Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

НАУКА В РЕГИОНЫ

Методические материалы по математике для 9 класса

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ

2017

Методические материалы созданы преподавателями кафедры высшей математики МФТИ. Авторы и составители:

кандидат физико-математических наук, доцент Н.Х. Агаханов

кандидат физико-математических наук, доцент О.К. Подлипский

ассистент кафедры Е.Г. Молчанов

ассистент кафедры И.В. Глухов

ассистент кафедры Ю.В. Кузьменко

Книга предназначена для учеников 9 класса, учителей математики, руководителей кружков и факультативов, и людей, интересующихся нестандартными задачами по математике.

Данное руководство будет полезно при подготовке к муниципальному и региональному турам Всероссийской олимпиады по математике.

Редакторы: М.А. Тарасевич, А.Д. Рыбаков, В.В. Белосевич, Е.С. Фёдорова
Корректоры: М.С. Жарикова, В.С. Кузнецова, Р.А. Сиразов,
Компьютерная вёрстка: А.А. Хохлачёв, М.И. Райковский, М.С. Радионов

Содержание

Занятие «Функции» **4**

Раздача 4

Задачи для факультативной работы 7

Занятие «Комбинаторика» **14**

Вступление 14

Задачи до раздачи 14

Задачи для раздачи 15

Задачи для факультативной работы 21

Занятие «Оценка+пример» **25**

Задачи с указаниями и решениями 25

Задачи для факультативной работы 30

Занятие «Теория чисел» **41**

Основная теорема арифметики 41

Признаки делимости 42

Остатки 44

Занятие «Геометрия» **49**

Раздача 49

Задачи с указаниями и решениями 53

Занятие «Функции»

Раздача

Задача 1. Как расположена точка $A(3;5)$ по отношению к прямой $y = 3x + 2$: выше, ниже или лежит на этой прямой?

Решение. Точка с координатами $(3;11)$ лежит на прямой, поэтому точка $A(3;5)$ лежит ниже.

Ответ: ниже.

Задача 2. Известно, что точка $A(3;7)$ расположена выше прямых $y = ax + b$ и $y = cx + d$. А как эта точка может быть расположена по отношению к прямой $y = 0{,}5(a+c)x + 0{,}5(b+d)$ (только выше, только ниже, или же ответ зависит от коэффициентов)?

Решение. При $x = 3$ функция $y = 0{,}5(a+c)x + 0{,}5(b+d)$ принимает значение, равное полусумме значений функций $y = ax+b$ и $y = cx+d$, каждое из которых меньше 7.

Ответ: выше.

Задача 3. Найдите точку пересечения прямых $y = 2x+2$ и $y = -x+5$. Докажите, что при любом значении параметра a прямые $y = a(2x + 2) + (a-1)(x-5)$ проходят через одну точку.

Ответ: прямые пересекаются в точке $(1;4)$.

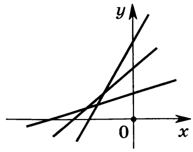
Указание. Вне зависимости от значения параметра a прямые проходят через точку $(1;4)$.

Задача 4. Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2 + px + q$, у которых $2p+q = 2017$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

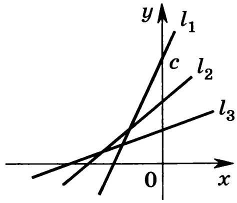
Решение. Рассмотрим значение трёхчлена в точке $x_0 = 2$. Тогда $y = x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2p + q = 4 + 2017 = 2021$, то есть графики всех трёхчленов проходят через точку $(2;2021)$.

Задача 5. На плоскости нарисованы прямые, как на приведённом рисунке.

Могут ли эти прямые быть графиками функций $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$? Могут ли эти прямые быть графиками функций $y = ax - b - c$, $y = bx - c - a$, $y = cx - a - b$?



Решение. Предположим противное. Пусть уравнение прямой l_1 (смотрите рисунок) имеет вид $y = bx + c$. У этой прямой самый большой угловой коэффициент, в частности $b > c$. Но прямая l_1 пересекает ось ординат в точке с ординатой c, прямая l_2 — в точке с ординатой b, причем из рисунка видно, что $b < c$. Полученные неравенства противоречат друг другу, следовательно, таких чисел a, b и c не существует.



Предположим противное. Заметим, что все три прямые должны проходить через точку $(-1; -a - b - c)$. Но на рисунке три прямые не проходят через одну точку. Значит, таких чисел a, b и c не существует.

Ответ: не могут, не могут.

Задача 6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(1; 2)$ и равноудалённых от точек $B(5; -1)$ и $C(-1; 3)$.

Ответ: $y = -x + 3$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Указание. Рассмотрите два случая: 1) точки B и C лежат по разные стороны от искомой прямой;
2) точки B и C лежат по разные стороны от искомой прямой.

В первом случае прямая проходит через середину отрезка BC, во втором случае прямая параллельна отрезку BC.

Задача 7. Разность кубов двух линейных функций — квадратный трёхчлен. Докажите, что он не имеет корней.

Решение. Коэффициенты при x в указанных трёхчленах одинаковы, иначе разность кубов этих функций будет кубическим многочленом. То есть мы имеем разность $(ax + b)^3 - (ax + d)^3$. Она обращается в 0 тогда и только тогда, когда $(ax+b)^3 = (ax+d)^3$, то есть $ax+b = ax+d$. Это равенство невозможно, так как прямые $y = ax + b$ и $y = ax + d$ параллельны, либо совпадают при $b = d$.

Задача 8. Докажите, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2ax - ab = 0$ и $x^2 - 2bx + ab = 0$ имеет решение.

Решение. Пусть оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны. Записав их, получим: $4(a^2 - ab) < 0$ и $4(b^2 - ab) < 0$. Сложив эти неравенства, получаем, что $4(a^2 - b^2) < 0$ — противоречие.

Задача 9. Докажите теорему о высотах треугольника с помощью применения разбираемой темы: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Указание. Выберите систему координат так, чтобы две вершины треугольника лежали на оси Ox, а третья — на оси Oy. Запишите уравнения сторон. Запишите уравнения высот, используя следующее свойство: прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $ac = -1$. Найдите точку пересечения высот (на оси Oy).

Задача 10. Про квадратные трёхчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а трёхчлен $f_1 + f_2$ корней не имеет. Докажите, что трёхчлен $f_1 - f_2$ имеет корни.

Решение. Предположим противное: $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Есть два варианта: f_+ и f_- одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни — противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни — противоречие.

Ответ: ниже.

Задача 11. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \cdots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2$, $\dots$, $f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$. Складывая полученные равенства, получаем $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \dots + (c_1 - c_{100})$.

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Ответ: только 0.

Задачи для факультативной работы

Задача 12. При каких значениях a прямые $y = 2x - 1$, $y = x + a + 3$ и $ay = -x - 4$ проходят через одну точку?

Решение. Выразим из первого уравнения y, и подставим во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} 2x - 1 = x + a + 3, \\ 2ax - a = -x - 4. \end{cases}$$

Исключив из данной системы переменную x, получаем: $a^2 + 4a + 4 = 0$.

Ответ: $a = -2$.

Задача 13. Числа a, b, c таковы, что прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ имеют общую точку. Докажите, что $a = b = c$.

Решение. Пусть $P(x_0; y_0)$ — общая точка данных прямых. Вычитая из первого уравнения второе, из второго — третье, а из третьего — первое, и перемножив полученные равенства, получаем: $(a-b)(b-c)(c-a)x_0^3 = (c - b)(a - c)(b - a)$. Отсюда, если разности в скобках не равны нулю, получаем: $x_0^3 = -1$, то есть $x_0 = -1$. Подставив это значение в равенства $y_0 = ax_0 + b$, $y_0 = bx_0 + c$, $y_0 = cx_0 + a$ получаем: $y_0 = b - a = c - b = a - c$, откуда $a = b = c$.

Задача 14. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $K(1; 2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определите, как эта точка расположена по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$.

Решение. Заметим, что при $x = 1$ обе параболы проходят через точку A с координатами $(1; a + b + c)$. Раз точка K лежит ниже графика первой параболы, и ветви первой параболы направлены вверх, то она лежит ниже точки A (то есть $2 < a + b + c$). Но так как ветви второй параболы также направлены вверх и точка K лежит ниже точки A параболы, то K лежит и ниже графика второй параболы.

Ответ: ниже графика параболы.

Задача 15. Парабола $y = ax^2$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение. Поскольку график пересекает прямые, $a > 0$. Заметим, что прямая $y = c$ при $c > 0$ пересекает данную параболу в точках, симметричных относительно оси ординат, поэтому данные в условии отрезки имеют длины $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$, где x_1, x_2, x_3 — положительные корни уравнений $ax^2 = 1$, $ax^2 = 2$, $ax^2 = 3$. Следовательно, сумма квадратов длин первых двух отрезков равна

$$(2x_1)^2 + (2x_2)^2 = 4\frac{1}{a} + 4\frac{2}{a} = 4\frac{3}{a}.$$

Значит, эта сумма равна квадрату длины третьего отрезка. Утверждение доказано.

Задача 16. Докажите, что при любых a и b уравнение $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ имеет решение.

Решение. Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то данное уравнение квадратное с дискриминантом $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \geqslant 0$. Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то уравнение имеет корень.

Задача 17. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трёхчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0, то есть число $a+b+1$ составное.

Задача 18. Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют корней, то и уравнение $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ также не имеет корней?

Решение. Первое. По условию $a^2 < 4b$ и $c^2 < 4d$. Покажем, что тогда

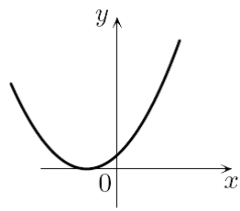
$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 < 4\left(\frac{b+d}{2}\right).$$

Имеем $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2) \leqslant \frac{1}{4}(a^2(a^2 + c^2) + c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \leqslant$ $\leqslant (4b + 4d)$.

Второе. Пусть $f_1 = x^2 + ax + b$, $f_2 = x^2 + cx + d$. По условию $f_1 > 0$ и $f_2 > 0$ при всех x, так как $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$. Но тогда и $f =$ $= x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = \frac{f_1+f_2}{2}$, значит, уравнение $f = 0$ не имеет корней.

Ответ: верно.

Задача 19. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$. Найдите a.



Решение. График касается оси Ox, поэтому $y =$ $= (x + x_0)^2$, $y = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$, то есть $a = 2x_0$ и $a = x_0^2$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$.
Ответ: $a = 4$.

Задача 20. На доске написали квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом. Каждую минуту на доске дописывают квадратный трёхчлен, причём у каждого следующего трёхчлена все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится трёхчлен, не имеющий корней.

