НАУКА В РЕГИОНЫ

Методические материалы по математике (иррациональные уравнения)

Фонд развития Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

2017

Данное пособие предлагает школьникам ознакомиться с основными методами решения иррациональных уравнений.

Автор
С.А. Жестков

Иррациональные уравнения

Корректоры: А.О. Тарасевич
Компьютерная верстка: С.А. Жестков

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 О равносильных переходах

Когда мы сталкиваемся с уравнениями, неравенствами или системами, ключевым моментом для нас является понятие равносильного перехода. Действительно, для того чтобы правильно решить поставленную задачу, мы можем пользоваться **только** равносильными переходами, шаг за шагом. Вспомним определение равносильного перехода.

Равносильный переход – это переход, при котором множество решений исходного уравнения/неравенства не подвергается изменениям.

Соответственно, если в результате перехода, часть корней потерялась, или, наоборот, добавились лишние корни, то такой переход является неравносильным и может привести к ошибочному ответу. Таким образом, при написании каждой новой строчки, важно отдавать себе отчёт, что вы совершаете равносильный переход.

Несомненно равносильными являются следующие переходы: добавление к левой и правой частям уравнения одного и того же числа, перенос слагаемых из одной части в другую, домножение обеих частей на заданное положительное число (а для уравнений – на любое не равное нулю число). С возведением в квадрат частей уравнения дела обстоят не так просто. Рассмотрим пример.

Пусть у нас есть простейшее линейное уравнение:

$$x + 2 = 3.$$

Каждый из вас без труда справится с этим уравнением и скажет: $x = 1$.

Однако давайте на минуту представим, что мы живём в мире, в котором нельзя решать линейные уравнения, а можно только квадратные. Что ж, тогда возведём исходное уравнение в квадрат. Получим:

$$x^2 + 4x + 4 = 9 \Longleftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Корнями получившегося уравнения являются числа: $x_1 = 1, x_2 = -5$.

Заметим: множество решений последнего уравнения не совпадает с множеством решений исходного: добавился еще один «корень» $x_2 = -5$. Таким образом, совершенный нами переход (возведение обеих частей уравнения в квадрат) был неравносильным! Таким образом, уже сейчас нужно и важно понять: **возведение в квадрат в общем случае не является равносильным переходом!**

Почему же так произошло? Все дело в том, что при возведении в квадрат теряется информация о знаке выражения. И если $3 \neq -3$, то $3^2 = (-3)^2$.

Как же сделать его равносильным? Как отсечь тот ненужный корень, который расширил наше множество решений? Всё очень просто: сформулируем условие равносильности для операции возведения в квадрат, которое каждый из вас должен знать «на зубок»: возведение неравенства (уравнения) в квадрат является равносильным переходом тогда и только тогда, когда обе части возводимого в квадрат неравенства (уравнения) одного знака. В частности (*и именно этим мы будем активно пользоваться на практике*),

возведение неравенства (уравнения) в квадрат является равносильным переходом в случае, когда обе части возводимого в квадрат неравенства (уравнения) неотрицательны.

Действительно, учитывая вышесказанное, имеем:

$$x+2=3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4=9 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right. \\ x\geqslant -2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x=1.$$

Теперь, осознав это правило и его важность, можем смело переходить к решению самих иррациональных уравнений и неравенств.

Глава 2

Уравнения

2.1 Иррациональные уравнения

Рассмотрим классическое уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

и попробуем написать для него равносильный переход. Разумеется, нам понадобится возводить обе части в квадрат. Теперь вспоминаем условие равносильности этого перехода и не забываем требовать неотрицательность правой части. Таким образом:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}}$$

Обратите внимание, что нет никакой необходимости учитывать ОДЗ исходного примера (неотрицательность подкоренного выражения). Действительно, если внимательно посмотреть на второе условие системы, то можно заметить, что в нашей задаче подкоренная функция равна некоторому квадрату, который сам по себе неотрицателен! А значит и ОДЗ уже учтено в нашей системе!

Пример 1.

$$\sqrt{4-6x-x^2}=x+4 \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, причём: $f(x)=4-6x-x^2$, $g(x)=x+4$.

Итак, $(\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+4\geqslant 0 \qquad (1) \\ 4-6x-x^2=(x+4)^2 \qquad (2) \end{cases}$$

$(1) \Longleftrightarrow \boxed{x\geqslant 1}$ $\qquad (2) \Longleftrightarrow 2x^2+14x+12=0 \Longleftrightarrow$ $\boxed{\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.}$

$$(\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow x=-1$$

<u>Ответ:</u> $x=-1$.

Имеет смысл поговорить и об уравнениях следуюшего вида: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Все условия для возведения в квадрат выполнены (обе части неотрицательны). Осуществив эту операцию, получим: $f(x)=g(x)$. Теперь весь вопрос в ОДЗ, здесь и кроется самое интересное. Дело в том, что нет никакой необходимости проверять неотрицательность обеих функций, ведь по первому условию они равны! Значит достаточно проверить одну, причем можно выбрать более простую! Итак, имеем:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}}$$

Пример 2.

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + x + 7}$$

Решение:

Пример попадает под указанную схему, причём:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \; g(x) = x^4 - 4x^2 + x + 7.$$

Итак, $(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = x^4 - 4x^2 + x + 7 \\ x^2 + x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 6 = 0, \\ x \in R \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

<u>Ответ:</u> $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{3}$.

Глава 3

Неравенства

3.1 Основные типы неравенств

Далее, на основании простых правил из первого параграфа и столь же простых логических цепочек, вам предложены шесть схем равносильных переходов для различных характерных типов иррациональных неравенств. Первые четыре схемы здорово знать наизусть, так как встречаются они очень часто, и тратить время на размышления об их выводе - неразумно. Пятая и шестая схемы являют собой более громоздкие конструкции (таких конструкций можно придумать ещё сто штук), и приведены они, главным образом, для того, чтобы обозначить вам направление мысли, которую стоит строить столкнувшись с подобными примерами.

1) Неравенства вида: $\boxed{\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)}$

Очевидно, что для решения этого неравенства нам придётся возводить его в квадрат. Но на этом моменте сразу же вспоминаем условие равносильности этого перехода, и сразу делаем вывод, что необходимо: $g(x) \geqslant 0$. Действительно, забыв это условие мы можем получить лишние решения, ведь корень в левой части не может быть отрицательным. Учитывая это условие, и убедившись тем самым, что обе части неравенства неотрицательны, возводим в квадрат, получив: $f(x) \leqslant g^2(x)$. Также, не забываем ОДЗ, ведь наш исходный пример существует только при тех значениях аргумента, при которых подкоренное выражение неотрицательно: $f(x) \geqslant 0$. Итого:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant g^2(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}}$$

Если в исходном неравенстве стоит знак «строго меньше», то меняется условие на правую часть: она должна быть строго положительной (ведь корень не может быть меньше нуля), и по смыслу меняется знак второго неравенства системы, т.е.:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}}$$

Пример 3.

$$\sqrt{x^2 - 8x + 12} < x - 5 \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, причём:

$$f(x) = x^2 - 8x + 12, \; g(x) = x - 5.$$

Итак, $(\star) \iff \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x - 5 > 0 \qquad (1) \\ x^2 - 8x + 12 < (x-5)^2 \qquad (2) \\ x^2 - 8x + 12 \geqslant 0 \qquad (3) \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство.

