A). Значит, $FQ = FR$, то есть точка F равноудалена от сторон угла C, поэтому она лежит на биссектрисе угла C. Итак, биссектриса внутреннего угла треугольника при вершине C и его внешних углов при вершинах A и B пересекаются в одной точке F.

Кроме того, окружность с центром F радиуса FQ касается стороны AB в точке P и продолжений сторон CA и CB в точках Q и R, то есть F является центром вневписанной окружности.

Пример 10. К окружности, вписанной в треугольник $\triangle ABC$, проведены три касательные. Одна из них пересекает стороны AB и AC, вторая — стороны BC и AC, третья — стороны AB и BC. Найдите сумму периметров треугольников, отсечённых касательными, если периметр треугольника $\triangle ABC$ равен 18.

Решение. Обозначения приведены на рисунке ниже. Ввиду равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки (теорема 11), $LF = LD$; $KD = KF$.



Значит, периметр треугольника $\triangle BKL$ равен

$$BK + BL + KL = BK + BL + LD + DK = BK + BL + LG + KF =$$

$$= (BK + KF) + (BL + LG) = BF + BG.$$

Аналогично доказывается, что периметры треугольников $\triangle AMN$ и $\triangle CPQ$ соответственно равны $AG + AH$ и $CF + CH$. Значит, сумма периметров отсечённых треугольников равна периметру треугольника $\triangle ABC$, то есть 18.

Ответ: 18.

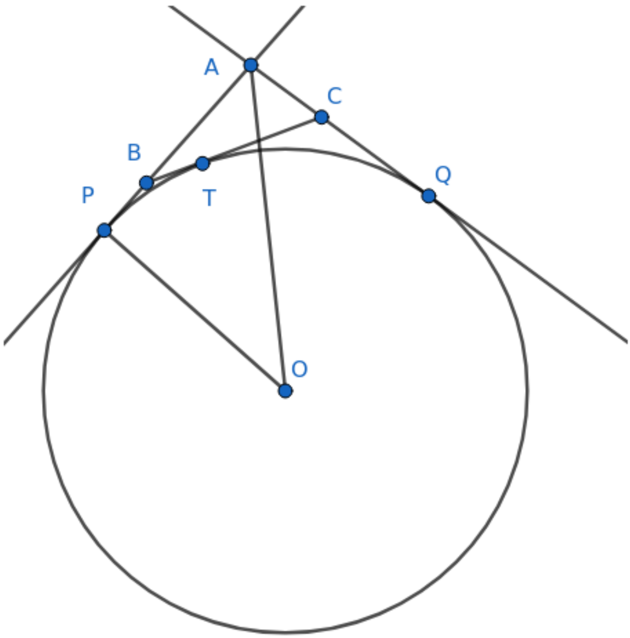
Пример 11. Дан треугольник $\triangle ABC$ с углом 120° при вершине A. Расстояние от точки A до центра вневписанной окружности, касающейся стороны BC, равно 15. Найдите периметр треугольника $\triangle ABC$.

Решение. Обозначим через P, Q, T точки касания окружности с прямыми AB, AC, BC соответственно (на рисунке ниже).

В силу равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $BP = BT$, $CT = CQ$. Значит, периметр треугольника $\triangle ABC$ равен $AB+BC+AC = AB+BT+TC+AC = AB+BP+QC+ + AC = AP + AQ$. Поскольку AP и AQ — касательные, проведенные к окружности из точки A, получаем, что $AP = AQ$. Значит, периметр треугольника $\triangle ABC$ равен $AB + BC + AC = 2AP$.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle PAO = \frac{1}{2}\angle PAQ = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle AOP = 180^\circ - \angle APO - \angle PAO = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

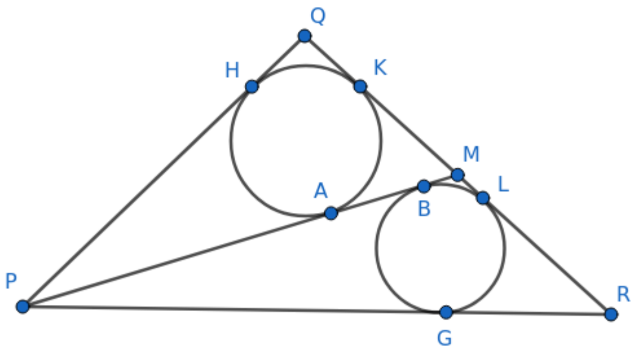


Катет напротив угла 30° равен половине гипотенузы. Отсюда

$$AP = \frac{1}{2}AO = \frac{15}{2}; \quad 2AP = 15.$$

Ответ: 15.

Пример 12. В треугольнике $\triangle PQR$ проведена медиана PM. Окружности, вписанные в треугольники $\triangle PQM$ и $\triangle PRM$, касаются отрезка PM в точках A и B. Найдите AB, если $PR - PQ = 28$.



Решение. Обозначения приведены на рисунке выше. Используя результат примера 8 (замечание этого примера), можем выразить отрезки AP и BP (через p обозначен полупериметр треугольника):

$$AP = p_{PQM} - QM = \frac{PM + PQ + QM}{2} - QM,$$

$$BP = p_{PRM} - MR = \frac{PM + PR + MR}{2} - MR.$$

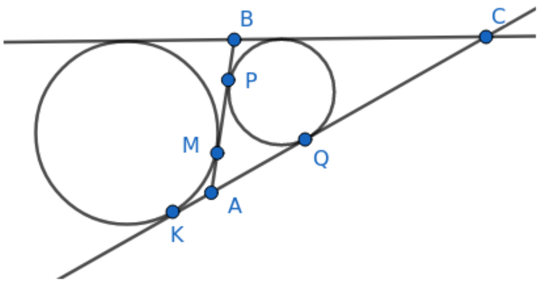
Вычитая из второго равенства первое и учитывая, что $MR = QM$ (так как PM — медиана), получаем

$$BP - AP = \frac{PM + PQ + QM}{2} - \frac{PM + PR + MR}{2}; \ AB = \frac{PR - PQ}{2} = 14.$$

Ответ: 14.

Пример 13. Окружность касается стороны AB треугольника $\triangle ABC$ в точке M, а продолжений сторон CB и CA за точки B и A соответственно в точках L и K. Окружность, вписанная в треугольник $\triangle ABC$, касается его сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AM = BP$ и $KQ = AB$.

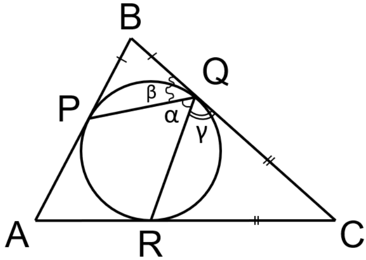
Решение. Аналогично примеру 11 получаем, что периметр треугольника $\triangle ABC$ равен $CK + CL = 2CK$. Отсюда $CK = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.



Используя пример 8, получаем $AB + CQ = p$, следовательно, $AB = p - CQ$. Но $KQ = CK - CQ = p - CQ$. Одно из равенств доказано.

Далее заметим, что $BP = p - AC$ (пример 8), а $AM = AK = CK - AC = p - AC$. Другое равенство также доказано.

Пример 14. Окружность, вписанная в треугольник $\triangle ABC$, касается его сторон AB, BC, AC в точках P, Q, R соответственно. Найдите угол $\angle BAC$, если угол $\angle PQR = \alpha$.



Решение. Обозначим $\angle PQB = \beta$, $\angle CQR = \gamma$. Так как треугольники $\triangle PBQ$ и $\triangle CQR$ равнобедренные ($BP = BQ$, $CR = CQ$ как отрезки касательных), получаем, что $\angle BPQ = \beta$, $\angle CRQ = \gamma$. Тогда

$$\angle PBQ = 180^\circ - 2\beta, \quad \angle QCR = 180^\circ - 2\gamma.$$

По сумме углов треугольника $\triangle ABC$:

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) -$$

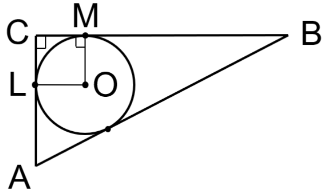
$$-(180^\circ - 2\gamma) = 2\beta + 2\gamma - 180^\circ.$$

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, отсюда следует, что

$$\angle BAC = 2 \cdot (180^\circ - \alpha) - 180^\circ = 180^\circ - 2\alpha.$$

Ответ: $180^\circ - 2\alpha$.

Теорема 15. Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b, гипотенуза равна c. Тогда радиус вписанной окружности r равен $\dfrac{a+b-c}{2}$.

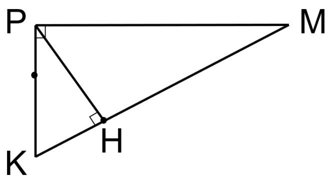


Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), O — центр вписанной окружности, L и M — точки касания окружности со сторонами AC и BC соответственно (на рисунке выше). Тогда четырёхугольник $CLOM$ — квадрат, $CL = r$. Используя пример 8, получаем, что

$$CL = p - AB = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Утверждение доказано.