Решение. Пусть сначала на доске был написан трёхчлен $ax^2 + bx + c$. Тогда через n минут будет выписан трёхчлен $(a+n)x^2+(b+n)x+(c+n)$. Его дискриминант $D = (b+n)^2-4(a+n)(c+n) = -3n^2+(2b-4a-4c)n+$ $+ (b^2 - 4ac)$ является квадратным трёхчленом (относительно переменной n) с отрицательным старшим коэффициентом. Значит, при некотором натуральном n дискриминант будет отрицательным. Поэтому на доске появится трёхчлен, не имеющий корней.

Задача 21. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — целые нечётные числа. Может ли он иметь целый корень?

Решение. Предположим, что нашёлся такой квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2+bx+c$, что a, b, c — нечётные, а x_1 — его целый корень. Но тогда если x_1 — нечётно, то $P(x_1)$ нечётно как сумма трёх нечётных чисел, если же x_1 — чётно, то $P(x_1)$ нечётно как сумма двух чётных и одного нечётного числа. Но 0 — чётное число. Значит, $P(x_1) \neq 0$.

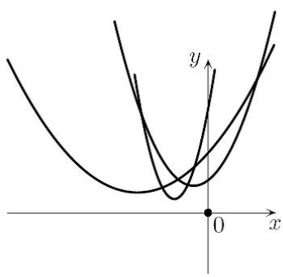
Ответ: не может.

Задача 22. Найдите сумму корней всех квадратных трехчленов вида $y = x^2 + px - 2017$, где p принимает все целые значения от -100 до 100.

Решение. Поскольку $D = p^2+4\cdot 2017 > 0$ для любого p, то все трёхчлены имеют вещественные корни. Заметим, что по теореме Виета сумма корней трёхчлена $y = x^2 + px - 2017$ равна $-p$, то есть сумма корней всех написанных трёхчленов равна $100+99+98+\dots+(-99)+(-100) = 0$.

Ответ: 0.

Задача 23. На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Могут ли это быть трёхчлены $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$, $cx^2 + ax + b$?



Решение. Предположим противное. Заметим, что значения данных трёхчленов в точке $x = 1$ совпадают (они равны $a + b + c$). Но из рисунка видно, что каждые две из парабол пересекаются в двух точках, причем все эти шесть точек пересечения различны. Получили противоречие.

Ответ: не могут.

Задача 24. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена $P(x)$ положителен. Сколько корней может иметь уравнение

$$P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0?$$

Решение. Первое. Пусть $P(x) = x^2 + px + q$ и $D = p^2 - 4q > 0$. Тогда уравнение примет вид $P(x)+P(x+\sqrt{D})=x^2+px+q+(x+\sqrt{D})^2+$ $+p(x+\sqrt{D})+q=2x^2+2(x+\sqrt{D})x+2q+D+p\sqrt{D}=0$. Посчитаем четверть дискриминанта получившегося квадратного уравнения. Она равна $(p+\sqrt{D})^2-2(2q+D+p\sqrt{D})=p^2-4q-D=0$. То есть уравнение имеет ровно один корень.

Второе. Если $x_1<x_2$ — корни квадратного трёхчлена $P(x)$, то x_2- $-x_1=\sqrt{D}$, откуда следует, что график $y=P(x)$ получается из графика трехчлена сдвигом влево вдоль оси Ox на расстояние $\sqrt{D}$, равное расстоянию между точками пересечения графика $y=P(x)$ с осью Ox. Это означает, что графики трёхчленов $y=P(x)$ и $y=P(x+\sqrt{D})$ пересекают ось Ox в общей точке с абсциссой $x=x_1$ и симметричны относительно прямой $x=x_1$. Поэтому график квадратного трёхчлена $P(x)+P(x+\sqrt{D})$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x=x_1$ и симметричен относительно прямой $x=x_1$. Значит, квадратный трёхчлен $P(x)+P(x+\sqrt{D})$, во-первых, имеет корень $x=x_1$, во-вторых, не может иметь других корней, так как все его корни должны быть симметричны относительно точки $x=x_1$, и наличие других корней означало бы, что их не меньше трёх.

Ответ: один.

Задача 25. На плоскости нарисованы координатные оси без масштаба, а также прямые, заданные уравнениями $y=ax+b$, $y=bx+a$ (сами коэффициенты a и b — различные неизвестные числа). Постройте с помощью циркуля и линейки прямую, заданную уравнением

$$y=2(a+b)x.$$

Указание.

1) прямая $y=2(a+b)x$ проходит через точку $O(0;0)$ — пересечение координатных осей и точку $A(1;2a+2b)$;

2) прямые $y=ax+b$ и $y=bx+a$ пересекаются в точке $B(1;a+b)$;

3) длина перпендикуляра, проведённого из точки B к оси Ox в два раза меньше длины перпендикуляра, проведённого из точки A к оси Ox.

Задача 26*. Существуют ли несколько различных строго возрастающих линейных функций таких, что квадрат любой из них при всех значениях x больше суммы остальных линейных функций?

Указание. Рассмотрите точки пересечения прямых с осью Ox и выберите прямую (одну из таких, если их несколько), пересекающую ось Ox в самой правой из этих точек.

Ответ: не существуют.

Задача 27. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины — на ветвях параболы $y = x^2$. Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси Oy равно 1.

Решение. Пусть $O(0;0)$, $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$, где $b < 0 < a$ — координаты вершин данного треугольника. Он — прямоугольный, поэтому скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равно нулю. Имеем $\overrightarrow{OA} = (a;a^2)$, $\overrightarrow{OB} = (b;b^2)$ поэтому $ab + a^2b^2 = 0$. Отсюда, с учетом того, что $ab \neq 0$, получаем $ab = -1$. Но a и $|b|$ как раз и есть расстояния от вершин острых углов до оси Oy.

Задача 28. В первой четверти координатной плоскости построили график гиперболы вида $y = \frac{k}{x}$ и прямую l, пересекающую гиперболу в двух точках A и B. График гиперболы и точку B стёрли, оставив на рисунке только оси координат, прямую l и точку A на ней. Восстановите с помощью циркуля и линейки точку B.

Решение. Пусть прямая имеет уравнение $y = ax + b$. Тогда точки пересечения этой прямой и гиперболы имеют абсциссы, являющиеся корнями уравнения $ax + b = \frac{k}{x}$, то есть квадратного уравнения $ax^2 + bx - k = 0$. Значит, $x_A + x_B = -\frac{b}{a}$. Но именно такую абсциссу имеет точка C пересечения прямой l с осью Ox. Теперь понятно построение точки B: от точки C на оси Ox нужно отложить влево отрезок длины x_A. Мы получим проекцию точки B на ось Ox. Перпендикуляр к оси Ox, проведённый через эту точку, пересечет прямую l в точке B.

Задача 29. Постройте на координатной плоскости множества точек, задаваемые уравнениями: $y = |x-1| + |x+1|$, $y = ||2x-1| - 5| + 1$.

Указание. Используйте свойства модуля и преобразования графиков функций.

Задача 30*. На координатной плоскости нарисована ломаная, задаваемая на промежутках $x < -2$, $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $3 < x$ соответственно формулами $y = x + 3$, $y = 3x + 7$, $y = 7x - 5$. Найдите формулу, в которую входят только линейные функции и модули, описывающую данную функцию.

Указание. Искомую функцию нужно искать в виде $y = a|x+2| + b|x-3| + cx - d$.

Ответ: $y = |x + 2| + 2|x - 3| + 4x - 1$.

Задача 31. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трёхчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?

Решение. Так как $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то $b^2 \geqslant 4ac$, откуда $b^6 \geqslant 64a^3c^3$. Если $ac \geqslant 0$, то $64a^3c^3 \geqslant 4a^3c^3$, а если $ac < 0$, то $b^6 \geqslant 0 > 4a^3c^3$ — в обоих случаях $b^6 \geqslant 4a^3c^3$, то есть дискриминант неотрицателен.

Ответ: верно.

Задача 32. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a любой из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученное уравнение также будет иметь корень.

Решение. Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 — корни данного уравнения, то $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1t_2$. Пусть t_1 — указанный в условии корень. Тогда новое уравнение имеет вид $x^2 - t_2x + (t_1t_2 - t_1^2) = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = t_2^2 - 4t_1t_2 + 4t_1^2 = (2t_1 - t_2)^2 \geqslant 0$. Значит, уравнение имеет корень.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что корнем полученного уравнения является число t_1 (другой его корень — это $t_2 - t_1$).

Занятие «Комбинаторика»

Вступление

Объяснить 2/3-класснику, почему при перестановке множителей произведение не меняется.

Неправильные ответы:
1) запомните правило: при перестановке множителей произведение не меняется (после этого запомните другое правило: $2 + 2 = 5$);
2) поверьте на слово/у нас так принято;
3) а их и нельзя переставлять: нужно всегда следить за порядком умножения.

Пример правильного ответа: возьмём прямоугольник и посчитаем количество клеток в нём по столбцам и по строкам.

Правило произведения. Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, и после каждого такого выбора объект a_2 можно выбрать n_2 способами, то выбор упорядоченной пары (a_1,a_2) можно осуществить $n_1 \cdot n_2$ способами.

Обратить внимание. После каждого выбора могут быть разные доступные объекты a_2 (прямоугольник, где в каждой строке закрашено одинаковое количество клеток, но в разных столбцах). Главное, чтобы каждый раз было одно и то же количество. Если объект a_1 — строка, объект a_2 — столбец, то (a_1,a_2) — координата клетки. Упорядоченная — значит, что (a_2,a_1) — совершенно другая клетка.

Правило суммы. Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, а объект a_2 можно выбрать n_2 способами, причём результаты выбора объектов a_1 и a_2 никогда не совпадают, то выбор «либо a_1, либо a_2» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

Задачи до раздачи

Задача 33. Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов золотую, серебряную и бронзовую медали?

Решение. Выбрать золотого медалиста (объект a_1) можно 20-ю способами. После этого выбрать серебряного медалиста (объект a_2) среди оставшихся участников можно 19-ю способами. После розыгрыша золотой и серебряной медали выбрать бронзового медалиста (объект a_3) можно 18-ю способами. По правилу произведения получаем, что количество способов разыграть между спортсменами золотую, серебряную и бронзовую медали равно $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Ответ: 6840.

Задача 34. Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов три призовых места?

Решение. Пусть количество способов выбрать 3 призовых места из 20 участников равно m. Разыграем среди этих призёров золотую, серебряную и бронзовую медали. Количество способов разыграть 3 медали среди трёх участников равно $3! = 6$. Заметим, что в итоге среди 20 участников были разыграны золотая, серебряная и бронзовая медали.

С одной стороны, по правилу произведения количество способов разыграть медали среди 20 участников равняется $m \cdot 3!$. С другой стороны, это количество уже было подсчитано ранее, и оно равно $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$. Отсюда, $m = \dfrac{(20 \cdot 19 \cdot 18)}{6} = 1140$.