$(1) \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 5}$

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 < (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 < x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow 2x < 13 \Leftrightarrow \boxed{x < 6,5}$

$(3) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-6)(x-2) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty; 2] \cup [6; \infty)}$

Итак, $(\star) \iff \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x > 5 \\ x < 6,5 \\ x \in (-\infty; 2] \cup [6; \infty) \end{cases} \iff$
$\boxed{x \in [6; 6,5)}$

Ответ: $x \in [6; 6,5)$.

2) Неравенства вида: $\boxed{\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)}$

Разобьем наше решение на 2 случая, в зависимости от знака правой части. Этот подход порождает совокупность двух систем. Поговорим подробно о каждой. Если

$g(x) < 0$, то неравенство, в общем говоря, верно, ведь корень больше любого отрицательного числа. Однако, следует не забывать ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$. Перейдём теперь ко второму случаю, когда $g(x) \geqslant 0$. По условию этого случая обе части неотрицательны, а значит мы смело можем возводить в квадрат: $f(x) \geqslant g^2(x)$. Обращаю ваше внимание, что ОДЗ в этом случае дописывать не нужно, так как функция $f(x)$ из предыдущего условия больше или равна квадрату некоторой функции, а значит принимает только неотрицательные значения. Итого:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.}$$

В случае знака «строго больше» в исходном неравенстве меняется только второе неравенство второй системы: там тоже будет знак «строго больше».

Пример 4.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3 \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, причём: $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x + 3$.

$$\text{Итак, } (\star) \Longleftrightarrow \sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3<0 \qquad (1) \\ x^2-3x+2 \geqslant 0 \qquad (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \geqslant 0 \qquad (3) \\ x^2-3x+2 > (x+3)^2 \qquad (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство.

$(1) \Leftrightarrow x+3<0 \Leftrightarrow \boxed{x<-3}$

$(2) \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)}$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x<-3}$$

$(3) \Leftrightarrow x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geqslant -3}$

$(4) \Leftrightarrow x^2-3x+2 > (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > x^2+6x+9 \Leftrightarrow$ $9x<-7$ $\boxed{x<-\frac{7}{9}}$

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in \left[-3; -\tfrac{7}{9}\right)}$$

$$\text{Итак, } (\star) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x \in \left[-3; -\dfrac{7}{9}\right) \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{x \in \left[-\infty; -\tfrac{7}{9}\right)}$$

<u>Ответ:</u> $x \in \left[-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

Нередко встречаются задачи, где комбинируются неравенства видов 1 и 2.

Пример 5 (МФТИ-2001).

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Решение:

Несмотря на визуально громоздкую конструкцию, этот пример являет собой схему вида 1 ($\sqrt{f(x)} < g(x)$, где $g(x) = 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$). Пользуясь этой схемой, получаем:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} > 0 \qquad (1) \\ x^2 - 5x + 6 < 1 + x^2 - x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \qquad (2) \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \qquad (3) \end{cases}$$

Рассмотрим каждое неравенство в отдельности:

$$(1) \Longleftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} > 0$$

Это неравенство верно всегда, но только там где существует! Поэтому

$$1+\sqrt{x^2-x+1}>0 \Longleftrightarrow x^2-x+1\geqslant 0 \Longleftrightarrow x\in R$$

$$(2) \Longleftrightarrow x^2-5x+6<1+x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x+1} \Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2-x+1}>2-2x$$

Это иррациональное неравенство, попадающее под схему вида 2. Решая, получаем:

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-2x<0\\ x^2-x+1\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}2-2x\geqslant 0\\ x^2-x+1>(2-2x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\ \begin{cases}x\leqslant 1,\\ 3x^2-7x+3<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6};\infty\right)$$

Осталось рассмотреть третье неравенство системы:

$$(3) \Longleftrightarrow x^2-5x+6\geqslant 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty;2]\cup[3;\infty)$$

Возвращаясь к исходной системе получаем:

$$\sqrt{x^2-5x+6}<1+\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in R\\ x\in\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{6};\infty\right)\\ x\in(-\infty;2]\cup[3;\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6};2\right]\cup[3;\infty)$$

Ответ: $x \in \left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}; 2\right] \cup [3; \infty)$.

При этом важно не заучивать готовые рецепты, а понимать базовые принципы на которых они строятся. В частности, следующие два примера не подходят в явном ни под одну из схем, однако следуя общим правилам, мы легко запишем для них равносильные переходы.

Пример 6 (МФТИ-2006).

$$\frac{\sqrt{4x^3-12x+8}}{x+1} \leqslant \sqrt{4x+7} \qquad (\star)$$

Решение:

Попробуем пойти путем нехитрого анализа. Правая часть у нас неотрицательна, а левая меняет знак в зависимости от знака $x+1$. Что ж, давайте разобьем наш пример на два случая, в зависимости от знака знаменателя.

Если $x+1 < 0$, то наше неравенство верно в ОДЗ (действительно, отрицательное число меньше положительного).

Если $x+1 > 0$, то обе части неравенства положительны и в ОДЗ мы можем возвести в квадрат!

Итак, получили совокупность двух случаев:

$$(\star) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x+1<0 \\ \left\{\begin{array}{l} x+1>0, \\ \dfrac{4x^3-12x+8}{x^2+2x+1} \leqslant 4x+7 \end{array}\right. \end{array}\right. \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \left\{\begin{array}{l} x>-1, \\ 15x^2+30x-1 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty; -1) \cup \left[-1 + \frac{4}{\sqrt{15}}; \infty\right)$$

Осталось учесть ОДЗ. Оно представляет из себя систему двух неравенств:

$$ОДЗ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 12x + 8 \geqslant 0 \\ 4x + 7 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+2) \geqslant 0 \\ x \geqslant -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{4}; \infty\right)$$

Итак, с учетом ОДЗ:

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup \left[-1 + \dfrac{4}{\sqrt{15}}; \infty\right) \\ x \in \left[-\dfrac{7}{4}; \infty\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right) \cup \left[-1 + \frac{4}{\sqrt{15}}; \infty\right)$$

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{7}{4}; -1\right) \cup \left[-1 + \dfrac{4}{\sqrt{15}}; \infty\right)$.