Пример 15. В прямоугольном треугольнике $\triangle PMK$ высота PH, проведённая из вершины прямого угла P, равна 13. Найдите сумму радиусов окружностей, вписанных в треугольники $\triangle HKP$, $\triangle HMP$ и $\triangle KMP$.



Решение. По формуле теоремы 15 получаем:

$$r_{\triangle PKH} = \frac{PH + KH - PO}{2},$$

$$r_{\triangle PHM} = \frac{PH + HM - PM}{2},$$

$$r_{\triangle PKM} = \frac{PK + PM - KM}{2}.$$

Складываем эти три равенства:

$$r_{\triangle PKH} + r_{\triangle PHM} + r_{\triangle PKM} =$$

$$= \frac{PH + KH - PO}{2} + \frac{PH + HM - PM}{2} + \frac{PK + PM - KM}{2} =$$

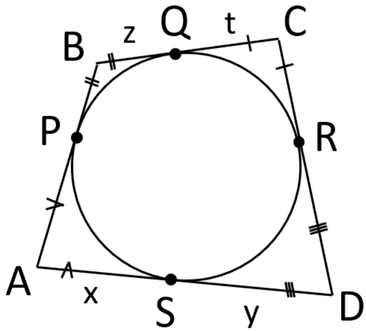
$$= \frac{1}{2}\Big(2PH + KH + HM - KM\Big) = \frac{1}{2} \cdot 2PH = PH = 13.$$

Здесь мы также использовали, что $KH + HM = KM$.

Ответ: 13.

Теорема 16. Если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы его противоположных сторон равны между собой.

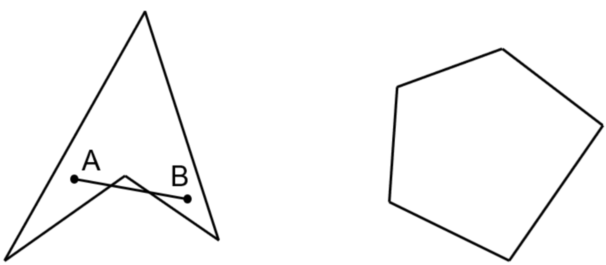
Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, P, Q, R, S — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD, AD соответственно (на рисунке ниже).



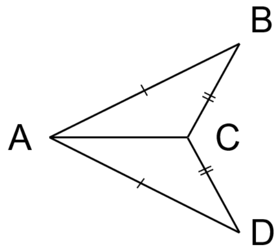
Обозначим $AS = x$, $SD = y$, $QC = t$, $QB = z$. Тогда используя равенство отрезков касательных, получаем $AP = x$, $DR = y$, $CR = t$, $BP = z$. Следовательно, $AB+CD = x+y+z+t$ и $AD+BC = x+y+z+t$, т. е. $AB + CD = AD + BC$. Теорема доказана.

Теорема 17. Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

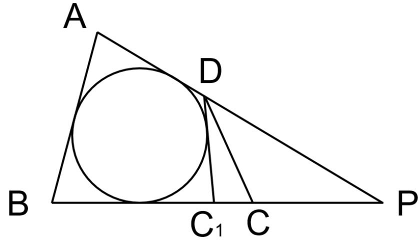
Замечание. Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий две произвольные точки фигуры, также целиком содержится в фигуре. На рисунке слева изображён невыпуклый четырёхугольник (точки A и B лежат внутри него, но не весь отрезок AB содержится внутри фигуры). На рисунке справа изображён выпуклый пятиугольник.



Для невыпуклого четырёхугольника данная теорема неверна: из того, что суммы противоположных сторон равны между собой, не следует, что в него можно вписать окружность. На рисунке ниже изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$, $BC = CD$ (т. е. $AB + CD = BC + AD$), но окружность в него нельзя вписать.



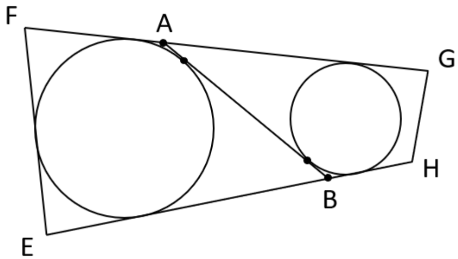
Доказательство. Допустим сначала, что стороны AD и BC непараллельны (обозначим их точку пересечения через P). Впишем окружность в треугольник $\triangle ABP$ и предположим, что она не касается стороны CD (на рисунке ниже). Проведём через точку D касательную к окружности и обозначим через C_1 её точку пересечения со стороной BP. Пусть для определённости точка C_1 лежит между B и C (другой случай рассматривается аналогично).



Так как в четырёхугольник ABC_1D вписана окружность, $AB+C_1D = AD + BC_1$. По условию теоремы $AB + CD = AD + BC$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $C_1D - CD = BC_1 - BC$, откуда $C_1D - CD = -CC_1$, $C_1D + C_1C = CD$. Последнее невозможно в силу неравенства треугольника, поэтому предположение неверно, и окружность касается стороны CD, т. е. является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Если в четырёхугольнике $ABCD$ нет непараллельных сторон, то он является параллелограммом, а так как $AB+CD = AD+BC$, то $ABCD$ — ромб. Несложно показать, что в любой ромб можно вписать окружность, причём центром этой окружности является точка пересечения диагоналей ромба. Теорема доказана.

Пример 16. В четырёхугольнике $EFGH$ размещены две непересекающиеся окружности, причём одна из них касается сторон EF, FG и EH, а вторая — сторон EH, GH и FG. На сторонах FG и EH отмечены точки A и B соответственно такие, что прямая AB касается обеих окружностей. Известно, что периметр четырёхугольника $ABEF$ на 14 больше периметра четырёхугольника $ABHG$, а $EF = 20$. Найдите GH.



Решение. Так как в четырёхугольники $ABEF$ и $ABHG$ вписаны окружности, суммы противоположных сторон в них равны. Следовательно, периметр четырёхугольника $ABEF$ равен $P_{ABEF} = 2 \cdot (AB + GH)$. Тогда разность периметров можно записать в виде

$$2 \cdot (AB + EF) - 2 \cdot (AB + GH) = 2 \cdot (EF - GH).$$

По условию

$$2 \cdot (EF - GH) = 14, \quad EF = 20.$$

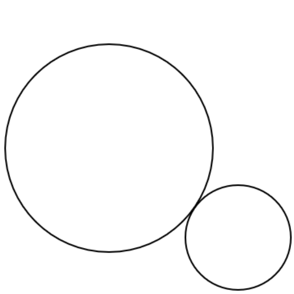
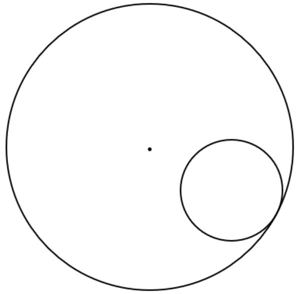
Отсюда следует, что $GH = 13$.

Ответ: 13.

Касающиеся окружности

Определение. Две окружности касаются, если они имеют ровно одну общую точку.

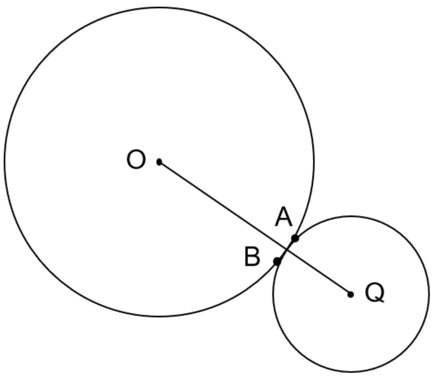
Говорят, что окружности касаются внутренним образом, если одна из них находится внутри другой (рисунок справа). Иначе окружности касаются внешним образом (рисунок слева).

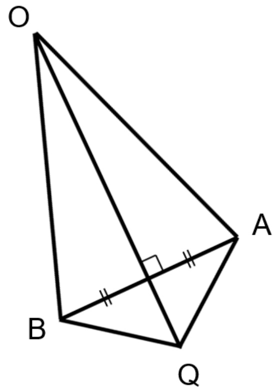



Линией центров двух окружностей называется прямая, проходящая через центры этих окружностей (это понятие относится не только к касающимся окружностям).

Теорема 18. Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания.

Доказательство. Предположим противное. Пусть O и Q — центры окружностей, а их точка касания A не лежит на линии центров (рисунок слева). Отразим точку A симметрично относительно прямой OQ. Обозначим полученную точку через (рисунок справа).





В треугольниках $\triangle ABO$ и $\triangle ABQ$ медианы, проведённые из вершин O и Q, являются также высотами, поэтому треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle ABQ$ равнобедренные, $AO = BO$, $AQ = BQ$.