Обратить внимание. «Правила деления» не было, вводить его не рекомендуется. Желательно изначально объяснять через «правило умножения» по образцу этой задачи, а только после понимания этого разрешать делить.

Ответ: 1140.

Задачи для раздачи

Задача 35. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две одинаковых ладьи, чтобы они не «били» друг друга?

Решение. Нельзя применять правило произведения, поскольку объекты (ладьи) — одинаковые. Сделаем ладьи разными (2 способа), после этого посчитаем количество способов выбрать две разных «не бьющих» ладьи.

Выбор объекта a_1 — поля для белой ладьи — может быть сделан 64-мя способами. Независимо от этого выбора белая ладья «бьёт» 15 полей, поэтому для чёрной ладьи остается $64 - 15 = 49$ возможных полей (a_2). По правилу произведения общее количество способов поставить белую и чёрную ладьи равно $64 \cdot 49 = 3136$.

Обозначим количество способов поставить две одинаковые ладьи за x. После каждого выбора количества способов поставить две одинаковых ладьи есть 2 способа сделать ладьи разными, поэтому: $x \cdot 2 = 3136$, откуда ответ: 1568.

Ответ: 1568.

Задача 36. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение. Пусть количество таких слов равняется m. Если бы все буквы были различны, то это количество равнялось бы 10! в соответствии с числом перестановок. Но в нашем слове буквы «т», «м» встречаются по 2 раза, а буква «а» — 3 раза.

Сделаем эти буквы различными, приписав одинаковым буквам нижние индексы. Для начала трём одинаковым буквам «а» припишем разные индексы («а_1», «а_2» и «а_3» соответственно) — число слов теперь будет равняться $m \cdot 3!$. Затем сделаем «разными» буквы «т» и «м».

Теперь, в слове «$\text{м}_1\text{а}_1\text{т}_1\text{ем}_2\text{а}_2\text{т}_2\text{ика}_3$» все буквы действительно будут различны, и при перестановке букв получится $m \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 10!$ различных слов, откуда $m = \dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$.

Ответ: 151200.

Задача 37. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9, если цифры в записи числа не повторяются и в числе есть цифра 7?

Решение. Начнём с цифры 7. Если эта цифра стоит в числе на первом месте, то останется разместить 5 цифр из 9, количество способов это сделать: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Если цифра 7 не стоит на первом месте, то она может стоять на одном из оставшихся 5 мест (5 способов). Далее посмотрим на первую цифру, независимо от того, где находится цифра 7, первую цифру можно выбрать восемью способами из множества $\{1, 2, \ldots, 6, 8, 9\}$ (ноль на первое место ставить нельзя).

Наконец, восемь оставшихся цифр (теперь включая ноль) нужно упорядоченно поставить на 4 оставшихся места. Итого, по правилу произведения, различных чисел, не начинающихся с 8, удовлетворяющих условию задачи, будет $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

По правилу суммы, получаем ответ: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 82320$.

Ответ: 82320.

Задача 38. На параллельных прямых a и b отмечено 11 и 12 точек соответственно. Сколько треугольников можно составить с вершинами в отмеченных точках?

Решение. Треугольники, составленные из отмеченных точек, разделим на два типа. К первому типу отнесём треугольники с двумя точками на прямой a и одной точкой на прямой b. Таких треугольников

$$\frac{(10 \cdot 11)}{2} \cdot 12 = 660.$$

Ко второму типу отнесём треугольники, у которых, наоборот, две точки на прямой b и одна — на прямой a. Треугольников второго типа

$$11 \cdot \frac{(11 \cdot 12)}{2} = 726.$$

Каждый треугольник относится либо к первому, либо ко второму типу, следовательно, количество всех треугольников равняется $660 + 726 = 1386$.

Ответ: 1386.

Задача 39. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове «к» не стоит непосредственно за буквой «и»?

Решение. Посчитаем, наоборот, количество слов, в которых есть «ик». Обе буквы встречаются ровно по разу, и, если буква «к» идёт строго следом за буквой «и», мы можем считать, что существует новая «буква» «ик», на которую были заменены обе буквы. Таким образом, в перестановках участвуют только 9 букв, среди них три буквы «а», две буквы «м» и две буквы «т». Аналогично задаче **36**, получим, что количество таких слов будет равно

$$\frac{9!}{3! \cdot (2!)^2} = 15120.$$

Для того, чтобы получить количество слов, в которых нет подслова «ик», данное число надо отнять из общего количества слов 151200 и получим ответ: $151200 - 15120 = 136080$.

Ответ: 136080.

Задача 40. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове «м» не стоит непосредственно за буквой «е»?

Решение. В предыдущей задаче буквы подслова «ик» встречались в исходном слове по разу. Здесь же в подслове «ем» буква «е» встречается один раз, а буква «м» — два раза. Рассмотрим слова, содержащие подслово «ем», мы можем считать, что существует новая «буква» «ем», на которую были заменены обе буквы. Аналогично решению предыдущей задаче находим количество слов, содержащих уже 9 букв(«м», «ем», «а», «а», «а», «т», «т», «и», «к»). Количество таких слов равняется (буквы «ем» и «м» — разные, неважно какую букву выбрать для образования «ем», так как буквы одинаковы)

$$\frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240.$$

Ответом будет: $151200 - 30240 = 120960$.

Ответ: 120960.

Задача 41. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы они «не били» друг друга?

Решение. Поставим для начала на доску белого короля. Невозможна ситуация, когда первый король бьёт второго, а второй — не бьёт первого. Таким образом, достаточно поставить чёрного короля на одно из мест, которые не бьёт белый король.

Количество клеток, оказывающихся под ударом первого короля будет зависеть от его местоположения:

1) если белый король стоит в углах (4 способа), он бьёт 3 клетки, и чёрный король может стоять на оставшихся $60 = (64 - 1 - 3)$ клетках;

2) если белый король стоит на одной из сторон шахматной доски, но не в угле (24 способа), он бьёт 5 клеток, и чёрный король может стоять на оставшихся $58 = (64 - 1 - 5)$ клетках;

3) наконец, если белый король стоит не на краю шахматной доски (36 способов), он бьёт 8 клеток, и чёрный король может стоять на оставшихся $55 = (64 - 1 - 9)$ клетках.

Согласно правилам суммы и произведения, общее количество способов поставить белого и чёрного короля, не бьющих друг друга, равняется $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$.

Ответ: 3612.

Задача 42. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове «а» не стоит непосредственно за буквой «м»?

Решение. В этой задаче в подслове «ма» обе буквы «м» и «а» встречаются в исходном слове по два и три раза соответственно. Попробуем посчитать количество слов, в которых есть подслово «ма». Если мы будем решать эту задачу так же, как в предыдущих аналогичных задачах, вводя «ма» как новую «букву», мы получим такую проблему, что не всегда слову, содержащему «м» и «а» друг за другом, мы сможем однозначно поставить в соответствие слово с новой буквой «ма». Как пример — изначальное слово «математика».

Если алфавит слова состоит из 8 букв «м», «а», «т», «е», «т», «и», «к», «а» и одной сдвоенной буквы «ма», то это слово можно прочесть неоднозначно — либо начиная со сдвоенной буквы, либо начиная с разных букв. Строго говоря, неоднозначность возникает тогда, когда подслово «ма» содержится дважды. И слова, содержащие «ма» дважды, с помощью этого метода и подсчитываются дважды ввиду двух способов определения, что из двух вхождений «ма» является сдвоенной буквой, а что — двумя разными буквами.

Таким образом, количество слов с подсловом «ма» равняется количеству слов из девяти букв (со сдвоенной «ма», букв «а» и «т» осталось по 2 штуки, $9!/(2! \cdot 2!) = 90270$ способов) минус количество дважды посчитанных вариантов, в котором букв «ма» две штуки.

Количество слов, в которых подслово «ма» встречает дважды, найдём, введя слова из шести букв: «т», «е», «т», «и», «к», «а» и двух сдвоенных «ма»: $8!/(2!{\cdot}2!)$ (делим ещё раз на 2!, так как сдвоенная буква «ма» также встречается дважды). Итоговое количество слов, в которых содержится подслово «ма», равняется $151200 - (90270 - 10080) = 75150$.

Ответ: 75150.

Задача 43. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, в которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Решение. Решим эту задачу, используя формулу включений-исключений: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$. Упорядочим наш четырёхугольник по часовой стрелке: две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин в зависимости от начальной вершины при проходе по часовой стрелке, теперь будем считать «разными». То есть одной «одинаковой» четвёрке вершин, взятых по часовой стрелке, $Y_1Y_2Y_3Y_4$ за счёт сдвигов соответствуют четыре «разных» четвёрки вершин — $Y_2Y_3Y_4Y_1, Y_3Y_4Y_1Y_2, Y_4Y_1Y_2Y_3$ и исходная $Y_1Y_2Y_3Y_4$. Поэтому полученный ответ нужно будет поделить на 4.

Пусть A — свойство $Y_1Y_2 \parallel Y_3Y_4$, а B — свойство $Y_2Y_3 \parallel Y_1Y_4$. Посчитаем количество четырёхугольников, обладающих свойством A. Для этого заметим, что разных направлений диагоналей в правильном 16-угольнике 16 штук. Это:

1) восемь направлений вида $A_1A_9, A_2A_{10}, \ldots, A_8A_{16}$, причём диагоналей, параллельных каждому направлению этого вида — 7 штук;

2) восемь направлений вида $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_8A_9$, причём диагоналей, параллельных каждому направлению этого вида — 8 штук.

В первом случае количество способов выбрать неупорядоченную четвёрку точек равняется количеству способов выбрать 2 диагонали из 7, $C_7^2 = 21$. Во втором случае — $C_8^2 = 28$. По правилу суммы, параллельные диагонали должны быть параллельны одному из существующих направлений (16 случаев), и всего неупорядоченных четвёрок будет $8 \cdot \cdot (21+28) = 392$. Если четвёрки упорядочить выбором первой вершины, получим $392 \cdot 4 = 1568$ упорядоченных по часовой стрелке четвёрок.

Свойством B обладает то же число четверок, 1568.

Необходимо выяснить, сколько четвёрок обладает хотя бы одним из данных свойств, для этого применим формулу включений и исключений: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 3136 - m(A \cap B)$.

Осталось узнать, сколько четырёхугольников обладает свойством «обе пары сторон параллельны». С учётом того, что правильный 16-угольник вписан в окружность, указанная четвёрка точек также будет вписана в окружность. Параллелограммы, вписанные в окружность суть прямоугольники. Количество прямоугольников посчитаем аналогично примеру: 16 — это четырёхугольники, диагонали которых являются диаметрами. Количество способов выбрать 2 диаметра из 8: $C_8^2 = 28$, с учетом упорядочивания, $28 \cdot 4 = 112$. Получаем:

$$m(A \cup B) = 3136 - m(A \cap B) = 3136 - 112 = 3024.$$

Итоговый ответ, в силу неупорядоченности четвёрок точек, в 4 раза меньше написанного: 756 четвёрок.