Пример 7 (МФТИ-2013).

$$\frac{1}{\sqrt{|x+1| - 2}} \leqslant \frac{1}{9+x} \qquad (\star)$$

Решение:

Начнем с того, что сразу заметим: $9 + x > 0$, ведь иначе неотрицательное число будет меньше либо равно отрицательного, чего быть не может. Также сразу отметим

ОДЗ корня: $|x+1|-2>0$. Учет первое замечания позволит нам возвести неравенство в квадрат. А учет второго замечания позволит нам осуществить умножение «крест-накрест» без сомнений в знаке неравенства. Итак,

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 9+x>0, \\ \dfrac{1}{|x+1|-2} \leqslant \dfrac{1}{(9+x)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+x>0, \\ |x+1|-2>0, \\ (9+x)^2 \leqslant |x+1|-2. \end{cases}$$

При этом заметим, что третье неравенство системы позволяет опустить второе, так как (с учетом того, что $x \neq -9$) является более сильным условием ($|x+1|-2 \geqslant (9+x)^2 > 0$).

Таким образом нам остается решить третье неравенство системы при условии: $x > -9$. Рассмотрим третье неравенство по случаям:

1) $\boxed{x > -1}$ При этом:

$$81+18x+x^2 \leqslant x+1-2 \;\Leftrightarrow\; x^2+17x+82 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство не имеет решений ($D<0$, нет нулей функции, ветки параболы при этом вверх).

2) $\boxed{x \leqslant -1}$ При этом:

$$81+18x+x^2 \leqslant -x-1-2 \;\Leftrightarrow\; x^2+19x+84 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\; (x+7)(x+12) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x \in [-12,-7]}.$$

С учетом условия $x > -9$, получаем ответ:
<u>Ответ:</u> $x \in (-9,-7]$.

3) Неравенства вида: $\boxed{\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)}}$

В этом случае рассуждения еще более лаконичные. Обращаем внимание, что обе части заведомо неотрицательны, и возводим в квадрат: $f(x) \geqslant g(x)$. Не забываем про ОДЗ, однако интересный момент состоит в том, что достаточно только одного ОДЗ: $g(x) \geqslant 0$, потому что по первому условию левая часть неравенства всегда больше или равна правой. И если правая неотрицательна, то и левая отрицательной быть не может. Итого:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}}$$

В случае строгого знака неравенства, на строгий знак меняется первое неравенство системы.

Пример 8.

$$\sqrt{8x - 5x^2} \geqslant \sqrt{4x^2 - 15x + 14} \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, где:

$$f(x) = 8x - 5x^2,\ g(x) = 4x^2 - 15x + 14.$$

Итак, $(\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 8x - 5x^2 \geqslant 4x^2 - 15x + 14 \qquad (1) \\ 4x^2 - 15x + 14 \geqslant 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство.

$(1) \Leftrightarrow 8x - 5x^2 \geqslant 4x^2 - 15x + 14 \Leftrightarrow 9x^2 - 23x + 14 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $9(x-1)\left(x - \frac{14}{9}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in \left[1; \frac{14}{9}\right]}$

$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 14 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(x-2)\left(x - \frac{7}{4}\right)$ $\Leftrightarrow \boxed{x \in \left(-\infty; \frac{7}{4}\right] \cup [2; \infty)}$

Итак, $(\star) \iff \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[1; \frac{14}{9}\right] \\ x \in \left(-\infty; \frac{7}{4}\right] \cup [2; \infty) \end{cases} \iff$ $\boxed{x \in \left[1; \frac{14}{9}\right]}$

<u>Ответ:</u> $x \in \left[1; \frac{14}{9}\right]$.

4) Неравенства вида: $\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geqslant 0}$

Несмотря на кажущуюся простоту этого примера, в нём часто допускаются ошибки. Их причина в том, что ученики часто рассматривают в качестве равносильного перехода такую **неверную** систему: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Такое рассмотрение является грубой ошибкой.

Дело в том, что случай, при котором $f(x) = 0$ несомненно является решением исходного неравенства. И при выполнении этого условия совсем необязательна положительность знаменателя (он может быть при этом любым, кроме как нулём). А написанная выше система требует **постоянной** положительности знаменателя, поэтому может происходить потеря корней.

С учётом этих замечаний напишем правильную версию:

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.}$$

Похожим образом решаются неравенства вида

$$\sqrt{f(x)}g(x) \geqslant 0$$

$$\boxed{\sqrt{f(x)}g(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.}$$

Пример 9.

$$\frac{\sqrt{-x^2 - 10x + 39}}{x + 6} \geqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, где:

$$f(x) = -x^2 - 10x + 39, \; g(x) = x + 6.$$

Итак, $(\star) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2 - 10x + 39 = 0 \qquad (1) \\ x + 6 \neq 0 \qquad (2) \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2 - 10x + 39 > 0 \qquad (3) \\ x + 6 > 0 \qquad (4) \end{cases} \end{array}\right.$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство.

$(1) \Leftrightarrow -x^2 - 10x + 39 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 3,\ x_2 = -13}$

$(2) \Leftrightarrow x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq -6}$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 3,\ x_2 = -13}$$

$(3) \Leftrightarrow -x^2 - 10x + 39 > 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 13) < 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-13; 3)}$

$(4) \Leftrightarrow x + 6 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > -6}$

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in (-6; 3)}$$

Итак, $(\star) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3,\ x_2 = -13 \\ x \in (-6; 3) \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \boxed{x \in \{-13\} \cup (-6; 3]}$

<u>Ответ:</u> $x \in \{-13\} \cup (-6; 3]$.

5) Неравенства вида: $\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} > 0}$

Мало того, что подобное неравенство само по себе встречается довольно часто, к нему ещё в один-два шага сводятся многие другие неравенства. Решение «в лоб» оказывается очень громоздким.

Подобно второму пункту параграфа разобьем наш пример на два случая, в зависимости от знака $g(x)$. В первом случае, когда $g(x) < 0$, заметим такую интересную деталь: числитель дроби заведомо положительный! Поэтому осталось лишь учесть неравенство $h(x) > 0$. Переходим ко второму случаю, когда $g(x) \geqslant 0$. К сожалению, в этом случае мы не можем подобно первому случаю рассуждать о знаке числителя: он может быть как больше нуля, так и меньше. Однако мы знаем здесь, что сумма $\sqrt{f(x)}+g(x)$ положительна, а значит мы можем смело на неё домножать и быть уверенным, что знак неравенства не изменится. В числителе в результате домножения на сопряжённое получается разность квадратов и неравенство принимает следующий вид: $\dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)} > 0$.