Обозначим радиусы окружностей с центрами O и Q через R и r. Так как точка A лежит на обеих окружностях, то $OA = R$, $QA = r$. Но из доказанного следует, что $BO = R$, $BQ = r$, т. е. точка B удалена от центров окружностей O и Q на расстояния R и r соответственно. Это означает, что точка принадлежит обеим окружностям. Но тогда получается, что окружности имеют две общие точки, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и точка касания лежит на линии центров. Теорема доказана.

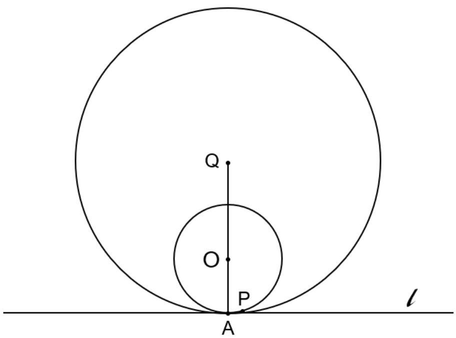
Теорема 19. Если две окружности касаются внешним образом, то сумма радиусов равна расстоянию между центрами. Если две окружности касаются внутренним образом, то разность радиусов большей и меньшей окружностей равна расстоянию между их центрами. Доказательство очевидно следует из теоремы 18.

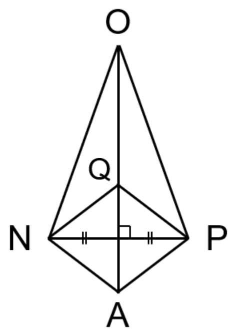
Теорема 20. У касающихся окружностей существует общая касательная в точке касания.

Доказательство. Согласно теореме 18, линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания. Теперь проведём через точку касания прямую, перпендикулярную линии центров. По теореме 10 эта прямая касается обеих окружностей. Теорема доказана.

Теорема 21. Если две окружности касаются некоторой прямой в одной точке, то они касаются друг друга.

Доказательство. Пусть окружности с центрами O и Q касаются прямой l в точке A. Предположим, что при этом окружности не касаются друг друга. Это означает, что у них есть ещё одна общая точка P (рисунок слева). Рассмотрим точку N, симметричную точке P относительно линии центров (рисунок справа).





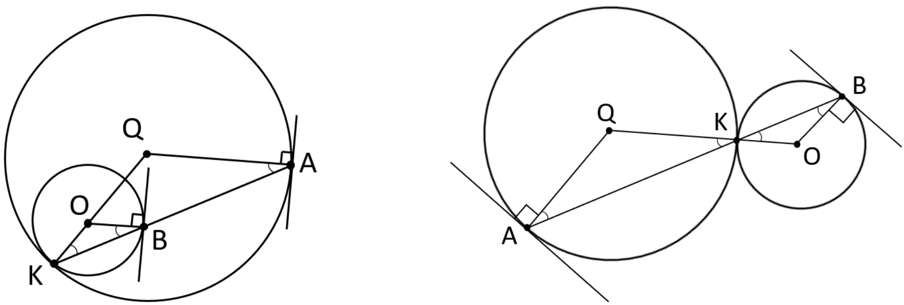
Так как прямая OQ есть серединный перпендикуляр к отрезку NP, точки O и Q равноудалены от N и P, т. е. $ON = OP$, $QN = QP$.

Значит, точка N также лежит на обеих окружностях.

Таким образом, две окружности имеют три общие точки A, N и , что невозможно, т. к. это означает, что около треугольника $\triangle ANP$ описаны две разные окружности. Теорема доказана.

Пример 17. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке B (A и B отличны от K). Докажите, что касательная к первой окружности в точке A и касательная ко второй окружности в точке B параллельны.

Решение. Обозначим центры первой и второй окружностей через Q и O соответственно (на рисунке слева изображён случай внутреннего касания, а на рисунке справа — внешнего).



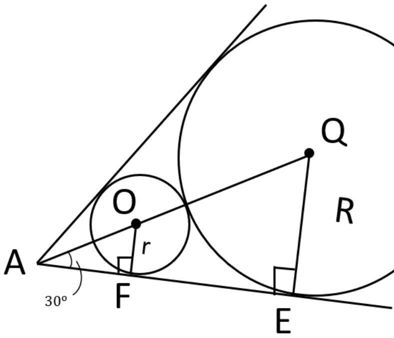
Треугольники $\triangle OBK$ и $\triangle QAK$ — равнобедренные ($OB = OK$, $AQ = QK$ как радиусы окружностей). Точки O, Q, K лежат на одной прямой (теорема 18), следовательно $\angle QKA = \angle BKO$ (на рисунке слева это один и тот же угол, на рисунке справа углы вертикальные).

Значит, $\angle QAK = \angle QKA = \angle BKO = \angle KBO$. Отсюда $OB \parallel AQ$, т. е. радиусы, проведённые в точки касания, параллельны друг другу. Но так как касательные перпендикулярны этим радиусам, они параллельны друг другу. Утверждение доказано.

Пример 18. В угол, равный $60°$, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов окружностей.

Решение. Обозначим вершину угла через A, радиус меньшей окружности через r, радиус большей через R, а центры окружностей через

O и Q соответственно (на рисунке ниже). Опустим перпендикуляры OF и QE на одну из сторон угла.



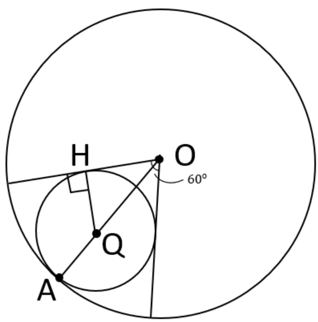
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, следовательно, точки O и Q лежат на биссектрисе угла A: $\angle OAF = \angle OAE = 30°$. Катет против угла $30°$ равен половине гипотенузы, поэтому $AO = 2FO = 2r$, $AQ = 2QE = 2R$, отсюда $OQ = AQ - AO = 2R - 2r$.

Расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов (теорема 19). Значит, $2R - 2r = R + r$, $R = 3r$, $R : r = 3 : 1$.

Ответ: $3 : 1$.

Пример 19. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Два радиуса большей окружности, угол между которыми равен $60°$, касаются меньшей окружности. Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей равен 12.

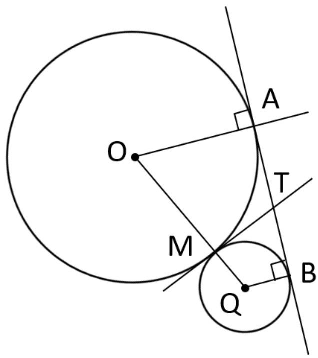
Решение. Обозначим центр большей окружности через O, меньшей — через Q, а точку касания окружностей через A.



Пусть H — точка касания меньшей окружности с одним из радиусов. Тогда $\angle OHQ = 90^\circ$, $\angle QOH = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как катет против угла 30° равен половине гипотенузы, $OQ = 2QH = 24$. Точки A, Q, O лежат на одной прямой, поэтому $AO = AQ + OQ = 12 + 24 = 36$. Но отрезок AO и есть радиус большей окружности.

Ответ: 36.

Пример 20. Две окружности с центрами O и Q касаются внешним образом в точке M. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B. Общая касательная, проведённая через точку M, пересекает прямую AB в точке T. Найдите углы $\angle AMB$ и $\angle ONQ$.



Решение. Так как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $AT = TM = TB$. То есть, в треугольнике $\triangle AMB$ медиана MT равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, этот треугольник прямоугольный, $\angle AMB = 90^\circ$

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому TO и TQ — биссектрисы углов $\angle ATM$ и $\angle BTM$ соответственно. Угол между биссектрисами смежных углов прямой, поэтому $\angle OTQ = 90^\circ$.

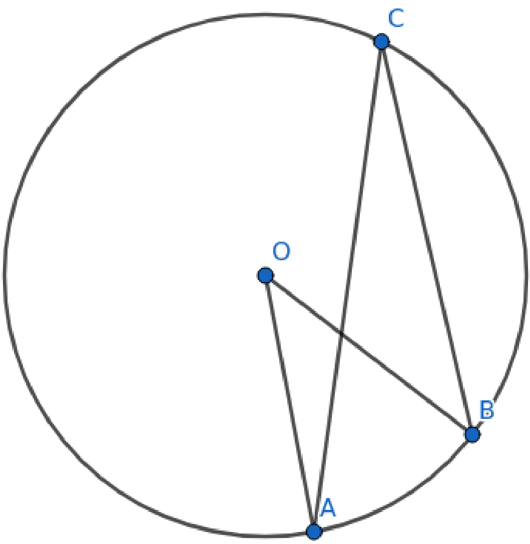
Ответ: $\angle AMB = \angle OTQ = 90^\circ$.

Углы, связанные с окружностью

Определение. Пусть задана некоторая окружность. Угол называется центральным, если его вершина лежит в центре окружности. Угол называется вписанным если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Градусной мерой дуги называют градусную меру соответствующего центрального угла.