Ответ: 756.

Задачи для факультативной работы

Задача 44. На шахматной доске «вырыли яму» в клетке
а) $a1$;
б) $c3$.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи так, чтобы они «не били» друг друга, если на клетку с ямой ставить ладью нельзя, и две ладьи, стоящие в одной вертикали/горизонтали «через яму» друг друга «не бьют»?

Решение. В пункте а) нет той проблемы, что две ладьи стояли на одной вертикали или горизонтали и после того, как между ними вырыли яму, перестали бить друг друга, так как яма находится с краю доски. Поэтому здесь из общего количества способов расставить две не бьющих ладьи, нужно отнять количество способов, в которых одна из ладей изначально стояла на клетке $a1$. Общее количество способов считается следующим образом: первую ладью можно поставить 64-ю способами, на любую клетку. Вторую ладью можно поставить на 49 клеток, которые не бьёт первая ладья. С учётом того, что ладьи одинаковые, получаем

$$\frac{64 \cdot 49}{2} = 1568.$$

Если же одна ладья стояла на клетке $a1$, то другая ладья, её не бьющая, стояла на одной из 49 оставшихся клеток, поэтому необходимо вычесть 49 способов. Проведя вычитание, получим ответ: 1519 способов.

Замечание. Важно, что мы при подсчёте «лишних» вариантов не умножаем и не делим их количество, 49 на два (хоть и ладьи «одинаковые»).

Поделить на 2 мы не сможем как минимум потому, что получим нецелое число в качестве ответа на вопрос о «количестве способов». Однако здесь нам «повезло» с четностью — была бы доска 7×7 вместо доски 8×8, вместо числа 49 в этом месте было бы число 36, которое уже на два делится. Поэтому объясним, почему на два делить здесь не нужно, с помощью комбинаторики.

В отличие от исходного подсчета ладей здесь каждый вариант считаем не дважды, а единожды — одна (первая при подсчете) ладья стоит в клетке $a1$, вторая — не стоит. Поменяться и быть учтёнными дважды при нашем подсчёте они не смогут.

Умножение же на два соответствовало бы тому, что ладьи считаются разными: способы «белая ладья стоит на $a1$» и «черная ладья стоит на $a1$» считались бы по отдельности, складывались и количество «лишних» способов равнялось бы $49+49 = 49 \cdot 2 = 98$, что и соответствовало бы нетребуемому умножению на два.

В пункте б) уже есть проблема, что две ладьи стояли на одной вертикали или горизонтали и после того, как между ними вырыли яму, перестали бить друг друга, так как яма находится не скраю доски. Для начала, посчитаем количество способов расставить две ладьи так, чтобы они не били друг друга, если клетка $c3$ существует. Аналогично предыдущему пункты получаем, что это количество равняется

$$\frac{64 \cdot 49}{2} = 1568.$$

Однако, в этом ответе некоторое количество вариантов являются лишними, а некоторые, наоборот, не посчитаны. Не учтёнными являются варианты, когда две ладьи стоят в третьей строке или в третьем столбце, причем клетка $c3$ стоит между ними. Они били друг друга, пока клетка $c3$ была без ямы, и не учитывались при подсчете. Теперь — не бьют. Если эти ладьи стоят в третьей строке, то у ладьи, стоящей слева от $c3$, 2 способа расположения. У ладьи, стоящей справа от $c3$, 5 способов расположения. Итого $2 \cdot 5 = 10$ способов по третьей строке, ещё 10 — по третьему столбцу, итого 20 способов являются неучтёнными. Лишними являются варианты, когда одна из ладей стоит в клетке с ямой. Тогда вторая ладья стоит в одной из 49 клеток, которые «не бьёт» эта ладья, таким образом, количество лишних способов — 49. Получаем ответ: $1568 - 49 + 20 = 1539$ способов.

Замечание. Когда мы добавляли неучтённые варианты, они уже были упорядочены по способу подсчета — из двух одинаковых ладей одна была «левой», другая «правой», и также деление на два не требовалось.

Ответ: а) 1519; б) 1539.

Задача 45. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух ферзей так, чтобы они не били друг друга?

Указание. Иногда гораздо быстрее будет не «стрелять» из пушки по воробьям, пытаясь разделить все варианты и посчитать их с помощью строго применения правил произведения и суммы, а поставить в каждой клетке шахматной доски количество клеток, бьющих ферзя, стоящих в данной, найти закономерность и полученные числа сложить.

Задача 46. Сколькими способами можно разделить 12 школьников на 4 а) разных; б) одинаковых команды по три человека в каждой?

Указание. Во сколько раз должны отличаться ответы в этих задачах?

(в 4! раза)

Ответ: а) 369600; б) 15400.

Задача 47. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математикам», если в полученном слове буква «а» не стоит непосредственно за буквой «м»?

Указание. Эта задача предполагает использование формулы включений-исключений для трёх множеств.

Задача 48. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, в которых есть хотя бы один прямой угол.

Указание. Решение аналогично решению задачи **43**.

Занятие «Оценка+пример»

Задачи с указаниями и решениями

Задача 49. Каково наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на 990?

Решение. Поскольку в разложение числа 990 на простые множители входит число 11, то n не меньше 11. С другой стороны, $n = 11$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 11.

Задача 50. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нём меньше 50%, но больше 40%?

Решение. Пусть n — число всех участников кружка, а d — число девочек. По условию $0{,}4n < d < 0{,}5n$. Условие можно переписать в виде $2d < n < 2{,}5d$. Значит, $0{,}5d > 1$, то есть $d > 2$. При $d = 3$ получаем $6 < n < 7{,}5$, и наименьшее n равно 7.

Ответ: 7 человек.

Задача 51. Несколько камней вместе весят 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трёхтонок можно гарантированно увезти этот груз за один раз?

Указание. Четырёх трёхтонок не хватит, если будет 13 камней по $\frac{10}{13}$ т. Пяти трёхтонок гарантированно хватит, так как на одной трёхтонке можно увезти не менее 2 т камней.

Ответ: на 5 трёхтонках.

Задача 52. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 50 боксёров. Какое наименьшее количество боёв надо провести, чтобы выявить победителя?

Решение. После каждого боя из соревнований выбывает один боксёр — проигравший в этом бою. Поскольку всего к концу соревнований выбыть должны все, кроме победителя, всего должно быть 49 боёв, независимо от того, как составляется расписание.

Ответ: 49 боёв.

Задача 53. Какое наибольшее количество ладей/королей/слонов/коней, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8?

Указание. Посмотрите, сколько фигур можно поставить на одну горизонталь/в квадрат 2×2 клетки/на одну диагональ/в прямоугольник 2×4 клетки.

Ответ: 8/16/14/32.

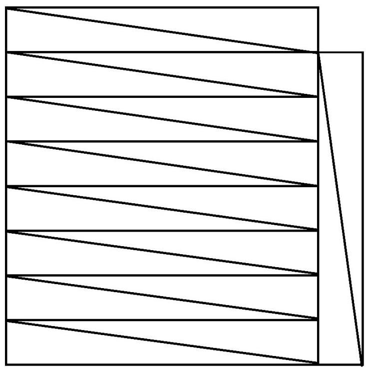
Задача 54. Числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ разбили на 50 пар, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих пятидесяти сумм может делиться на 20?

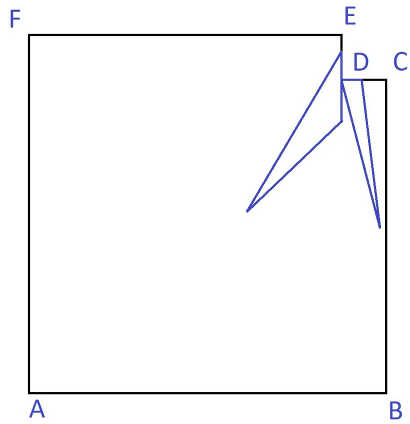
Указание. То, что суммы чисел во всех парах не могут делиться на 20, можно доказать по-другому. Для этого достаточно рассмотреть числа 20, 40, 60, 80 и 100 и заметить, что если в какую-то пару входит ровно одно число из этих пяти, то сумма чисел пары не может делиться на 20. Но этих чисел нечётное количество, поэтому найдется пара ровно с одним из этих чисел.

Ответ: 49.

Задача 55. Из шахматной доски вырезали одну угловую клетку. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать эту фигуру?

Решение. Снизу на левом рисунке показано, как разрезать данную фигуру на 18 равновеликих треугольников. Докажем, что это число — максимально возможное. Примем за единицу площадь одной клетки. Данная фигура представляет собой невыпуклый шестиугольник $ABCDEF$ площади 63 с углом 270° в вершине D (правый нижний рисунок). Если мы имеем разбиение фигуры на треугольники, то очевидно, что точка D должна принадлежать по крайней мере двум треугольникам, причём у одного из них сторона лежит на прямой DE, а у другого — на DC. Более того, по крайней мере для одного из них она лежит на соответствующем отрезке. Для определённости предположим, что это треугольник DKL, причем K лежит на DC. Тогда основание DK этого треугольника не больше $DC = 1$, а высота — не больше $BC = 7$. Поэтому площадь треугольника DKL не больше 3,5. По условию мы имеем разбиение данной фигуры на равновеликие треугольники. Поскольку площадь одного треугольника не больше 3,5, то всего треугольников не меньше 18.





Ответ: 18.

Задача 56. Вася задумал многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Петя может спросить у Васи, какое значение многочлен принимает в некоторой натуральной точке. За какое наименьшее количество вопросов Петя гарантированно сможет угадать многочлен, задуманный Васей?

Решение. За один вопрос Петя не сможет угадать многочлен. Действительно, пусть он спросил значение многочлена в некоторой точке $x = a$ и получил ответ: «$P(a) = a^2$». Но тогда Вася мог задумать многочлен $P(x) = x^2$ или, например, $P(x) = ax$. Покажем, как за два вопроса Петя сможет угадать многочлен. Задав первый вопрос, он должен узнать $P(1)$. Таким образом, он узнает сумму коэффициентов $P(x)$. Пусть $P(1)$ — k-значное число. Так как все коэффициенты $P(x)$ — целые неотрицательные числа, то каждый коэффициент — не более чем k-значное число. Тогда следующим вопросом ему достаточно узнать число $P(10^{2k})$: коэффициенты будут числами, расположенными соответственно в разрядах с 1 по $2k$, с $2k + 1$ по $4k$ и так далее.

Ответ: За два вопроса.

Задача 57. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Решение. Самый сильный обязательно станет призёром. Покажем, что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки $1 - 2$, $3 - 4$, $\ldots$, $99 - 100$, во втором — $100 - 1$, $2 - 3$, $\ldots$, $98 - 99$. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

Ответ: 1 призёр.