Итак, мы получили совокупность двух систем **рациональных** неравенств, что сильно упрощает задачу. Но нельзя при этом забывать, что исходный пример существовал не всегда, у него есть ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$. Самым простым путём является здесь такой: сначала решить совокупность двух систем, а потом отобрать только те решения, что принадлежат ОДЗ. Итого, запишем так:

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)} > 0 \overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)} > 0 \end{cases} \end{array}\right.}$$

Аналогично со знаком «меньше» в исходном неравенстве (лишь по смыслу меняются знаки во вторых уравнения каждой системы).

Пример 10.

$$\frac{\sqrt{3-2x}-x}{x-2}<0 \qquad (\star)$$

Решение:

Пример попадает под указанную выше схему, где:

$$f(x)=3-2x,\ g(x)=x,\ h(x)=x-2.$$

Итак, $(\star) \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ h(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}<0 \end{cases} \end{array}\right. \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 & (1) \\ x-2<0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 0 & (3) \\ \dfrac{3-2x-x^2}{x-2}<0 & (4) \end{cases} \end{array}\right.$

Приведём необходимые выкладки для решения этой совокупности систем.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x<0}$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{3-2x-x^2}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x-2}>0 \Leftrightarrow \boxed{x\in(-3;1)\cup(2;\infty)}$$

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\in(-3;1)\cup(2;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x\in[0;1)\cup(2;\infty)}$$

$$\text{Итак, } (\star) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \in [0;1) \cup (2;\infty) \end{array}\right. \iff$$

$\boxed{x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)}$

Однако это не окончательный ответ.

Теперь мы должны учесть ОДЗ: $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant 1,5}$

Итого, с учётом ОДЗ, имеем: $\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty) x \leqslant 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\boxed{x \in (-\infty; 1)}$

<u>Ответ:</u> $x \in (-\infty; 1)$.

6) Неравенства вида: $\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} > 0}$

В сравнении с предыдущим примером, этот значительно проще. В нём заложена похожая идея: сумма корней $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$ положительна, а значит мы можем смело на неё домножать. Получается домножение на сопряжённое, образуется разность квадратов и на выходе имеем: $\dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)} > 0$. Осталось не забыть об ОДЗ (их тут два и причин не учитывать какой-либо из них нет), поэтому в итоге:

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}>0\\ f(x)\geqslant 0\\ g(x)\geqslant 0\end{cases}}$$

Аналогично со знаком «меньше» в исходном неравенстве (лишь по смыслу меняется знак в первом неравенстве системы). В случае нестрогого знака неравенства нужно быть внимательней и иметь в виду четвёртый пункт этого параграфа (случай равенства числителя нулю нужно рассмотреть отдельно).

Пример 11.

$$\frac{\sqrt{2x^2-7x+5}-\sqrt{x^2+4x-5}}{x^2+x-42}>0 \qquad (\star)$$

Решение:

В нашем случае:

$f(x)=2x^2-7x+5,\ g(x)=x^2+4x-5,\ h(x)=x^2+x-42.$

Итак, $(\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}>0\\ f(x)\geqslant 0\\ g(x)\geqslant 0\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x^2-7x+5)-(x^2+4x-5)}{x^2+x-42}>0 \qquad (1)\\ 2x^2-7x+5\geqslant 0 \qquad (2)\\ x^2+4x-5\geqslant 0 \qquad (3)\end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждое неравенство.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-11x+10}{x^2+x-42} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-10)}{(x+7)(x-6)} > 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{x \in (-\infty; -7) \cup (1; 6) \cup (10; \infty)}$

$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-2,5) \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{x \in (-\infty; 1] \cup [2,5; \infty)}$

$(3) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty)}$

$$\text{Итак, } (\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -7) \cup (1; 6) \cup (10; \infty) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2,5; \infty) \\ x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty) \end{cases}$$
$\Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty; -7) \cup [2,5; 6) \cup (10; \infty)}$

Ответ: $x \in (-\infty; -7) \cup [2,5; 6) \cup (10; \infty)$.

Глава 4

Идеи в решении иррациональных уравнений и неравенств

Будем выделять для себя **три основные техники** в работе с иррациональными уравнения и неравенствами (не считая готовых равносильных переходов из прошлой главы):

1) **Домножение на сопряжённое.**
2) **Замена переменной.**
3) **Использование свойств функции.**

Поговорим подробно о каждой из названных техник.

4.1 Домножение на сопряженное

Домножение на сопряжённое очень часто является ключом к красивому, лаконичному и прозрачному решению иррациональных неравенств. Если призадуматься, то этот пункт начался ещё в тот момент, когда мы рассматривали пятую и шестую схему. Действительно, в каждой из этих схем мы в определённый момент пользовались знакоопределённостью суммы слагаемых (в пятой схеме это сумма $\sqrt{f(x)} + g(x)$ для второй системы, в шестой это сумма корней $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$.

Подобный подход можно обобщить. Пусть мы имеем дело с разностью двух выражений (будь то в числителе дроби, в знаменателе, или в чистом виде). И знак этой разности, мы как правило не знаем. Зато порой мы можем будь уверенны в знаке суммы этих же слагаемых! И домножив на эту сумму, мы получим формулу разность квадратов, которая поможет нам освободиться от иррациональностей, модулей и так далее. Ещё раз повторю: ровно эта идея была ключевой в рассмотрении пятой и шестой схемы прошлого параграфа.

Большая опасность заключается в том, что избавившись таким образом от корня, вы расширяете ОДЗ примера (теряется информация о подкоренном выражении). Поэтому, если вы решили домножать на сопряжённое с целью избавиться от иррациональности, то не забудьте включить ОДЗ старого корня на уровне системы!

Когда эта идея может быть вам полезна? Мы уже сталкивались со случаем разности двух корней. Прекрасно подходит и разность корня с модулем. Действительно, их сумма неотрицательна и домножать на неё мы смело имеем право. То есть можно сказать следующее:

$$\sqrt{f(x)}-|g(x)| \geqslant 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{f(x)}-|g(x)|)(\sqrt{f(x)}+|g(x)|) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) - g^2(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Другой популярный случай: корень и заведомо неотрицательная функция. Например разность корня и квадратного трёхчлена с ветками вверх и отрицательным дискриминантом. К примеру неравенство

$$\sqrt{x-2}-x^2-1>0 \Longleftrightarrow \sqrt{x-2}-(x^2+1)>0$$

решается с помощью домножения на сопряжённое, ведь выражение в скобках положительно, а значит и сумма выражения в скобках с корнем будет положительна. Итак,

$$\sqrt{x-2}-(x^2+1)>0 \Longleftrightarrow$$

$$(\sqrt{x-2}-(x^2+1))(\sqrt{x-2}+(x^2+1))>0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2-(x^2+1)^2>0 \\ x-2\geqslant 0 \end{cases}$$

Перейдём теперь к конкретным задачам.

Пример 12.