На рисунке ниже угол $\angle AOC$ — это центральный угол, опирающийся на дугу AC; угол $\angle ABC$ — вписанный угол, опирающийся на дугу AC.



Теорема 22. (об угле между касательной и хордой) Угол между касательной и хордой равен половине дуги, заключенной между ними.

Доказательство. Пусть O — центр окружности, прямая l касается окружности в точке F (рисунок ниже).

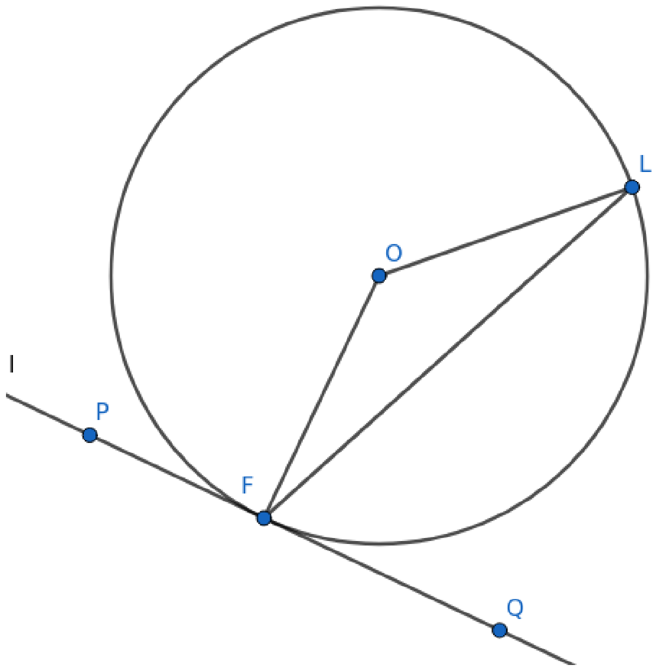
Рассмотрим угол $\angle QFL$ — острый угол, образованный касательной и хордой FL и докажем, что он равен половине меньшей дуги $\overset{\frown}{FL}$.

Действительно, пусть $\angle QFL = \alpha$, тогда $\angle OFL = 90^\circ - \alpha$, поскольку $OF \perp FQ$ как радиус, проведённый в точку касания. Треугольник

$\triangle FOL$ равнобедренный, поэтому

$$\angle OFL = 90^\circ - \alpha, \quad \angle FOL = 180^\circ - \angle OFL - \angle OLF = 2\alpha.$$

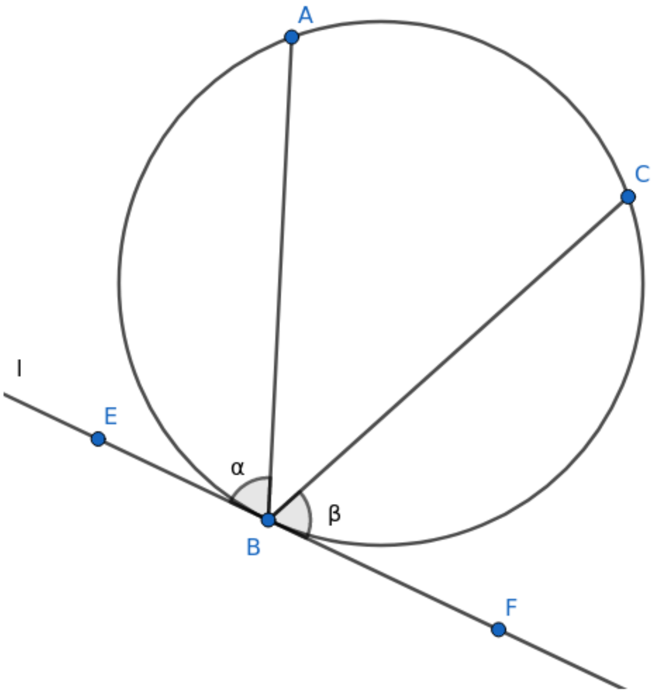
Но угол $\angle FOL$ равен градусной мере дуги $\overset{\frown}{FL}$, то есть $\angle LFQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FL}$. Для случая острого угла теорема доказана.



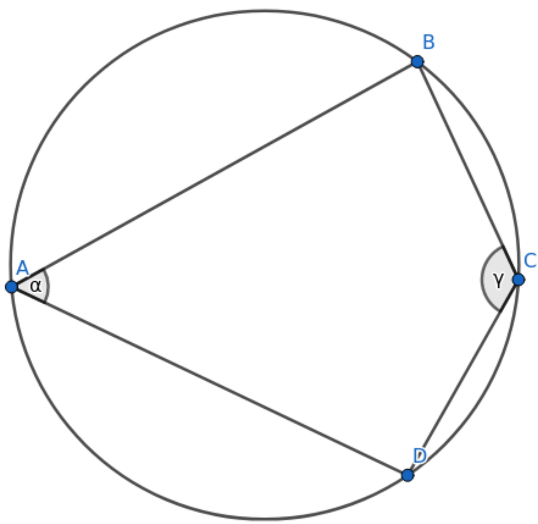
Для тупого угла остается заметить, что $\angle PFL = 180^\circ - \alpha$, а большая дуга $\overset{\frown}{FL}$ равна $360^\circ - 2\alpha$ (так как градусная мера всей окружности равна 360°).

Теорема 23. (о вписанном угле) Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ — данный вписанный угол. Проведём касательную к окружности через точку B (рисунок ниже). Обозначим $\angle ABE = \alpha$, $\angle CBF = \beta$. Тогда по теореме 22 дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ равны 2α и 2β соответственно. Отсюда дуга $\overset{\frown}{AC}$ есть $360^\circ - 2\alpha - 2\beta$; при этом $\angle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta$, то есть угол $\angle ABC$ равен половине дуги $\overset{\frown}{AC}$. Теорема доказана.



Теорема 24. Если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.



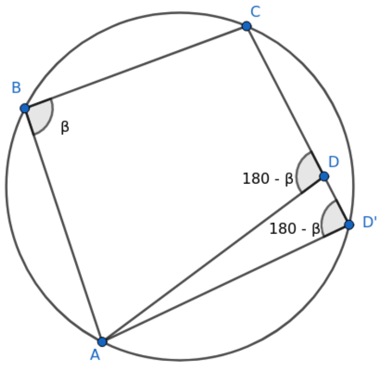
Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность. Обозначим его углы $\angle A$ и $\angle C$ через α и γ соответственно. По теореме о вписанном угле $\alpha = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$; $\gamma = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$. Следовательно,

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BCD}\right) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

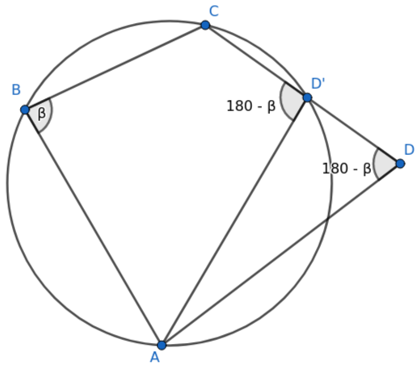
Теорема доказана.

Теорема 25. Если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

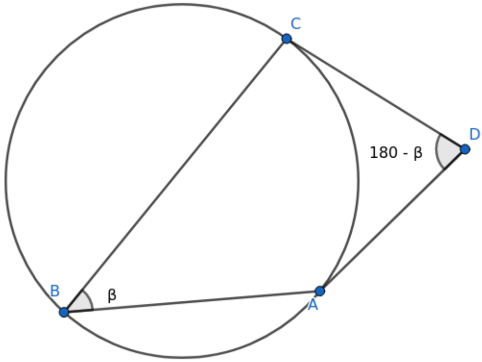
Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, и в нём $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle ADC = 180^\circ - \beta$. Опишем окружность около треугольника ABC и предположим, что она не проходит, через вершину D. Возможны несколько случаев.



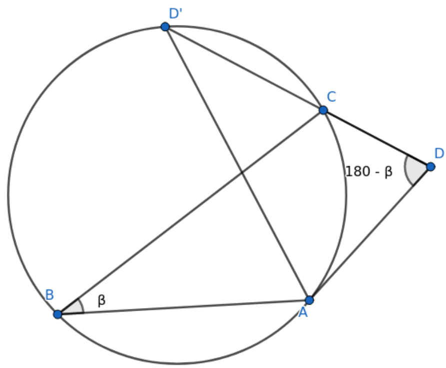
а)



б)



в)



г)

1. Точка D лежит внутри окружности, рисунок а). Тогда продлеваем CD до пересечения с окружностью в точке D'. Поскольку четырёхугольник $ABCD'$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180° (теорема 24), поэтому $\angle AD'C = 180^\circ - \beta$. Но тогда прямые AD и AD' должны быть параллельны (так как равные углы $\angle ADC$ и $\angle AD'C$ являются соответственными для этих прямых и секущей CD'), что невозможно.