Задача 58. В ящике лежат шары трёх цветов: красного, синего и зелёного, причём шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

Решение. Заметим, что суммарное количество синих и зелёных шаров не больше 9 — в противном случае нашлись бы 10 шаров, среди которых нет красного. Аналогично, суммарное количество красных и зелёных шаров не больше 19. Так как по условию зелёный шар хотя бы один, а суммарное количество синих и зелёных шаров не больше 9, то синих шаров не больше 8. Теперь из того, что синих шаров не больше 8, а красных и зелёных шаров не больше 19, следует, что суммарное количество шаров не превосходит 27. Если же в коробке 1 зелёный, 8 синих и 18 красных шаров, то условие задачи выполняется.

Ответ: 27 шаров.

Задача 59. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1+a, 1+a^2, 1+a^3, \ldots, 1+a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что каждые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Решение. Заметим, что если k нечётно, то число $1 + a^{nk}$ делится на $1 + a^n$. Каждое из чисел $1, 2, \ldots, 15$ имеет один из видов k, $2k$, $4k$, $8k$, где k нечётно. Таким образом, каждое из выписанных чисел делится либо на $1+a$, либо на $1+a^2$, либо на $1+a^4$, либо на $1+a^8$. Поэтому если мы возьмём хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два кратных одному и тому же числу, большему 1. Значит, они не будут взаимно просты. Итак, остается не более четырёх чисел. Если $a = 2$, то можно оставить числа $1 + 2 = 3$, $1 + 2^2 = 5$, $1 + 2^4 = 17$ и $1 + 2^8 = 257$. Все они попарно взаимно просты.

Ответ: 4 числа.

Задача 60. В компании «Рога и Копыта» 100 акционеров и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом акций может владеть один акционер?

Решение. Пусть M — акционер, владеющий наибольшим процентом акций, и у него x% акций. Разобьём остальных 99 акционеров на три группы A, B и C по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a, b и c процентами акций. Тогда $2(100-x) = 2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+$ $+(c+a) \geqslant 50+50+50$, откуда $x \leqslant 25$. Если же каждый из 99 акционеров, кроме M, владеет $\frac{75}{99}$% акций, то любые 66 из них без M владеют ровно 50%, а любые 66, включая M, владеют более 50%, при этом у M 25% акций.

Ответ: 25%.

Задача 61*. Сумма пяти натуральных чисел равна 1881. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

Решение. Пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ — натуральные числа, сумма которых равна 1881, и $N = \text{НОК}(a, b, c, d, e)$. Заметим, что все числа равны быть не могут, так как 1881 не делится на 5. Тогда ясно, что $2a \leqslant N$ (так как $a < N$ и $N \,\vdots\, a$), $b \leqslant N$, $c \leqslant N$, $d \leqslant N$, $e \leqslant N$. Умножая первое неравенство на $\frac{1}{2}$ и складывая с остальными, получим

$$a+b+c+d+e \leqslant \frac{9}{2}N, \Rightarrow N \geqslant \frac{2}{9}(a+b+c+d+e) = 418.$$

Значение $N = 418$ можно получить, взяв $a = \frac{1881}{9} = 209$, $b = c = d =$ $= e = 2a = 418$.

Ответ: 418.

Задача 62*. Какое наименьшее число попарно непересекающихся кругов, не содержащих данную точку O, можно расположить на плоскости так, чтобы любой луч, выходящий из точки O, пересекал не менее трёх из них?

Решение. Разобьём полный угол с вершиной в данной точке на 7 равных углов (далее они называются секторами). Рассмотрим угол, составленный из трёх соседних секторов, и впишем в него круг. Рассмотрим далее угол, составленный из трёх следующих секторов, и тоже впишем в него круг. Проделаем это построение 7 раз, следя за тем, чтобы каждый следующий круг не пересекался с предыдущими (для этого, например, его можно выбирать значительно больших размеров, чем предыдущие). Так как каждый сектор входит в три из семи построенных углов, лучи, входящие в него, пересекают 3 соответствующих круга. Докажем, что шестью кругами обойтись нельзя. Пусть имеется 6 кругов, не содержащих данную точку O. Рассмотрим окружность с центром в точке O, не пересекающую этих кругов. Для каждого круга рассмотрим на окружности дугу, высеченную касательными к нему, проведёнными из точки O. Заметим, что луч с началом в точке O пересекает круг тогда и только тогда, когда точка пересечения этого луча с построенной окружностью принадлежит соответствующей дуге. Значит, луч пересекает три круга тогда и только тогда, когда точка его пересечения с окружностью принадлежит сразу трём дугам. Но каждая дуга меньше 180°. В сумме они дают меньше $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$, а значит, не могут покрыть окружность в три слоя. Поэтому найдётся точка на окружности, принадлежащая не более, чем двум дугам. Соответствующий луч пересекает не более двух кругов.

Ответ: 7 кругов.

Задачи для факультативной работы

Задача 63. Каково наименьшее натуральное n такое, что $n!$ делится на 18, на 19, на 20 и на 21?

Решение. Так как число 19 простое, то $n \geqslant 19$. Осталось заметить, что $19!$ делится на 18, на 19, на 20 $(20 = 5 \cdot 4)$ и на 21 $(21 = 7 \cdot 3)$.

Ответ: 19.

Задача 64. Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Решение. Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Можно считать, что первая лампочка — красная. Поскольку рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трёх последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем $\frac{48}{3} = 16$. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут. Итак, синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17. Такой случай возможен: если лампочки с номерами $2, 5, 8, 11, \ldots, 50$ — синие, а остальные — красные, то в гирлянде 33 красные лампочки.

Ответ: 33 лампочки.

Задача 65. За круглый стол сели 12 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть лжец». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть рыцарь»?

Решение. Заметим, что два лжеца не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой лжец не может сказать вторую фразу. С другой стороны, 3 рыцаря также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-лжец). Значит, среди любых трёх сидящих подряд есть лжец, то есть не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая всех на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4 \cdot 2 = 8$ человек могли сказать вторую фразу. Ровно 8 (рыцарей) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: ЛРРЛРРЛРРЛРР.

Ответ: 8.

Задача 66. Имеется 9 карточек с числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Решение. Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед — карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краёв, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно. Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: $9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5$.

Ответ: 8.

Задача 67. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?

Решение. Заметим, что произведение двух чисел делится на квадрат их наибольшего общего делителя (НОД). Но максимальный квадрат, на который может делиться число 600 — это 100. Поэтому НОД не может быть больше 10. Если же, например, $a = 60$, $b = 10$, то их произведение равно 600, а НОД равен 10.

Ответ: 10.

Задача 68. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

Решение. Пусть A и B — люди, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами, соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу, A — рыцарь, а B — лжец. Поэтому ни один из них не мог произнести вторую фразу. Следовательно, $k \leqslant 2013$. Ситуация, когда оставшиеся 2013 человек смогут сказать вторую фразу, возможна. Пусть сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 2015$. При этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные — лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую — все, кроме людей с карточками 1 и 2015.

Ответ: при $k = 2013$.

Задача 69. На полке стоят 666 книг по чёрной и белой магии, причем никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (то есть между ними не может стоять 13 книг) Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

Решение. Разобьём книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я, ...; 2-я, 16-я, ...; ...; 14-я, 28-я, ... Из того, что $666 = 14 \cdot \cdot 47 + 8 = (8 + 6) \cdot 47 + 8$, следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 цепочек по 47 книг. По условию в каждой из цепочек книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 (а таких цепочек восемь) их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 (а таких цепочек шесть) их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего $(8 + 6) \cdot 24 = 14 \cdot 24 = 336$ книг.

Ответ: 336.

Задача 70. Обозначим через $P(x)$ произведение цифр числа x. В ряд выписаны числа $P(2003)$, $P(2004)$, $P(2005)$, ... Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, могут оказаться последовательными натуральными числами?

Решение. Заметим, что $P(10m) = 0$, то есть по крайней мере каждое десятое из выписанных чисел равно 0. Отсюда следует, что в этом ряду может встретиться не более 9 записанных подряд чисел, отличных от 0. Покажем, что они могут быть последовательными натуральными. Такими числами будут, например, $P(11111) = 1$, $P(11112) = 2$, ..., $P(11119) = 9$.

Ответ: 9.

Задача 71. На доске написано несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Решение. Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a — число с минимальным модулем. Из остальных трёх чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их b и c, тогда $bc = |bc| \geqslant a^2$, что противоречит условию. Осталось привести пример трёх чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа 1, 2, -3.

Ответ: 3 числа.

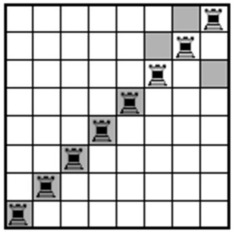
Задача 72. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит фишку в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую фишку на какую-то клетку, либо переставить фишку из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда фишка попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается. Ставить фишку на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество фишек потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

Решение. Покажем, что n фишек достаточно. Для этого заметим, что на каждую строку хватит одной фишки: можно поставить её в клетку строки с минимальным номером, а затем обойти все клетки строки в порядке возрастания номеров.

С другой стороны, покажем, что меньше, чем n фишек, может и не хватить. Для этого пронумеруем клетки так, чтобы клетки одной диагонали имели номера $1, 2, 3, \ldots, n$ (остальные клетки нумеруем произвольно). Тогда одна фишка не сможет побывать на двух клетках этой диагонали: если фишка встала на одну из этих клеток, то следующим ходом она обязана будет пойти на клетку с номером, большим n, и значит, после этого она не сможет вернуться на диагональ. Наконец, поскольку на каждой клетке диагонали должна побывать фишка, Пете придется использовать не менее n фишек.

Ответ: n.

Задача 73. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат на одной строке или на одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (то есть 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает. Иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?



Решение. Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие на тех же строках, что и A и B соответственно, и на тех же столбцах, что и B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало четным, и Петя выиграл.

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рисунке. Тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

Ответ: за 2 хода.

Задача 74. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписано $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоит хотя бы $x^2+(50-x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2 = 2x^2-100x+50^2 = 2(x-25)^2+2\cdot 25^2 \geqslant 2\cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500-1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, 1+\sqrt{2}, 2+ +\sqrt{2}, \ldots, 25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 50, 26- -\sqrt{2}, \ldots, 50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2\cdot 25^2 = 1250$ сумм рационального и иррационального чисел.

Ответ: 1250 сумм.

Задача 75. На доске написаны пять ненулевых чисел. К ним дописаны ещё пять чисел, получаемых следующим образом: из квадрата каждого из исходных чисел вычитается сумма четырёх остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех десяти чисел на доске?