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1}>1.$$

Решение:

После переноса единицы в левую часть, получим:

$$\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}-1}>0 \quad (\star).$$

Заметим, что в числителе представлена разность двух корней. Знака этой разности мы не знаем, но сумма этих корней точно неотрицательная. Аналогичная ситуация в знаменателе: сопряженное к нему (сумма корня и единицы) — это положительное число. А значит и в числителе и в знаменателе мы можем домножить обе части неравенства на сопряжённое числителю и разделить обе части на сопряжённое знаменателю. Важно при этом не забыть про ОДЗ исходных корней и включить его на уровне системы.

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2})(\sqrt{5x+3}+\sqrt{3x+2})}{(\sqrt{3x+2}-1)(\sqrt{3x+2}+1)} > 0, \\ 5x+3 \geqslant 0, \\ 3x+2 \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x+3)-(3x+2)}{(3x+2)-1} > 0, \\ 5x+3 \geqslant 0, \\ 3x+2 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{3x+1} > 0, \\ x \geqslant -\dfrac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Пример 13.

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1 \qquad (\star)$$

Решение:

Для начала перенесём единицу в левую часть и приведём к одной дроби, получим

$$(\star) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \geqslant 0$$

Теперь внимательно смотрим на числитель и знаменатель. В числителе - разность двух корней. Знак этой разности мы не знаем, зато сумма их точно неотрицательна. Аналогично со знаменателем: там разность корня и модуля, сумма которых неотрицательна. Таким образом мы можем смело домножить левую и правую часть на сопряжённое числителю и разделить обе части на сопряжённое знаменателю. Не забываем об ОДЗ, его нужно включить на уровне системы, чтобы не утратить информацию о подкоренных выражениях. То есть,

$$(\star) \iff \frac{(\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7})(\sqrt{8-x}+\sqrt{x+7})}{(\sqrt{x+7}-|2x-1|)(\sqrt{x+7}+|2x-1|)} \geqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(8-x)-(x+7)}{(x+7)-(2x-1)^2} \geqslant 0 \\ x+7 \geqslant 0 \\ 8-x \geqslant 0 \end{cases}$$

Получили таким образом простую систему рациональных неравенств. Решаем её.

$$(\star) \iff \begin{cases} \dfrac{(8-x)-(x+7)}{(x+7)-(2x-1)^2} \geqslant 0 \\ x+7 \geqslant 0 \\ 8-x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1-2x}{-4x^2+5x+6} \geqslant 0 \\ x \in [-7; 8] \end{cases}$$

$$\iff x \in \left[-7; -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$$

<u>Ответ:</u> $x \in \left[-7; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left[\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Пример 14. (МФТИ, 2000)

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|} \leqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

Обратим внимание на знаменатель нашей дроби: там стоит разность модулей,а значит сопряженное знаменателю будет неторицательным и мы можем разделить неравенство на эту сумму. Это удобно, ведь так мы избавимся от модулей и сможем применить формулу разность квадратов, которая позволит разложить знаменатель на множители. Итак, получаем:

$$(\star) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{(|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|)(|x^2-6x+5|+|x^2-2x-3|)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{(x^2-6x+5)^2-(x^2-2x-3)^2} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{(-4x+8)(2x^2-8x+2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{(x-2)(x^2-4x+1)} \geqslant 0$$

Последнее неравеснтво в этой цепочке представляет из себя схему номер 4 из параграфа §2. Вспоминая тонкости, с которыми мы столкнулись при её анализе, получаем для нашего неравенства:

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{(x-2)(x^2-4x+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+7x-6=0 \\ (x-2)(x^2-4x+1)\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2+7x-6>0, \\ (x-2)(x^2-4x+1)>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1; x = 6 \\ x \neq 2; x \neq 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (1; 6), \\ x \in (2 - \sqrt{3}, 2) \cup (2 + \sqrt{3}; \infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Объединяем результаты двух систем в сокупность, в итоге получим: $x \in [1; 2) \cup (2 + \sqrt{3}; 6]$.

Ответ: $x \in [1; 2) \cup (2 + \sqrt{3}; 6]$.

Пример 15. (МГУ, мехмат, 1990)

$$\frac{\sqrt{1 + x^3} + x - 2}{x - 1} \geqslant x + 1 \qquad (\star)$$

Решение:

Для начала перенесём всё в левую часть и приведём к одной дроби, получим

$$(\star) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{1 + x^3} + x - 2 - x^2 + 1}{x - 1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{1 + x^3} - (x^2 - x + 1)}{x - 1} \geqslant 0$$

Обратим внимание на выражение в скобках. Оно является собой квадратный трёхчлен с ветвями вверх и дискриминантом: $D = 1 - 4 = -3 < 0$. Таким образом, можно смело утверждать, что выражение в скобках строго положительно. А значит и сумма корня с этим выражением положительна, что позволяет нам домножить неравенство на эту сумму! Не забываем про ОДЗ и в итоге имеем:

$$(\star) \Longleftrightarrow \frac{(\sqrt{1 + x^3} - (x^2 - x + 1))(\sqrt{1 + x^3} + (x^2 - x + 1))}{x - 1} \geqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1+x^3)-(x^2-x+1)^2}{x-1} \geqslant 0 \\ 1+x^3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Получили таким образом простую систему рациональных неравенств. Решаем её.

$$(\star) \iff \begin{cases} \dfrac{(1+x)(x^2-x+1)-(x^2-x+1)^2}{x-1} \geqslant 0 \\ (1+x)(x^2-x+1) \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1+x)-(x^2-x-1)}{x-1} \geqslant 0 \\ 1+x \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x}{x-1} \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \iff x \in [-1;0] \cup (1;2]$$

<u>Ответ:</u> $x \in [-1;0] \cup (1;2]$.

Пример 16.

$$\frac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

Сразу обращает на себя внимание разность корня и модуля в числителе. Отличный повод домножить на сопряжённое. Не забываем про ОДЗ и в итоге имеем:

$$(\star) \iff \frac{(|x-4|-\sqrt{x-2})(|x-4|+\sqrt{x-2})}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-4)^2-(x-2)}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0 \qquad (1) \\ x \geqslant 2 \qquad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно первое неравенство системы:

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{(x-4)^2-(x-2)}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-9x+18}{4\sqrt{x-10}-(13-x)} \geqslant 0$$

Несмотря на некоторое упрощение исходной задачи, получившееся неравенство смотрится громоздко. Конечно, по своей сути оно попадает (с минимальными изменениями) под пятую схему предыдущего параграфа. Но мы пойдём другим, более изящным путём. Обратите внимание, в исходном примере фигурируют два корня, порождающие своим присутствием ОДЗ. Первый мы учли в системе ($x \geqslant 2$). Давайте сразу выпишем и второй (для корня в знаменателе): $x \leqslant 10$. И вот ведь что выходит, скобка в знаменателе в рамках данного ОДЗ не может быть отрицательной! А значит и сумма $4\sqrt{x-10}+(13-x)$ в получившемся ОДЗ будет строго положительной! Таким образом делим обе части на эту сумму, получаем:

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{x^2-9x+18}{(4\sqrt{x-10}-(13-x))(4\sqrt{x-10}+(13-x))} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-9x+18}{16(10-x)-(13-x)^2} \geqslant 0 \\ x \leqslant 10 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-9x+18}{-x^2+10x-9} \geqslant 0 \\ x \leqslant 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-6)(x-3)}{(x-9)(x-1)} \leqslant 0 \\ x \leqslant 10 \end{cases}$$

Итак, собирая все выкладки вместе, получаем:

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-6)(x-3)}{(x-9)(x-1)} \leqslant 0\\ x \leqslant 10\\ x \geqslant 2\end{cases} \Leftrightarrow x \in [2;3]\cup[6;9)$$

<u>Ответ:</u> $x \in [2;3] \cup [6;9)$.

Последний пример особенно показателен. Он призывает вас не просто пользоваться шаблонными методами, но и попутно анализировать текущее неравенство. Мы оценили ОДЗ и благодаря этой оценке смогли домножить на сопряжённое и вместо кучи переходов практически в один-два шага перешли к банальной системе рациональных неравенств. Рассмотрим еще несколько задач на домножение на сопряженное, в которых простой анализ ОДЗ открывает очень широкие возможности и существенно упрощает решение задачи.

Пример 17 (МФТИ-2007).

$$\frac{(\sqrt{4-x}-x-2)(\sqrt{9-4x}-x-3)}{\sqrt{x^3-4x^2+x+6}} \leqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

Для начала найдем ОДЗ нашего неравенства:

$$\textit{ОДЗ} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-4x^2+x+6>0\\ 4-x \geqslant 0\\ 9-4x \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x-2)(x-3)>0\\ x \leqslant \dfrac{9}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1;2)$$

Домножим на корень в знаменателе (он неотрицательный и ОДЗ мы уже учли), получим:

$$(\star) \overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow} (\sqrt{4-x}-(x+2))(\sqrt{9-4x}-(x+3)) \leqslant 0$$

А теперь заметим следующее - в обеих скобках вторые слагаемые в ОДЗ положительны! Действительно, при $x \in (-1; 2)$, имеем $(x+2) > 0$ и $(x+3) > 0$. А это значит, что в каждой из больших скобок у нас разность двух неотрицательных скобок. Значит можем домножать на сопряженное. Домножив на сопряженные к каждой из скобок, получаем:

$$(\star) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (4-x-(x^2+4x+4))(9-4x-(x^2+6x+9)) \leqslant 0$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x^2(x+5)(x+10) \leqslant 0$$

Еще один повод использовать ОДЗ: при $x \in (-1; 2)$ множители $(x+5)$ и $(x+10)$ положительны, значит на них можно сократить.

Таким образом осталось: $x \leqslant 0 \Rightarrow x = 0$. Этот корень принадлежит ОДЗ, значит он и есть ответ.

<u>Ответ:</u> $x = 0$.

Пример 18 (МФТИ-2007).

$$\sqrt{\frac{3-2x}{1+2x}} + \frac{\sqrt{1+2x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}} \geqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

Приведем дроби к одному знаменателю, получим:

$$(\star) \Leftrightarrow \frac{2(3-2x)-\sqrt{6-4x}+1+2x}{\sqrt{1+2x}(2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2})} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-2x-\sqrt{6-4x}}{\sqrt{1+2x}(2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2})} \geqslant 0$$

Теперь можем домножить на корень из знаменателя (он неотрицателен), учитывая при этом ОДЗ этого корня, то есть:

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7-2x-\sqrt{6-4x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}} \geqslant 0 \quad (1) \\ 1+2x > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое неравенство системы. Разделим на сопряженное знаменателю ($2\sqrt{3-2x}+\sqrt{2} > 0$), а затем домножим числитель и знаменатель дроби на -1. Осуществив эти операции, получим:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-4x}-(7-2x)}{4x-5} \geqslant 0$$

Это стандартное неравенство по схеме 5 параграфа §3. Заметим однако, что в ОДЗ корня ($x \leqslant 1,5$) выражение в скобках в числителе ($7-2x$) всегда строго положительное! А значит в обход схемы 5 мы можем сразу домножать числитель на сопряженное (не забывая при это включить ОДЗ корня в систему)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(6-4x)-(7-2x)^2}{4x-5} \geqslant 0, \\ x \leqslant 1,5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x^2-24x+43}{4x-5} \leqslant 0, \\ x \leqslant 1,5. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right).$$

Таким образом, возвращаясь к системе, равносильной исходному неравенству, имеем:

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7-2x-\sqrt{6-4x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}} \geqslant 0 \quad (1) \\ 1+2x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow (\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right) \\ x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$.

Пример 19.

$$\frac{\sqrt{1-x}+|x+6|-5}{|x-2|-3\sqrt{5+x}+3} \leqslant 0 \qquad (\star)$$

Решение:

ОДЗ нашего примера являет собой следующую систему:

$$\text{ОДЗ} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ 5+x \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [-5; 1]$$

Теперь заметим интересную деталь: на множестве ОДЗ подмодульные выражения знакоопределены! Действительно, при $x \in [-5; 1]$, получаем:

$$x+6>0 \Rightarrow |x+6| = x+6, \;\; x-2<0 \Rightarrow |x-2| = 2-x.$$

С учетом вышесказанного, неравенство принимает вид:

$$(\star) \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \frac{x+6+\sqrt{1+x}}{5-x-3\sqrt{5+x}} \leqslant 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \frac{\sqrt{1-x}+(x+1)}{3\sqrt{5+x}-(5-x)} \geqslant 0$$

Еще раз вернемся к оценке допустимых значений и заметим, что выражение $5-x$ на множестве ОДЗ положительно! А значит можем разделить на сопряженное знаменателю. После этой операции получим стандартное неравенство типа 5 из параграфа §3:

$$(\star) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{1+x}-(-x-1)}{x^2-19x-20} \leqslant 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{1+x}+(x+1)}{(x-20)(x+1)} \leqslant 0$$

Уже в третий раз задачу воспользуемся анализом ОДЗ: на сей раз заметим, что $x-20<0$ в ОДЗ, а значит можно домножить на соответствующую скобку, изменив знак неравенства. В итоге:

$$(\star) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{1+x}-(-x-1)}{(x+1)} \geqslant 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-1<0 \\ x+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x-1 \geqslant 0, \\ \dfrac{1-x-x^2-2x-1}{x+1)} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty; -3] \cup (-1; \infty).$$

В итоге, с учетом ОДЗ: $x \in [-5; -3] \cup (-1; 1]$.