2. Точка D лежит вне окружности. Этот случай даёт ещё несколько вариантов.

2а. Один из отрезков CD или AD пересекает окружность (пусть для определённости это CD — рисунок б); точка пересечения обозначена через D'). Тогда $\angle AD'C$ равен $180^\circ - \beta$, далее аналогично первому случаю.

2б. Обе прямые DC и DA касаются окружности (рисунок в)). Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}, \quad \angle BAD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCA}.$$

Отсюда

$$\angle BCD + \angle BAD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BCA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(360^\circ + \overset{\frown}{AC}\right) = 180^\circ + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Но тогда по сумме углов четырёхугольника

$$\angle B + \angle D = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} < 180^\circ,$$

что противоречит условию.

2в) Продолжение одного из отрезков CD или AC пересекает окружность (пусть для определённости это CD — рисунок г); точка пересечения обозначена D'). Так как углы $\angle AD'C$ и $\angle ABC$ опираются на одну дугу, они равны. Следовательно, $\angle AD'D = \beta$, а это означает, что в треугольнике $\triangle ADD'$ сумма двух углов равна 180°, что невозможно.

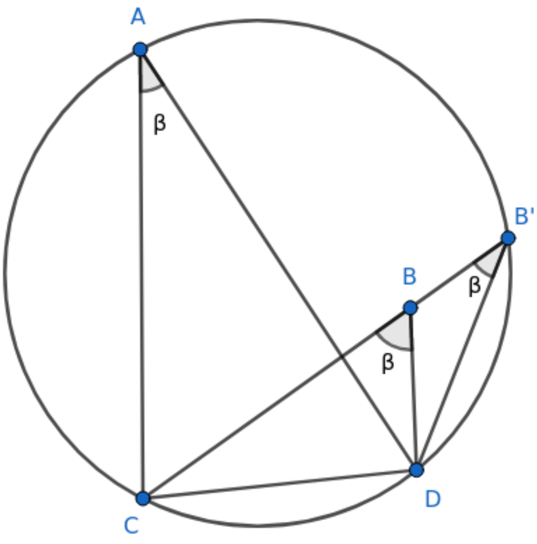
Итак, если точка D не лежит на окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$, в любом случае приходим к противоречию. Значит, точка D лежит на этой окружности, то есть около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Теорема 26. Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и из них отрезок CD виден под одним и тем же углом, то все четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

Замечание. Теорему 25 можно сформулировать так: если точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD, и при этом отрезок CD виден из них под углами α и β такими, что $\alpha+\beta = 180°$, то все четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

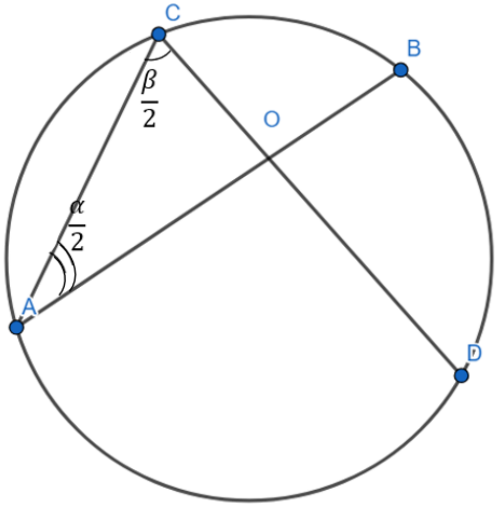
Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 25. Опишем окружность около треугольника $\triangle ACD$ и предположим, что точка B на ней не лежит.

Рассмотрим случай, когда точка B лежит внутри окружности (остальные рассматриваются аналогично теореме 25). Продлим CB до пересечения с окружностью в точке B'.



Пусть $\angle CAD = \beta$ по условию теоремы. Это означает, что $BD \parallel B'D$, что невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 27. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке , и при этом градусные меры противоположных дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ равны α и β. Тогда угол между хордами $\angle BOC$ равен $\frac{\alpha+\beta}{2}$.



Доказательство. Проведём AC. По теореме о вписанном угле

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \frac{\beta}{2}.$$

Тогда по теореме о внешнем угле для треугольника $\triangle AOC$ получаем, что

$$\angle BOC = \angle AOD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Теорема доказана.

Теорема 28. Продолжения хорд AB и CD пересекаются вне окружности в точке F. Пусть градусные меры непересекающихся дуг $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BD}$ равны α и β, $\alpha > \beta$. Тогда $\angle AFC = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

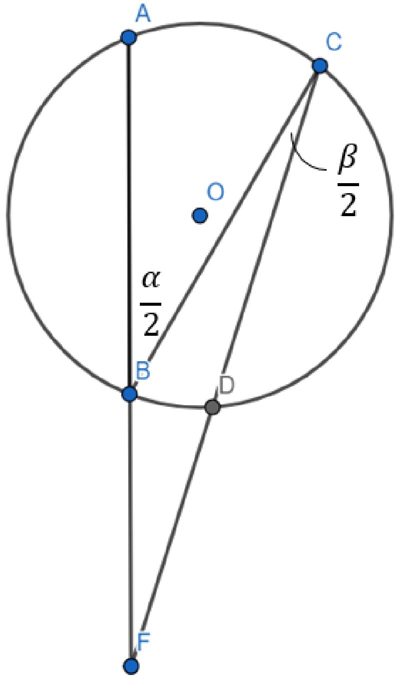
Доказательство. Проведём BC (на рисунке ниже). По теореме о вписанном угле

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{\beta}{2}.$$

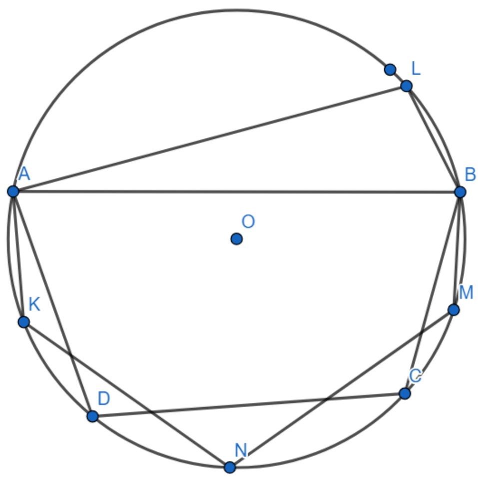
По теореме о внешнем угле для треугольника $\triangle BCF$ получаем:

$$\angle CFB + \angle BCF = \angle ABC,$$

т. е. $\angle CFB + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$, откуда $\angle CFB = \frac{\alpha-\beta}{2}$, что и требовалось доказать.



Пример 21. Четырёхугольник, вписанный в окружность, делит круг на четыре сегмента и четырёхугольник. Найдите сумму углов, вписанных в эти сегменты.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный вписанный в окружность четырёхугольник. Точки K, L, M, N лежат на его дугах $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ соответственно (на рисунке выше). Обозначим величины этих дуг через α, β, γ, δ соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле

$$\angle AKD = \frac{1}{2}(\beta+\gamma+\delta), \quad \angle DNC = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$\angle BMC = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\delta), \quad \angle ALB = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\delta).$$

Складывая эти равенства, получаем, что

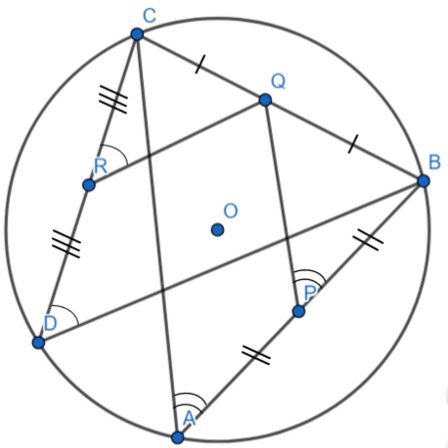
$$\angle AKD + \angle DNC + \angle BMC + \angle ALB = \frac{3}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Поскольку дуги α, β, γ, δ составляют всю окружность, их сумма равна 360°. Следовательно, искомая сумма равна $\frac{3}{2}\cdot 360^\circ = 540^\circ$.

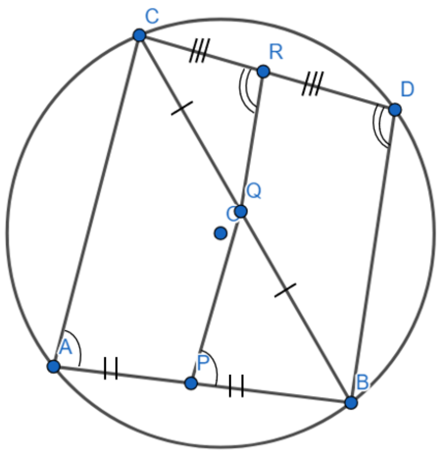
Ответ: 540°.