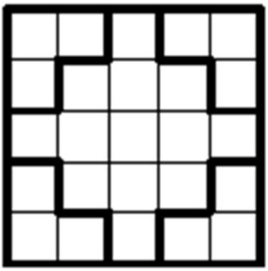
Решение. Если все пять исходных чисел отрицательны, то все пять новых чисел будут положительными, как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. Всего получится пять отрицательных чисел.

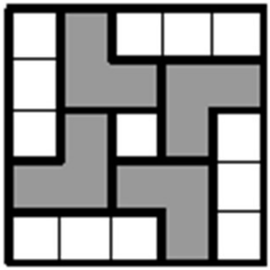
Пусть теперь среди пяти исходных чисел a, b, c, d, e есть положительное, например, $e > 0$. Рассмотрим пять чисел: $a, b, c, d, e^2-(a+b+c+d)$. Их сумма равна $e^2 > 0$. Значит, среди этих чисел должно быть по крайней мере ещё одно положительное, отличное от числа e, и поэтому отрицательных чисел не больше восьми. Покажем, что восемь отрицательных чисел среди десяти написанных на доске могло быть. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a = b = c = = d = -1, e = 10$. Тогда среди пяти дописанных чисел будут четыре отрицательных числа, равных -6, и одно положительное число 104.

Ответ: 8 чисел.

Задача 76. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя (закрашенные уголки не должны перекрываться)?

Решение. Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рисунке слева. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не менее 4 уголков. На рисунке справа показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.





Ответ: 4.

Задача 77. Назовём число, большее 25, полупростым, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

Решение. Заметим, что нечётное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечётного простого числа. Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n + 1$, $2n + 3$ и $2n + 5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно.

Предполагая противное, получаем, что числа $2n - 1$, $2n + 1$ и $2n + 3$ — простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие.

Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечётных числа. Значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми. Например, $30 = 17 + 13$, $31 = 29 + 2$, $32 = 19 + 13$, $33 = 31 + 2$, $34 = 23 + 11$.

Ответ: 5.

Задача 78. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

Решение. Пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ — данные числа. Из условия следует, что $b+c+d < a$. Но $a \leqslant b$, значит, $b+c+d < a \leqslant b$, откуда следует, что $c+d < 0$. Значит, по крайней мере одно из двух самых больших чисел, написанных на доске, отрицательно. Следовательно, отрицательных чисел не меньше трёх. Пример чисел $-5, -4, -3, 1$ показывает, что одно из чисел может быть положительным.

Ответ: 3 отрицательных числа.

Задача 79. На шахматной доске расставили n белых и n чёрных ладей так, чтобы ладьи разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее возможное значение n.

Решение. Докажем, что при $n > 16$ осуществить указанную расстановку невозможно. Заметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали могут располагаться ладьи только одного цвета (либо она может оказаться свободной от ладей). Будем обозначать горизонталь (вертикаль) тем же цветом, что и цвет ладей, стоящих на ней. Так как ладей больше 16, то белых горизонталей не меньше трёх. Если белых горизонталей ровно три, то в одной из них — не менее 6 ладей, то есть белых вертикалей не менее шести, а чёрных — не больше двух. Это, как показано выше, невозможно. Итак, белых горизонталей — не меньше четырёх, значит, чёрных — не больше четырёх. То же верно и для чёрных вертикалей. Следовательно, чёрных ладей не больше 16. Противоречие.

Пример возможной расстановки при $n = 16$ можно получить, поставив 16 белых ладей в левый нижний квадрат доски размером 4×4, а 16 чёрных — в правый верхний.

Ответ: 16.

Задача 80. На доске написано выражение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4. Если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

Решение. Первый способ. Пусть значение исходного выражения равно A. Тогда в результате первой операции произведение примет значение $\frac{a+1}{a}A = A + 3$, откуда $A = 3a$. Значит, A — натуральное число. Кроме того, из этого равенства следует, что оно делится на 3. Аналогично доказывается, что число A делится на 4 и на 5, причём $A = 4c = 5e$. Из попарной взаимной простоты чисел 3, 4 и 5 следует, что A делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Значит, $A \geqslant 60$. Перепишем

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{A}{3b} \cdot \frac{A}{4d} \cdot \frac{A}{5f} = A,$$

получаем $A^2 = 60bdf$, откуда $bdf = \frac{A^2}{60} \geqslant 60$. Осталось привести пример, показывающий, что произведение знаменателей может быть равным 60. Один из возможных примеров такой: $\frac{20}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5}$.

Второй способ. Как и в первом решении, получаем $A = 3a = 4c = 5e$, откуда

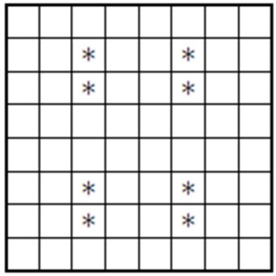
$$\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 3, \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{e}{f} = 4, \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{f} = 5.$$

Умножив первое равенство на второе и разделив на третье, получаем, что $\frac{e^2}{bdf} = \frac{12}{5}$; поскольку дробь справа несократима, знаменатель bdf делится на 5. Аналогично доказывается, что он делится на 3 и на 4, откуда следует, что он делится на 60, то есть не меньше 60.

Ответ: 60.

Задача 81. Вася придумал новый корабль для морского боя — «боевой бублик». Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 8×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

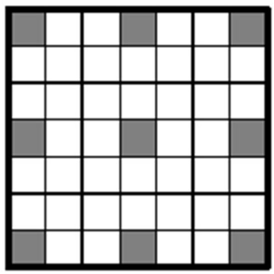
Решение. Заметим, что если бублик размещён на поле 4×4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведён в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещен рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведён в одну из четырёх центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещён так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить.



Разбив поле 8×8 на четыре квадрата 4×4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов. Если же сделать 8 выстрелов так, как показано на рисунке, то мы гарантированно раним бублик.

Ответ: 8 выстрелов.

Задача 82. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?



Решение. Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами. Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо (если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней к ней стоит рыцарь. При этом ни у какой пары отмеченных клеток нет общих соседей. Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9.

Ответ: 9.

Занятие «Теория чисел»

Основная теорема арифметики

Теорема. Любое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых множителей единственным образом с точностью до порядка.

Задача 83. Может ли число $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

Решение. Заметим, что при $n \leqslant 24$ в разложение на простые множители числа $n!$ входит не более 4 пятёрок, и, следовательно, оно оканчивается не более чем на 4 нуля, а при $n \geqslant 25$ в разложение на простые множители числа $n!$ входит не менее 6 пятёрок и не менее 6 двоек, и, следовательно, оно оканчивается не менее чем на 6 нулей. Таким образом, число $n!$ не может оканчиваться ровно на 5 нулей.

Ответ: нет, не может.

Задача 84. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 120.

Решение. Заметим, что хотя бы одно из пяти последовательных чисел делится на 3, хотя бы одно из пяти последовательных чисел делится на 4 и хотя бы одно из пяти последовательных чисел делится на 5. Так как помимо числа, делящегося на 4, среди пяти последовательных чисел есть ещё хотя бы одно число, делящееся на 2, то в разложение на простые множители произведения пяти последовательных чисел двойка входит хотя бы в третьей степени, то есть оно делится на 8. Так как 3, 5 и 8 — попарно взаимно простые числа, то произведение делится и на $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

Задача 85. Найдутся ли какие-нибудь 4 натуральных числа такие, чтобы среди наибольших общих делителей пар встретились 6 последовательных чисел?

Решение. Рассмотрим делимость на 3. Заметим, что из шести последовательных натуральных чисел ровно два делятся на 3 и что наибольший общий делитель двух чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих двух чисел делится на 3. Таким образом, получаем, что если из четырёх чисел не более двух делится на 3, то не более одного общего делителя делится на 3. Если же из четырёх чисел на 3 делится хотя бы три числа, то хотя бы три наибольших общих делителя делятся на три. Мы получаем, что хотя бы ровно два наибольших общих делителя на 3 делиться не могут, то есть среди пар наибольших общих делителей не могут быть шесть последовательных чисел.

Ответ: нет, не найдутся.

Задача 86. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

Решение. Докажем от противного. Предположим, что a^2 не делится на b. Тогда некоторый простой множитель p в разложение числа a^2 входит в степени, меньшей, чем в разложении b. Пусть он входит в разложение числа a в степени k, а в разложение числа b в степени l. Тогда $2k < l$. Так как a^{21} делится на b^{10}, то $21k \geqslant 10l$. Таким образом, мы получаем, что $20k < 10l \leqslant 21k$. Так как числа $20k$ и $10l$ делятся на 10, то $21k - 20k \geqslant 10$, то есть $k \geqslant 10$. Но тогда $a \geqslant p^{10} \geqslant 2^{10} > 1000$. Противоречие.

Признаки делимости

Обозначение. Число из $n+1$ цифры, в котором первая цифра равна a_n, вторая — $a_{n-1}, \ldots$, последняя — a_0 будем обозначать $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$.

Число делится на 2, если его последняя цифра делится на 2 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ делится на 2, если a_0 делится на 2).

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3 ($\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ делится на 3, если $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ делится на 3).

Число делится на 4, если число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 4, если $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4).

Число делится на 5, если его последняя цифра делится на 5 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ делится на 5, если a_0 делится на 5).

Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 6, если a_0 делится на 2 и $a_n + \ldots + a_0$ делится на 3).

Число делится на 7, если знакопеременная сумма чисел, образованных тройками его цифр, делится на 7 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 7, если $\overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - \ldots$ делится на 7).

Число делится на 8, если число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8 ($\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 8, если $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8).

Число делится на 9, если его сумма цифр делится на 9 ($\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ делится на 9, если $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ делится на 9).

Число делится на 10, если его последняя цифра 0.

Число делится на 11, если его знакопеременная сумма цифр делится на 11.

Число делится на 12, если оно делится на 3 и делится на 4.

Вопрос. Почему не является верным следующий признак делимости на 12: число делится на 12, если оно делится на 6 и на 2?

Замечание. Если в признаке делимости на 7 количество цифр в числе не делится на 3, то можно считать, что перед первой цифрой числа написано несколько нулей.

Замечание. В словесной формулировке признаков деления на 7 и на 11 есть неоднозначность — можно брать сумму $a_0 - a_1 + a_2 + \ldots$ (для деления на 11: $\overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - \ldots$), а можно — $-a_0 + a_1 - a_2 + \ldots$ (для деления на 11: $-\overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_6 a_5 a_4} - \overline{a_9 a_8 a_7} + \ldots$). Пока договоримся, что будем брать сумму, в которую a_0 входит со знаком «+». В следующем разделе будет объяснено, почему.