<u>Ответ:</u> $x \in [-5; -3] \cup (-1; 1]$.

Пример 20.

$$\frac{\sqrt{3x^2+7x+2}}{3\sqrt{x+1}-2x+|x+2|-5} \geqslant 0. \quad (\star)$$

Решение:

С учетом ОДЗ корня в знаменателе, сразу отметим для себя: $\boxed{x \geqslant -1.}$

И это замечание сразу же приносит результат! Ведь если $x \geqslant -1$, то $x + 2 > 0$, а значит $|x + 2| = x + 2$. Перепишем нашу задачу:

$$(\star) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2 + 7x + 2}}{3\sqrt{x + 1} - 2x + x + 2 - 5} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2 + 7x + 2}}{3\sqrt{x + 1} - (x + 3)} \geqslant 0.$$

И сразу же второй отличный результат! При условии $x \geqslant -1$, имеем $x + 3 > 0$,а значит знаменатель дроби можно домножить на сопряженное. При этом не забудем в конце учесть, что $x \geqslant -1$.

$$(\star) \overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow} \frac{\sqrt{3x^2 + 7x + 2}}{9(x + 1) - (x + 3)^2} \geqslant 0 \overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow} \frac{\sqrt{3x^2 + 7x + 2}}{x^2 - 3x} \leqslant 0$$

Одно просто замечание в два шага позволило нам избавиться от корня и модуля в знаменателе. Получили неравенство вида 4 из §3.

$$(\star) \overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 7x + 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 3x \neq 0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 7x + 2 > 0 & (3) \\ x^2 - 3x < 0 & (4) \end{cases} \end{array} \right. \overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = -2, \;\; x = -\dfrac{1}{3}, \\ x \in (0, 3) \end{array} \right. . \overset{x \geqslant -1}{\Longleftrightarrow} x \in \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \cup (0, 3).$$

<u>Ответ:</u> $x \in \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \cup (0,3)$.

Анализ ОДЗ – это очень полезная процедура вне зависимости от тематики дальнейший шагов. И разумеется, это актуально не только в тех ситуациях, когда мы говорим о домножении на сопряженное. Рассмотри еще одну технику связанную с анализом ОДЗ.

Пример 21 (МФТИ-1999).

$$\frac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4} \geqslant 3x-10 \qquad (\star)$$

Решение:

Как и в случае со многими другими задачами, эта, после переноса всех слагаемых в левую часть, являет собой схему номер 5 параграфа §3. Но на примере данной задачи давайте взглянем на еще один интересный прием.

Для начала найдем ОДЗ:

$$\text{\textit{ОДЗ}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3-22x^2+40x \geqslant 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)(3x-10) \geqslant 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup (4;\infty)$$

Получили две ветки ОДЗ. Новая для нас техника заключается в том, что мы отдельно рассмотрим каждую из веток, а в итоге объединим результаты каждого из двух случаев в ответ.

1) $x \in \left[0; \dfrac{10}{3}\right]$. В этом случае знаменатель левой дроби всегда строго отрицателен! А значит, мы можем домножить на него и поменять знак неравенства, то есть на данной ветке ОДЗ верно следующее:

$$\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x-4} \geqslant 3x - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x-4)(3x-10)} \leqslant (x-4)(3x-10)$$

Теперь (заметив похожие множители слева и справа) можем разделить обе части последнего неравенства на $\sqrt{(x-4)(3x-10)}$. Но перед тем как на что-то делить, надо проверить случай равенства нулю того, на что мы делим! Вспомнив об этом, заметим, что $x = \dfrac{10}{3}$ - решение, важно не забыть о нем! Разделив, получим простое неравенство (схема 3 параграфа §3):

$$\sqrt{x} \leqslant \sqrt{(x-4)(3x-10)} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3x^2 - 22x + 40 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left[0; \frac{8}{3}\right] \cup [5; \infty)$$

Вспомнив о решении $x = \dfrac{10}{3}$ и о том, что мы находимся на ветке $x \in \left[0; \dfrac{10}{3}\right]$, получаем итого для первого случая: $x \in \left[0; \dfrac{8}{3}\right] \cup \left\{\dfrac{10}{3}\right\}$

2) $x \in (4; \infty)$. В этом случае знаменатель левой дроби всегда строго положителен! А значит, мы можем домножить на него, сохранив знак неравенства, то есть на

данной ветке ОДЗ верно следующее:

$$\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x-4} \geqslant 3x - 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x-4)(3x-10)} \geqslant (x-4)(3x-10)$$

Далее аналогично первому случаю: :

$$\sqrt{x} \geqslant \sqrt{(x-4)(3x-10)} \iff \begin{cases} x \geqslant 3x^2 - 22x + 40 \\ (x-4)(3x-10) \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in \left[\frac{8}{3}; 5\right]$$

Мы находимся на ветке $x \in (4; \infty)$, таким образом для этого случая: $x \in (4; 5]$.

Объединяя результаты двух случаев, в итоге имеем: $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right] \cup \left\{\frac{10}{3}\right\} \cup (4; 5]$

<u>Ответ:</u> $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right] \cup \left\{\frac{10}{3}\right\} \cup (4; 5]$.

<u>Ответ:</u> $x \in [-5; -3] \cup (-1; 1]$.

4.2 Замена переменной

Несмотря на кажащуюся простоту этого метода, абитуриенты часто пренебрегают им в решении задач на иррациональные неравенства. Между тем, этот метод часто оказывается очень эффективным. Чтобы не быть голословными, рассмотрим пару примеров.

Пример 22.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \geqslant \frac{2}{4-\sqrt{x}}$$

Решение:

Это иррациональное неравенство сильно отличается от всех предыдущих: ранее корни не входили в состав неравенств в таком виде. Проблема решается довольно просто: сделаем замену $\sqrt{x} = t$ $(t \geqslant 0)$. В результате этой замены получим просто рациональное неравенство:

$$\frac{1}{t+2} \geqslant \frac{2}{4-t}$$

Решая это неравенство получаем:

$$\frac{1}{t+2} - \frac{2}{4-t} \iff \frac{t}{(t+2)(t-4)} \geqslant 0 \iff t \in (-2;0] \cup (4;\infty)$$

Осталось вспомнить об условии $t \geqslant 0$ и вернуться к старой переменной. Итак:

$$\begin{cases} t \in (-2;0] \cup (4;\infty) \\ t \geqslant 0 \end{cases} \iff t \in \{0\} \cup (4;\infty) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} \geqslant 4 \end{array}\right.$$

$$\iff x \in \{0\} \cup (16;\infty)$$

<u>Ответ:</u> $x \in \{0\} \cup (16;\infty)$.