Пример 22. Точки P, Q, R — середины хорд AB, BC, CD некоторой окружности. Найдите угол $\angle CRQ$, если угол $\angle BPQ$ равен γ.

Решение. Проведём хорды AC и BD. Отрезки PQ и QR являются средними линиями треугольников $\triangle BAC$ и $\triangle BCD$ соответственно. Поэтому $PQ \parallel AC, QR \parallel BD$. Отсюда $\angle CAB = \angle BPQ = \gamma$. Искомый угол $\angle CRQ$ равен углу $\angle CDB$.



а)



б)

Возможны два случая расположения точек на окружности: точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рисунок а)), или по разные стороны от неё (рисунок б)).

В первом случае углы $\angle CDB$ и $\angle CAB$ равны, т. к. опираются на одну дугу $\overset{\frown}{CB}$, поэтому $\angle CDB = \gamma$.

Во втором случае углы $\angle CAB$ и $\angle CDB$ опираются на дуги, составляющие целую окружность. По теореме о вписанном угле

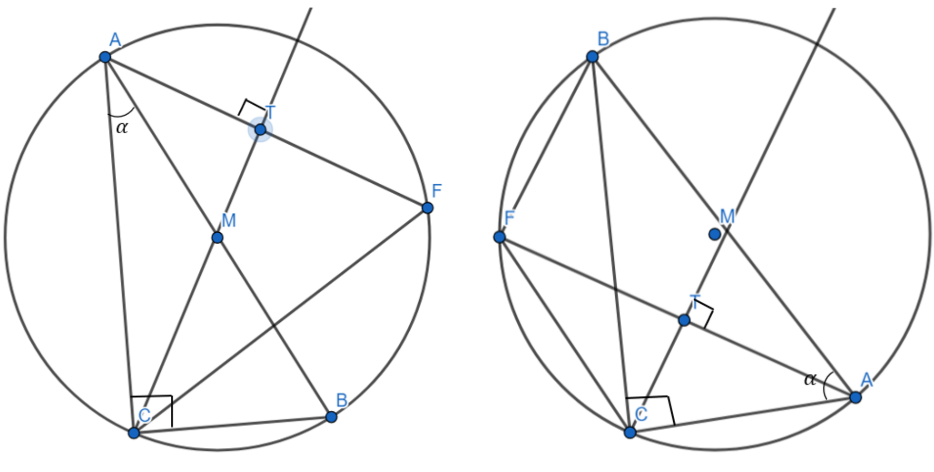
$$\angle CAB + \angle CDB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Тогда $\angle CDB = 180^\circ - \gamma$.

Ответ: γ или $180^\circ - \gamma$.

Пример 23. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника $\triangle ABC$. Точка F симметрична точке A относительно прямой CM. Найдите угол $\angle BFC$, если $\angle BAC = \alpha$, причём $\alpha \neq 45^\circ$.

Решение. Точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AF, поэтому $AM = MF$. Кроме того, центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы, поэтому $AM = BM = CM$. Итак, $AM = BM = CM = FM$. Это означает, что все четыре точки A, B, C, F лежат на окружности с центром M радиуса AM. Возможны два случая:



а) б)

1) $\alpha < 45°$ (рисунок а)). Тогда углы $\angle BFC$ и $\angle BAC$ опираются на одну дугу, поэтому $\angle BFC = \alpha$.

2) $\alpha > 45°$ (рисунок б)). Тогда четырёхугольник $BFCA$ вписан в окружность. Сумма его противоположных углов равна $180°$, следовательно, $\angle BFC = 180° - \angle BAC = 180° - \alpha$.

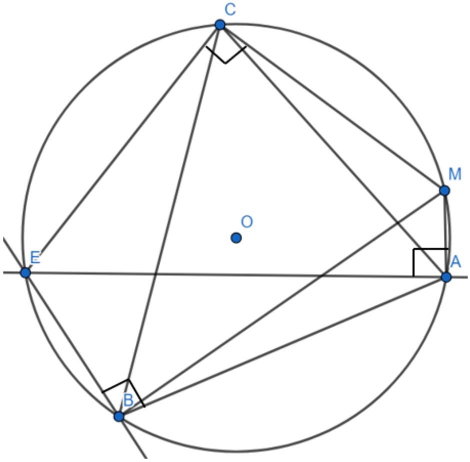
Ответ: α, если $\alpha < 45°$; $180° - \alpha$, если $\alpha > 45°$.

Замечание. В отличие от предыдущей задачи, ответы нельзя записать в виде «α или $180° - \alpha$», так как для каждого значения α угол $\angle BFC$ определяется однозначно (для разных значений α используются разные формулы). В примере 22 для каждого значения γ возможны две конфигурации, и искомый угол может принимать оба значения γ или $180° - \gamma$.

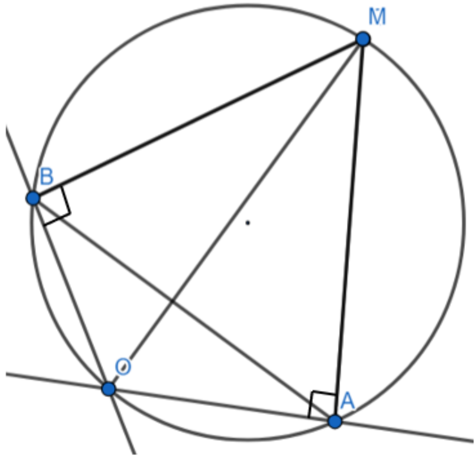
Пример 24. Три прямые пересекаются в точке O, образуя углы в $60°$ друг с другом. Докажите, что проекции произвольной точки M, отличной от O, на эти прямые являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Обозначим проекции точки M на прямые через A, B, C. Возможно несколько случаев расположения точки M.

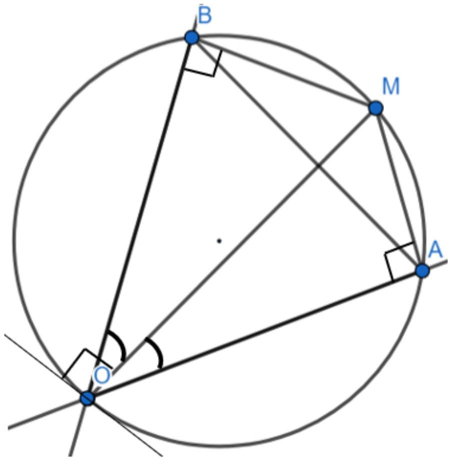
Если точка M лежит на одной из данных прямых, её проекция на эту прямую и есть сама точка M (рисунок б)).



а)



б)



в)

Если точка M лежит на биссектрисе одного из углов, её проекцией на одну из данных прямых является точка O (рисунок в)).

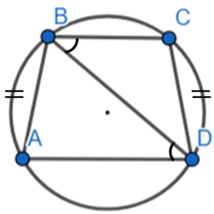
Иначе все пять точек (O, M, A, B, C) лежат на окружности, построенной на отрезке OM как на диаметре (т. к. из точек A, B, C отрезок OM виден под прямым углом).

Для рисунка а): $\angle ABC = \angle AOC = 60°$, $\angle ACB = \angle AOB = 60°$. Так как два угла треугольника равны $60°$, он равносторонний.

Для рисунка б): $\angle ABC = \angle AOC = 60°$, $\angle BAC = \angle BOC = \angle 60°$.

Для рисунка в): $\angle BCA = 60°$. Из равенства треугольников $\triangle MCB$ и $\triangle MCA$ (по гипотенузе и острому углу) следует, что $CB = CA$. Равнобедренный треугольник с углом $60°$ является равносторонним. Утверждение доказано.

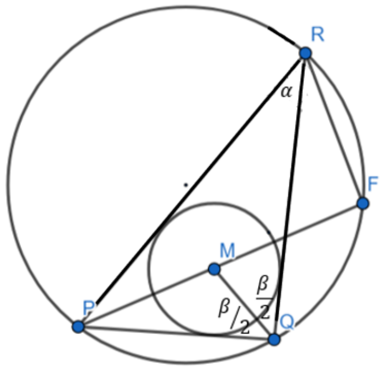
Теорема 29. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.



Доказательство. Пусть трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность (на рисунке выше). Проведём диагональ BD: $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD. Следовательно, дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$, на которые опираются эти углы, равны между собой. Значит, равны и соответствующие хорды, т. е. $AB = CD$. Теорема доказана.

Пример 25. Точка M — центр окружности, вписанной в треугольник $\triangle PQR$. Прямая PM пересекает окружность, описанную около треугольника $\triangle PQR$, в точке F, отличной от P. Докажите, что $FQ = FM = FR$.

Решение. Обозначим углы Q и R треугольника $\triangle PQR$ соответственно через α и β (на рисунке ниже).