Задача 87. Найдите все трёхзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

Решение. По признаку делимости на 11, если число $\overline{abc}$ делится на 11, то $a - b + c$ делится на 11. С другой стороны, по условию, $a + b + c$ делится на 11. Значит, и $a + b + c - (a - b + c) = 2b$ делится на 11, то есть b делится на 11. Так как a, b, c — однозначные, то $0 \leqslant b < 10$

и $a + c \leqslant 18$, следовательно, $b = 0$ и $a + c = 11$. Отсюда перебором получаем ответ к задаче: 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.

Ответ: 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.

Задача 88. Докажите, что если натуральное число делится на 99, то его сумма цифр больше либо равна 18.

Решение. Если число делится на 99, то оно делится на 9 и на 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на нечётных местах в записи как a, а стоящих на чётных — как b (заметим, что a и b неотрицательны и хотя бы одно из них не равно 0). По признаку делимости на 9 сумма цифр числа из условия делится на 9, то есть или равна 9, или больше или равна 18 (сумма цифр натурального числа не может равняться 0). Теперь достаточно доказать, что $a + b \neq 9$. По признаку делимости на 11 разность $a - b$ делится на 11. Разберём два случая: 1) если $a - b = 0$, то $a = b$, следовательно, $a + b$ чётно, а значит, не равно 9;
2) если $a - b \neq 0$, то $|a - b| \geqslant 11$.

Следовательно, или $a > 11$, или $b > 11$, значит, $a + b \neq 9$.

Остатки

Определение. Целое число N имеет остаток r при делении на целое ненулевое m, если $N = km + r$, где $0 \leqslant r < m$.

Обозначение. Если x и y имеют одинаковые остатки при делении на n, будем писать $x \equiv y \pmod{n}$.

Утверждение. Сумма любых двух чисел и сумма их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m (если $a \equiv c \pmod{n}$ и $b \equiv d \pmod{n}$, то $a + b \equiv c + d \pmod{n}$).

Утверждение. Произведение любых двух чисел и произведение их остатков при делении на m имеют одинаковые остатки при делении на m (если $a \equiv c \pmod{n}$, и $b \equiv d \pmod{n}$, то $ab \equiv cd \pmod{n}$).

Задача 89. Какой остаток имеет число 2^{100} при делении на 9?

Решение. Рассмотрим, какие остатки имеет степень двойки при делении на 9: $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 = 16 \equiv 7, 2^5 = 2^4 \cdot 2 \equiv 7 \cdot 2 =$

$= 14 \equiv 5, 2^5 \equiv 2^4{\cdot}2 \equiv 5{\cdot}2 = 10 \equiv 1, 2^6 \equiv 2^5{\cdot}2 \equiv 1{\cdot}2 \equiv 2$. Так как остаток каждой следующей степени однозначно определяется остатком предыдущей, то последовательность остатков зациклится. Иными словами, в ней будут чередоваться остатки $2, 4, 8, 7, 5, 1$. Осталось понять, какое число будет сотым в этой последовательности. $100 : 6 = 16$ (остаток 4), что дает 16 полных циклов и еще 4 числа. Значит, сотым будет число 7.

Ответ: 7.

Замечание. Ту же последовательность остатков можно получить более простыми подсчетами, если заметить, что $2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$. Тогда $2^4 \equiv -1 \cdot 2 = -2 \equiv 7, 2^5 \equiv -2 \cdot 2 = -4 \equiv 5, 2^6 \equiv -4 \cdot 2 = -8 \equiv$ $\equiv -(-1) \equiv 1$.

Задача 90. Какой остаток имеет число $30^{2017} + 63^{2018}$ при делении на 31?

Решение. Заметим, что: 1) $30^{2017} \equiv (-1)^{2017} \equiv -1 \pmod{30}$;

2) $63^{2018} \equiv 1^{2018} \equiv 1 \pmod{31}$.

Следовательно, $30^{2017} + 63^{2018} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Ответ: 0.

Теперь мы можем доказывать признаки делимости. Более того, про сформулировнные признаки делимости на простые числа докажем более сильный факт: остаток от числа, который мы получаем в результате вычислений равен остатку от деления числа, которое мы проверяли.

На 2: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0} = \overline{a_n \ldots a_1 0} + a_0 \equiv 0 + a_0 \pmod 2$.

На 3: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + \ldots + 10 a_1 + a_0 \equiv 1^n a_n + \ldots + 1 a_1 + a_0 \equiv$ $\equiv a_n + \ldots + a_0 \pmod 3$.

На 4: $\overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n \ldots a_2 00} + \overline{a_2 a_1} \equiv 0 + \overline{a_2 a_1} \pmod 4$.

На 7: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0} = \overline{a_2 a_1 a_0} + 1000\overline{a_5 a_4 a_3} + 1000^2\overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} -$ $- \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots \pmod 7$ (здесь мы воспользовались тем, что 1001 делится на 7, то есть $1000 \equiv -1 \pmod 7$).

На 11: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv (-1)^n a_n + \ldots + (-a_1) + a_0 \pmod{11}$.

Упражнение. Докажите признаки делимости на 8, 9 и 13.

Указание. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Задача 91. На доске написано число. Каждую минуту к нему справа приписывают цифру 7. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

Решение. Докажем, что когда-нибудь наше число будет делиться на 3. Для этого достаточно показать, что его сумма цифр будет делиться на 3. Пусть сумма цифр нашего числа равна x, тогда через минуту она будет равна $x + 7 \equiv x + 1 \pmod 3$, а через n минут — $x + 7n \equiv x + n \pmod 3$. Значит, в этой последовательности будет бесконечное количество чисел, делящихся на 3. Так как каждое следующее число больше предыдущего, то все они не могут быть равны 3, и среди них будут составные числа.

Замечание. Мы не могли ограничиться первыми тремя числами. Одно из них точно делится на 3, но может быть равно 3, то есть быть простым.

Задача 92. Пусть $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 4. Докажите также, что x или y делится на 4.

Решение. Перебором остатков убеждаемся, что полный квадрат даёт остаток 0, 1 или 4 от деления на 8, причём полный квадрат нечётного числа даёт остаток 1; чётного числа, не делящегося на 4, — остаток 4; числа, делящегося на 4 — остаток 0. Если бы каждое из чисел x и y было нечётным, то z^2 давал бы остаток 2 от деления на 8, что невозможно. Если бы одно из чисел x и y было нечётным, а другое чётным, но не делящимся на 4, то z^2 давал бы остаток 5 от деления на 8, что также невозможно. Таким образом мы доказали, что либо каждое из чисел x и y чётно, либо одно из них делится на 4. Следовательно, xy делится на 4.

Докажем, что x или y делится на 4. В силу показанного выше достаточно проверить, что невозможен случай, когда каждое из чисел x и y является чётным, но не делящимся на 4. Предположим, что это так. Но тогда $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, где x_1, y_1 — нечётные числа. Тогда $x^2+y^2 = 4x_1^2+4y_1^2 = 4(x_1^2+y_1^2) = z^2$. Из последнего равенства следует, что z чётное, то есть $z = 2z_1$, откуда $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. В силу того, что x_1, y_1 — нечётные числа, получаем противоречие.

Замечание. Можно было рассматривать остатки от деления на 16. В этом решении был бы больший перебор, но не пришлось бы отдельно рассматривать случай двух чётных чисел.

Замечание. Типичной ошибкой при решении этой задачи является перебор остатков полных квадратов при делении на 4. Ведь из того, что полный квадрат делится на 4 не следует, что само число делится на 4.

Задача 93. Пусть a, b, c — натуральные числа, причем $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

Решение. Перебором остаков от деления на 3 получаем, что числа a^3 и a дают одинокавый остаток от деления на 3. Аналогично с остатками от деления на 2 (чётностью). Таким образом, числа $a^3+b^3+c^3$ и $a+b+c$ дают одинаковый остаток от деления на 3 и на 2, откуда следует утверждение задачи.

Задача 94. Доказать, что если a^2+b^2 делится на 7, то и ab делится на 7.

Указание. Перебрать остатки от деления на 7.

Указание. Следующие две задачи можно решить с помощью перебора остатков.

Задача 95. Докажите, что n^5+4n делится на 5 при любом натуральном n.

Задача 96. Докажите, что n^4+1 не делится на 3 ни при каком натуральном n.

Задача 97. Найдите p, если известно, что p и $2p^2+1$ — простые числа.

Решение. Перебором остатков от деления на 3 числа p убеждаемся, что одно из чисел p и $2p^2+1$ делится на 3, а так как оно является простым, то равно 3. Если $2p^2+1 = 3$, то $p = 1$ и не является простым. Осталось заметить, что $p = 3$ удовлетворяет условию.

Ответ: $p = 3$.

Задача 98. Решите в натуральных числах уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2017}.$$

Решение. Рассматривая остатки от деления на 4 (правая часть имеет остаток 0, в левой части каждое слагаемое имеет остаток 0 или 1), убеждаемся, что каждое из чисел a, b и c делится на 2. Пусть $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$. Подставляя в исходное уравнение и деля на 4, получаем, что $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^{2015}$. Рассмотрев остатки от деления на 4, получаем, что $a_2 = 2a_1$, $b_2 = 2b_1$, $c_2 = 2c_1$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 2^{2013}$. Продолжая процесс, получаем, что $a_{1008}^2 + b_{1008}^2 + c_{1008}^2 = 2$. Последнее уравнение, очевидно, не имеет решения (так как каждое слагаемое в левой части больше или равно одному). Значит, решений нет и у исходного уравнения.

Ответ: решений нет.

Занятие «Геометрия»

Раздача

Задача 99[7]. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 40°. Найдите угол ABC.

Указание. Достройте треугольник ABC до параллелограмма.

Ответ: $\angle ABC = 110^\circ$.

Задача 100[15]. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K, а стороны AC — в точке T. На меньшей дуге TK выбрана точка P. Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP, вторично пересекает окружность в точке N. Найдите PK, если известно, что $AP = a$ и $KN = b$.

Указание. Используйте дважды свойство хорды и касательной.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задача 101[12]. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O — центр описанной окружности треугольника MKN).

Решение. Пусть KY — касательная к описанной окружности треугольника MKN. Докажем, что $KY \parallel XL$, из чего и будет следовать утверждение задачи. Из условия задачи следует, что треугольники XKL и NKL равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle KXL = \angle KNL$. Используя угол между касательной и хордой и утверждение получим, что $\angle YKX = \angle KNL = \angle KXL$, что и требовалось.

Задача 102[14]. Окружность с центром в точке I вписана в четырехугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω.

Задача 103[1]. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC

расположены точки E и F так, что $CE = \sqrt{2}CF$, $AE = EF = FB$. Найдите угол B.

Решение. Продлим медиану CF за точку F на ее длину и получим точку D. Четырехугольник $CEDB$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Используем «неочевидное свойство» диагоналей параллелограмма, что сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей параллелограмма: $2(\sqrt{2}CF)^2 + 2BC^2 = (2BF)^2 + (2CF)^2$. Значит, $BC^2 = 2CF^2 = \frac{2}{9}AB^2$. Следовательно, $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\cos\angle B = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Задача 104[1]. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Найдите угол ADB.