Так как центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, QM — биссектриса угла $\angle Q$:

$$\angle MQP = \frac{1}{2}\angle PQR = \frac{\beta}{2}.$$

По теореме о сумме углов треугольника $\angle RPQ = 180^\circ - \alpha - \beta$, тогда

$$\angle MPQ = \frac{1}{2}\angle PRQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

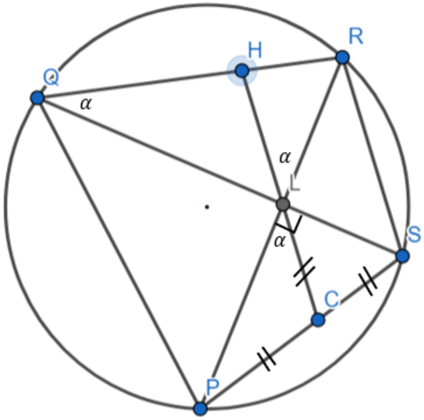
$$\angle FMQ = \angle MPQ + \angle MQP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$\angle PFQ = \angle PRQ = \alpha$ (т. к. они опираются на одну дугу). Тогда получаем, что $\angle MQF = 180^\circ - \angle FMQ - \angle MFQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. В треугольнике

$\triangle MFQ$ углы при вершинах M и Q равны $(90° - \frac{\alpha}{2})$, поэтому он равнобедренный, $FM = FQ$. Аналогично можно доказать, что треугольник $\triangle FRM$ равнобедренный и $FR = FM$. Утверждение доказано.

Пример 26. Диагонали четырёхугольника $PQRS$, вписанного в окружность, взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке . Точка L — середина стороны PS. Найдите угол между прямыми AL и QR.

Решение. Обозначим точку пересечения прямых LA и QL через H, а $\angle APS$ через α. Поскольку углы $\angle APS$ и $\angle AQR$ — вписанные и опираются на одну дугу $\overset{\frown}{RS}$, они равны между собой, т. е. $\angle AQR = \alpha$.



Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, поэтому $AL = LP$. Отсюда получаем, что

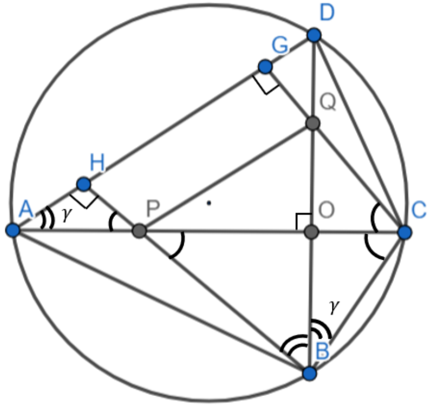
$$\angle HAQ = 90° - \angle HAR = 90° - \angle LAP = 90° - \angle APL - 90° - \alpha.$$

Следовательно, $\angle QHA = 180° - \angle AQH - \angle QAH = 90°$.

Ответ: $90°$.

Пример 27. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Из точек B и C опущены перпендикуляры BH и CG на сторону AD; при этом отрезки BH и AC пересекаются в точке P, а отрезки CG и BD — в точке Q. Найдите BC, если $PQ = 9$.

Решение. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника через O. Углы $\angle CBD$ и $\angle CAD$ равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Обозначим их за γ.



Далее находим:

$$\angle HPA = 90^\circ - \gamma \text{ (из } \triangle APH),$$

$$\angle OPB = \angle HPA = 90^\circ - \gamma \text{ (вертикальные)},$$

$$\angle BCO = 90^\circ - \gamma \text{ (из } \triangle BCO),$$

$$\angle OCQ = 90^\circ - \gamma \text{ (из } \triangle ACG),$$

$$\angle PBO = \gamma \text{ (из } \triangle PBO).$$

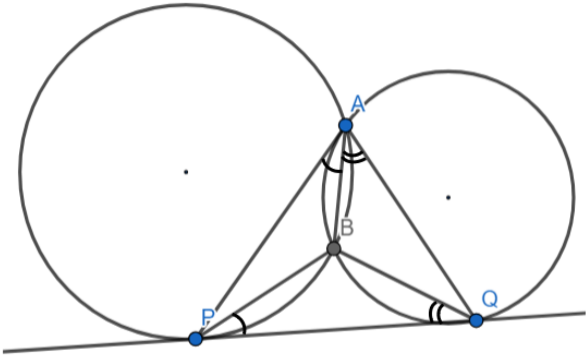
В треугольнике $\triangle PBC$ отрезок BO является биссектрисой и высотой. Значит, BO также является медианой этого треугольника, т. е. $PO = OC$. Аналогично (из треугольника $\triangle BCQ$) получаем, что $BO = OQ$.

У четырёхугольника $PBCQ$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому он является параллелограммом (можно отметить, что поскольку его диагонали перпендикулярны, это ромб). Следовательно, $BC = PQ = 9$.

Ответ: 9.

Пример 28. Две окружности пересекаются в точках A и B. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках P и Q. Найдите угол $\angle PBQ$, если $\angle PAQ = \alpha$.

Решение. Проведём AB (на рисунке ниже).



По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle BPQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BP}, \quad \angle BQP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BQ}.$$

По теореме о вписанном угле

$$\angle PAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PB}, \quad \angle QAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BQ}.$$

Значит, $\angle BPQ = \angle PAB, \angle BQP = \angle QAB$. Следовательно,

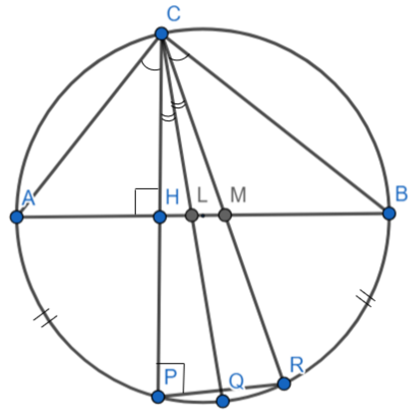
$$\angle PBQ = 180^\circ - \angle BPQ - \angle BQP = 180^\circ - \angle PAB - \angle QAB =$$

$$= 180^\circ - \angle PAQ = 180^\circ - \alpha.$$

Ответ: $180^\circ - \alpha$.

Пример 29. В треугольнике $\triangle ABC$ стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла $\angle C$ делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C тогда и только тогда, когда угол $\angle ACB$ равен 90°.

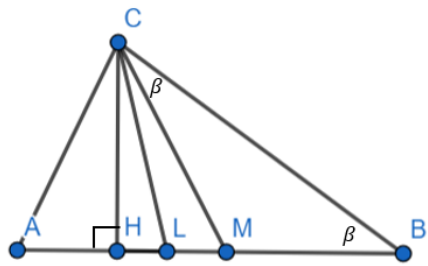
Решение. Пусть $CA < CB$, а CH, CL, CM — соответственно высота, биссектриса и медиана треугольника. Докажем сначала, что если CL является биссектрисой угла HLM, то $\angle ACB = 90^\circ$. Для этого продлеваем CH, CL и CM до пересечения с окружностью, описанной около треугольника $\triangle ABC$ (на рисунке ниже). Обозначим точки пересечения CH, CL и CM с окружностью через P, Q и R соответственно.



Так как CL делит пополам углы $\angle HCM$ и $\angle ACB$, $\angle ACH = \angle BCM$. Значит, равны и дуги, на которые опираются эти углы, т. е. $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BR}$. Отсюда следует, что $PR \parallel AB$ (накрест лежащие при этих прямых углы $\angle PBA$ и $\angle BPR$ опираются на равные дуги, поэтому равны).

Так как $PR \parallel AB$, а $CP \perp AB$, то $CP \perp PR$, т. е. $\angle CPR = 90°$. Отсюда CR — диаметр окружности. Тогда выходит, что диаметр CR проходит через середину хорды AB, и при этом не перпендикулярен ей. Это возможно только при условии, что AB также диаметр. Но тогда $\angle ACB = 90°$.

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть известно, что $\angle ACB = 90°$. Обозначим $\angle ABC = \beta$.