Решение. Обозначим точку пересечения AD и CE буквой O. Заметим, что CO — высота и биссектриса треугольника ACD, значит, треугольник ACD равнобедренный, следовательно, $AC = \frac{BC}{2}$. Опустим из вершины B треугольника ABC на основание AC медиану BH, $BH = \frac{BC}{4}$. Треугольник ABC равнобедренный, значит, BH — высота треугольника ABC, значит, $\cos\angle BCH = \frac{1}{4}$. Обозначим $\angle BCH$ за 2α. $\angle BDA = 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ - (90^\circ - \angle CDO) = 90^\circ + \alpha$, где $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

Ответ: $90^\circ + \alpha$, где $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

Задача 105[9]. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

Указание. Достройте трапецию до треугольника.

Задача 106[9]. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

Указание. Заметьте, что вокруг четырехугольника $MKCN$ можно описать окружность.

Задача 107. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины соответственно сторон BC и CD. Найти AD, если $AE = 6$, $\angle AFE = 90^\circ$.

Указание. Достройте отрезок AF до пересечения с BC.

Ответ: $AD = 4$.

Задача 108[8]. В параллелограмме $ABCD$ провели высоту DH к стороне AB. Точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $BF = EH$.

Решение. Представим одно из решений. Из условия задачи следует, что $BE = AF$ и $BE \parallel AF$, следовательно, $BEFA$ – параллелограмм и $AB \parallel FE$. Таким образом, $HBEF$ — трапеция. Докажем, что она равнобокая. В прямоугольном треугольнике AHD отрезок HF является медианой, проведенной к гипотенузе, следовательно, $HF = \frac{AD}{2} = AF$ (это свойство медианы следует из свойства диагоналей прямоугольника). Таким образом, $HF = BE$, то есть трапеция $HBEF$ — равнобокая. В равнобокой трапеции диагонали равны, поэтому $BF = HE$. Также можно доказать по другому. Например, можно доказать, что четырехугольник $BEFD$ — параллелограмм и треугольник HED — равнобедренный.

Задача 109[2]. Стороны AB и BC треугольника ABC равны 10 и 12 соответственно, а медиана BM, проведенная к третьей стороне, равна 5. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника, значит, площадь треугольника ABC совпадает с площадью равнобокого треугольника ABD ($AB = BD = 10$). В треугольнике ABD строим высоту BH из вершины B на сторону AD. Треугольник ABH — прямоугольный, по теореме Пифагора вычислим, что $BH = 8$ (треугольник ABH — Египетский!), следовательно, искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 48$

Задача 110[4]. Параллелограмм $ABCD$ такой, что $\operatorname{tg}\angle BCD = \sqrt{15}$. Окружность ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причем $BT = 10$, $AE = 7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности ω.

Указание. Заметьте, что $EBCD$ — равнобокая трапеция. Примените свойство секущих окружности.

Ответ: $S = 28\sqrt{15}$, $R = 4\sqrt{17}/\sqrt{5}$.

Задача 111[2]. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем отношения $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$$

Решение. Соединим точки M и C. Высоты, проведенные из вершины C в треуглььниках MAC и ABC совпадают, значит, $\frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}$. Высоты, проведенные из вершины M треугольников AMN и MAC, следовательно, $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MAC}} = \frac{AN}{AC} = \frac{p}{q}$. Перемножим полученные равенства: $\frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} \cdot \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MAC}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$. Значит, $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.

Задача 112. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и B_2 таким образом, что $AB_1 = B_1B_2 = B_2C$. На стороне AB отмечены точки C_1 и C_2 таким образом, что $AC_1 : C_1C_2 : C_2B = 2 : 2 : 1$. Точка A_1 — середина стороны BC. Найдите площадь пятиугольника $A_1B_2B_1C_1C_2$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S.

Решение. Применим результат предыдущей задачи три раза и получим, что $S_{\triangle C_2BA_1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{10}S$, $S_{\triangle A_1CB_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S$ и $S_{\triangle B_1AC_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}S = \frac{2}{15}S$. Тогда $S_{A_1B_2B_1C_1C_2} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle C_2BA_1} - S_{\triangle A_1CB_2} - S_{\triangle B_1AC_1} = (1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} - \frac{2}{15})S = \frac{3}{5}S$

Ответ: $S_{A_1B_2B_1C_1C_2} = \frac{3}{5}S$.

Задача 113[5]. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°. Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырехугольника

$LPMC$. На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Решение. В треугольнике AB отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x$, $MC = 5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{7}$. Обозначим площадь треугольников ABP и MBP за S_1, площадь треугольника APL за S_2, площадь $LPMC$ за S_4. так как высоты, опущенные из вершины B треугольников ABL и CBL совпадают, то выполняется $\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle CBL}} = \frac{S_1+S_2}{S_1+S_4} = \frac{AL}{LC} = \frac{2}{7}$. Аналогично получаем, что $\frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle CAM}} = \frac{BM}{MC} = \frac{2S_1}{S_2+S_4} = \frac{2}{5}$. Отсюда получаем, что искомое отношение $\frac{S_1}{S_4} = \frac{9}{40}$. Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведенная из вершины A, то $\frac{BP}{PL} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{5}$. Пусть $BP = 9y$, $PL = 5y$. Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BMP получаем, что $\cos\gamma = \frac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL следует, что $\cos\gamma = \frac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для коссинуса, находим, что $x = y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{LPMC}} = \frac{9}{40}$; $\cos\angle CBL = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Задачи с указаниями и решениями

Задача 114[11]. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите $\angle CDB$.

Решение. Так как $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 60^\circ$, то треугольник ABC — равносторонний. Далее представим одно из рассуждений. В треугольнике $ABD : \angle ABD = 40^\circ$, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 100^\circ$, значит, $\angle BDA = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$, значит, этот треугольник равнобедренный. Таким образом, $AB = BC = CA = AD$, поэтому треугольник CAD — также равнобедренный. Тогда $\angle ADC = \angle ACD = (180^\circ - \angle CAD)/2 = 70^\circ$, $\angle CDB = \angle CDA - \angle BDA = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Ответ: $\angle CDB = 30^\circ$.

Задача 115[10]. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

Указание. Опустите перпендикуляр AH из точки A на отрезок MK. Рассмотрите треугольники AMB, AMH, AKH и AKD.

Ответ: $\angle AKD = 75^\circ$

Задача 116[1]. Найдите угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), если медианы AD и CE взаимно перпендикулярны.

Указание. Проведите высоту из вершины B.

Ответ: $\angle B = 2\beta$, где $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$

Задача 117[1]. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC расположены точки D и E так, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle BCE$, $4CD = 3\sqrt{3}CE$. Найдите угол ABC.

Указание. Опустите перпендикуляры из точек E и D на катеты треугольника ABC.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Задача 118[7]. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BD к боковой стороне. На продолжении основания BC выбрана точка E так, что угол EDB — прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

Указание. Продолжите прямую ED до пересечения со стороной AB в точке F. Заметьте, что треугольник EBF является равнобедренным.

Ответ: $BE = 2$.

Задача 119[3]. Четырехугольник, один из углов которого равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{6}$ и описан около окружности радиуса 1. Найдите площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

Указание. Вспомните свойства вписанного в окружность и описанного около окружности четырехугольника. Сведите задачу к решению тригонометрического уравнения.

Ответ: $S = 57$, $\angle = \arcsin \frac{19}{20}$.

Задача 120[6]. В треугольнике ABC проведена медиана BM. MD и ME — биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причем $BP = 2$, $MP = 4$. Найдите отрезок DE.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB, CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

Ответ: $DE = 8$

Задача 121[1]. Биссектриса AE треугольника ABC, в котором $AB = BC$, пересекает высоту BD в точке O, а высота AF пересекает BD в точке K. Найдите отношение $\frac{BK}{KD}$, если $OB = 3OD$.

Указание. Примените свойство биссектрисы для треугольника ABD. Рассмотрите подобие треугольников AKD и BAD.

Ответ: $\frac{BK}{KD} = 7$

Задача 122[8]. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

Указание. Достройте трапецию до треугольника AMD. Рассмотрите треугольник EMD.

Задача 123[10]. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN на стороны CD и AD соответственно, а из вершины D — высоты DP и DQ на стороны BC и AB соответственно. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Указание. Рассмотрите диагонали прямоугольников $BMDQ$ и $BPDN$. Вспомните признак прямоугольника.

Задача 124[8]. В треугольнике ABC отметили произвольную точку D

на медиане BM. Затем через D провели прямую, параллельную AB, а через C — прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке E. Докажите, что $BE = AD$.

Указание. Докажите, что $ABED$ — параллелограмм. Продлите медиану BM за точку M на ее длину, получите точку F. Рассмотрите четырехугольник $ABCF$.

Задача 125[1]. Медианы BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки P и Q расположены на отрезках BE и CF так, что $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{2}$, $\frac{CQ}{QF} = \frac{5}{4}$. Найти площадь треугольника POQ, если площадь треугольника ABC равна 72.

Указание. Примените результат задачи **120** несколько раз.

Ответ: $S_{\triangle POQ} = \frac{3}{5}S$

Задача 126. Дан треугольник ABC ($S_{\triangle ABC} = 308$). AM — медиана, BL — биссектриса. P — точка их пересечения. Найти S_{PLCM}, если $BA : BC = 4 : 3$.

Указание. Примените свойство биссектрисы для треугольников ABM и ABC. Примените результат задачи **120** для треугольников PAL и CAM.

Ответ: $S_{PLCM} = 90$.

Задача 127[1]. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON равны соответственно S_1, S_2 и S_3.

Указание. Распишите отношения $\frac{BP}{PL}, \frac{AL}{LC}$, как отношения площадей некоторых треугольников.

Ответ: $S_{\triangle CMN} = \frac{S_1S_2(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

Задача 128. Докажите теорему Менелая через площади.

Указание. Решение аналогично решению прошлой задачи.

Список литературы

1. *Шабунин М. И.* Математика: пособие для поступающих в вузы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. — 744 с.
2. *Гордин Р. К.* Геометрия. Планиметрия 7–9 классы: Учебное пособие. — 3-е изд., испр. — М.: Изд. МЦНМО, 2006. — 416 с.
3. Олимпиада «Физтех–2004».
4. Олимпиада «Физтех–2013».
5. Олимпиада «Физтех–2015».
6. Олимпиада «Физтех–2017».
7. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2009–2010 гг.
8. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2010–2011 гг.
9. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2012–2013 гг.
10. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2013–2014 гг.
11. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2015–2016 гг.
12. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2016–2017 гг.
13. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2017–2018 гг.
14. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2016–2017 гг.
15. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2017–2018 гг.