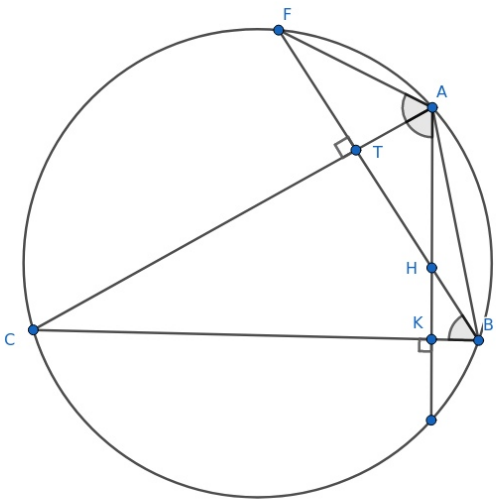


Так как $AM = CM = BM$, треугольник $\triangle BMC$ равнобедренный, откуда $\angle BCM = \beta$. Тогда

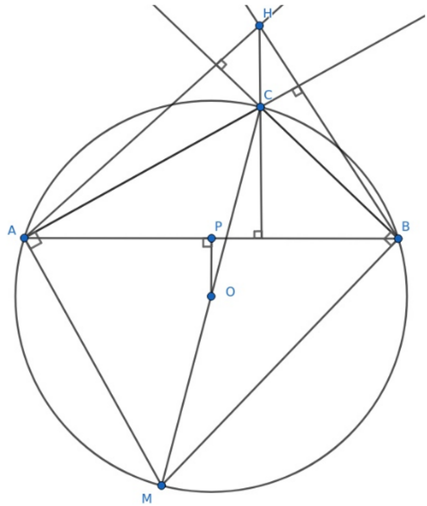
$$\angle CMH = \angle MCB + \angle MBC = 2\beta, \quad \angle NCH = 90° - \angle CMH = 90° - 2\beta.$$

Так как CL — биссектриса угла C, равного $90°$, угол $\angle LCB = 45°$, откуда $\angle LCM = 45^\circ - \beta$. Итак, мы получили, что $\angle LCM = \frac{1}{2}\angle MCH$, поэтому CL — биссектриса угла $\angle HCM$. Утверждение доказано.

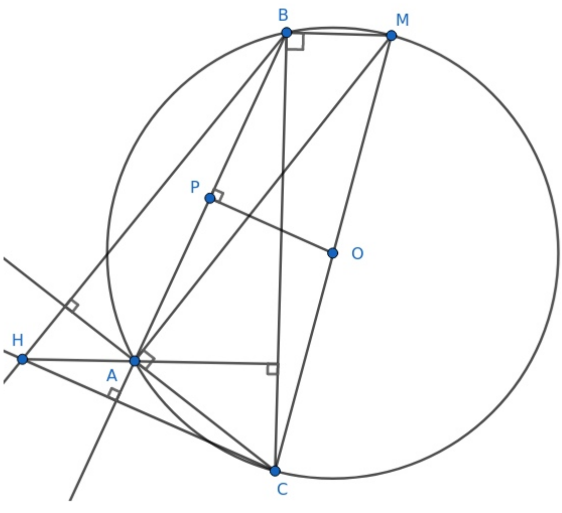
Теорема 30. Точка, симметричная ортоцентру треугольника (т. е. точке пересечения высот или точке пересечения прямых, содержащих высоты) относительно любой из его сторон, лежит на окружности, описанной около этого треугольника.



а)



б)



в)

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, а его высоты AK и BT (или их продолжения) пересекаются в точке H. Обозначим точку пересечения прямой BH с окружностью через F (точки F и H различны) и докажем, что $FT = TH$.

На рисунке выше изображены различные варианты: а) остроугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник с прямым углом при вершине C; в) тупоугольный треугольник с тупым углом при вершине B.

Углы $\angle CAF$ и $\angle CBF$ равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

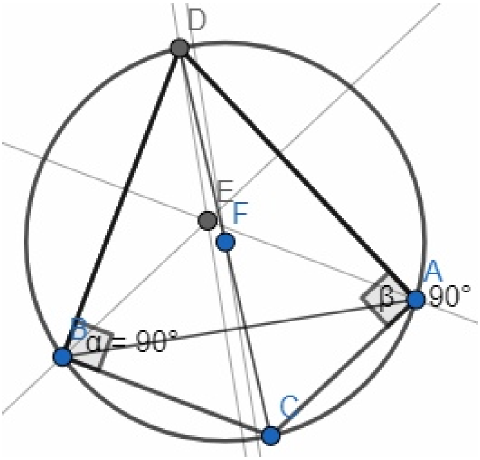
Для рисунков а) и б) рассмотрим треугольники $\triangle BHK$ и $\triangle AHT$. У них углы при вершине H равны; углы $\angle K$ и $\angle T$ прямые. Следовательно, $\angle KBH = \angle TAH$. Но это означает, что отрезок AT является биссектрисой и высотой треугольника $\triangle AFH$, т. е. AT также есть медиана, $FT = TH$. Таким образом, точка F оказалась симметрична ортоцентру треугольника относительно стороны AC, и при этом она лежит на описанной окружности. Утверждение доказано.

Для рисунка в) рассматриваем треугольники $\triangle CBT$ и $\triangle CAK$. Угол при вершине C у них общий, углы при вершинах T и K прямые, поэтому $\angle CBT = \angle CAK$. Таким образом, AT также является высотой и биссектрисой треугольника $\triangle AFH$. Далее рассуждаем аналогично предыдущему случаю. Теорема доказана.

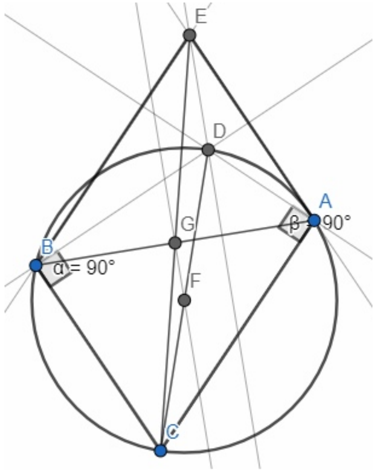
Теорема 31. Центр окружности, описанной около треугольника, точка пересечения его медиан и точка пересечения его высот лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник. Опишем около него окружность (обозначим её центр через O); пусть M — точка, диаметрально противоположная точке C; H — ортоцентр треугольника (на рисунке а) изображён остроугольный треугольник, на рисунке б) — тупоугольный с тупым углом при вершине C; на рисунке в) — тупоугольный с острым углом при вершине C).

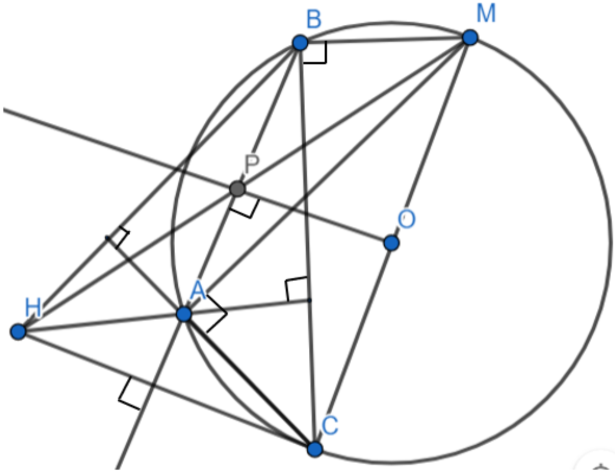
Так как CM — диаметр окружности, $\angle CAM = \angle CBM = 90°$. Заметим, что $AM \parallel BH$ (т. к. обе эти прямые перпендикулярны AC) и $AH \parallel BC, BM \perp BC$. Значит, четырёхугольник $AHBM$ – параллелограмм, поэтому его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Обозначим эту точку пересечения через P. Отрезок OP есть средняя линия треугольника $\triangle MCH$ (т. к. O и P — середины MC и MH соответственно). Отсюда $OP = \frac{1}{2}CH$ и $OP \parallel CH$ (а значит, $OP \perp AB$).



а)



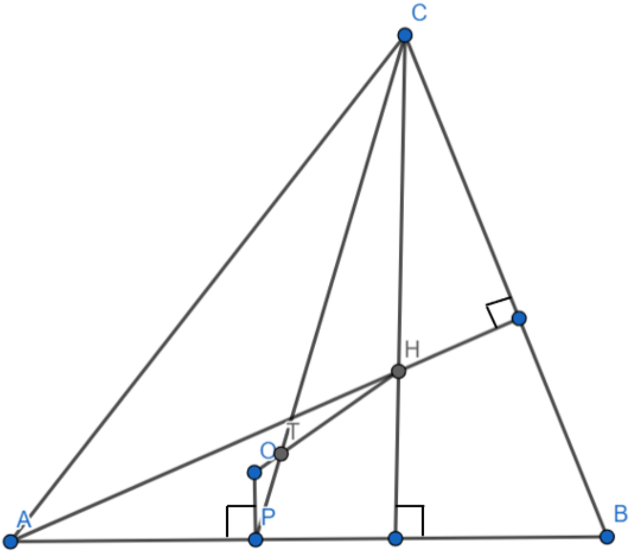
б)



в)

Этот результат можно сформулировать так: расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны треугольника.

Проведём CP и OH (на рисунке ниже изображён только один случай; для остальных рассуждения аналогичны).



Так как $OP \parallel CH$, у треугольников $\triangle POT$ и $\triangle CHT$ все углы равны, поэтому $\triangle OPT$ подобен $\triangle HCT$. При этом коэффициент подобия равен $\frac{OP}{CH} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $CT : TP = 2 : 1$, а так как CP есть медиана (P — середина AB), то T есть точка пересечения медиан. Итак, ортоцентр (H), точка пересечения медиан (T) и центр описанной окружности (O) лежат на одной прямой.