Пример 23.

$$\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leqslant 3x+7$$

Решение:

В результате переноса x^2 в правую часть мы получим простое иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x^2-3x+5} \leqslant -x^2+3x+7$$

Разумеется, можно сразу приступать к решению. Но в результате возведения в квадрат мы получим неприятное уравнение четвертой степени. ту проблему также решит замена. Заметим похожие блоки в левой и правой части и сделаем замену: $\sqrt{x^2-3x+5} = t$. При этом заметим, что $t \geqslant 0$ и $-x^2+3x+7 = 12-t^2$ В результате имеем:

$$t \leqslant 12-t^2 \;\Leftrightarrow\; t^2+t-12 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (t+4)(t-3) \leqslant 0.$$

С учетом того, что $t \geqslant 0$ достаточно сказать, что $t \leqslant 3$.

Возвращаясь к замене получаем:

$$t = \sqrt{x^2-3x+5} \leqslant 3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-3x+5 \geqslant 0, \\ x^2-3x+5 \leqslant 9 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathrm{R}, \\ (x-4)(x+1) \leqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, получили $x \in [-1;4]$

Ответ: $x \in [-1;4]$.

Пример 24 (МФТИ-2001).

$$\sqrt{2x^2-8x+25} - \sqrt{x^2-4x+13} = 2$$

Решение:

Аналогично предыдущему неравенству, данное уравнение может быть решено в лоб, согласно правилам из параграфа §2. Но можно сильно упростить себе жизнь, заметив некоторую связь между подкоренными выражениями. Действительно, пусть

$$x^2 - 4x + 13 = t,$$

тогда $2x^2 - 8x + 25 = 2t - 1$. Итак, получили:

$$\sqrt{2t-1} - \sqrt{t} = 2$$

Для решения этого иррационального уравнения перенесем $\sqrt{t}$ в праву часть (тогда будут выполнены условия для возведения в квадрат):

$$\sqrt{2t-1} = \sqrt{t} + 2 \Longleftrightarrow 2t - 1 = t + 4 + 4\sqrt{t} \Longleftrightarrow 4\sqrt{t} = t - 5$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 5 \\ 4t = t^2 - 10t + 25 \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получаем два корня: $t_1 = 1$, $t_2 = 25$, из которых только $t = 25$ удовлетворяет первому условию системы. Итак, возвращаясь к старой переменной получаем:

$$x^2 - 4x + 13 = 25 \Longleftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

Пример 25 (ПВГ-2014).

$$\frac{\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}}}\geqslant 1 \qquad (\star)$$

Решение:

Домножим числитель и знаменатель дроби в левой части на $\sqrt{x}$. Не забываем об условии $x>0$, ведь в результате избавления от $\sqrt{x}$ теряется часть информации об ОДЗ. Итак:

$$(\star)\iff \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}}\right)}\geqslant 1 \iff \begin{cases}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+1}-3}\geqslant 1\\ x>0\end{cases}$$

Рассмотрим отдельно первое неравенство. Разумеется, после переноса единицы влево, его можно рассмотреть по аналогии схемы 5 из параграфа §3. Но можно поступить проще: сделаем замену:

$$\sqrt{x+1}=t,\ (t>0)\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1$$

В терминах новой замены неравенство принимает вид:

$$\frac{t^2-5}{t-3}\geqslant 1\iff\frac{t^2-t-2}{t-3}\geqslant 0$$

С учетом того, что $t>0$, получаем: $t\in(0;2]\cup(3;\infty)$

Возвращаясь к старой переменной и системе, получаем:

$$(\star)\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}\leqslant 2\\ \sqrt{x+1}>3\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leqslant 3\\ x>8\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\iff$$

$$\iff x \in (0;3] \in (8;\infty)$$

<u>Ответ:</u> $x \in (0;3] \in (8;\infty)$.

Пример 26 (ПВГ-2014).

$$\sqrt{6x-13} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geqslant 3x^2 - 19x + 26 \qquad (\star)$$

Решение:

Решение этого неравенства «в лоб» выглядит будет чересчур отчаянным поступком. Попробуем мыслить шире. Ключ к решению этой задачи лежит в том, что можно заметить некоторую связь между подкоренными выражениями и правой частью неравенства.

Сделаем двойную замену:

$$\sqrt{6x-13} = a, \ \sqrt{3x^2-13x+13} = b.$$

В рамках этой замены также получим:

$$6x-13 = a^2, \ 3x^2-13x+13 = b^2 \Rightarrow 3x^2-19x+26 = b^2-a^2.$$

Таким образом, наше неравенство перепишется в виде:

$$a-b \geqslant b^2-a^2 \iff (a-b)(a+b+1) \geqslant 0$$

Возвращаясь к старой переменной, получим следующее неравенство:

$$(\star) \iff$$
$$(\sqrt{6x-13}-\sqrt{3x^2-13x+13})(\sqrt{6x-13}+\sqrt{3x^2-13x+13}+1) \geqslant 0$$

Вторая скобка строго положительная, а значит на нее можно разделить (информация о подкоренных выражения при этом не теряется, так как оба корня есть и в первой скобке). Разделив, получим:

$$(\star) \iff \sqrt{6x-13} \geqslant \sqrt{3x^2-13x+13}$$

Это стандартное неравенство (схема 3 параграфа §3):

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 13 \geqslant 3x^2 - 13x + 13 \\ 3x^2 - 13x + 13 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[2; \dfrac{13}{3}\right] \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{13 - \sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\dfrac{13 + \sqrt{13}}{6}; \infty\right) \end{cases}$$

В итоге получаем: $x \in \left[\dfrac{13 + \sqrt{13}}{6}; \dfrac{13}{3}\right]$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{13 + \sqrt{13}}{6}; \dfrac{13}{3}\right]$.

Пример 27.

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = 4 \qquad (\star)$$

Решение:

Сделаем двойную замену:

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} = a; \;\; \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = b$$

Тогда наше уравнение запишется просто: $a + b = 4$. Осталось как-то найти второе условие связи между a и b. Обратимся к нашей замене и возведем каждое из замененных выражений в куб, получим:

$$a^3 = 9 - \sqrt{x+1}; \;\; b^3 = 7 + \sqrt{x+1}$$

Складывая последние два равенства, получим второе условие связи: $a^3 + b^3 = 16$. Итак:

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; b = 2.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим:

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: $x = 0$.

4.3 Использование свойств функций

Функции, которые встречаются нам в уравнениях и неравенствах могут обладать различными свойствами, такими например, как монотонность или ограниченность. Признаком хорошей математической культуры является способность заметить эти свойства, а они в свою очередь могут существенно помочь в упрощении задач, в особенности это касается громоздких примеров, где стандартные способы не позволяют продвинуться вперед. Рассмотрим две задачи, где ключом к решению станет монотонность, и еще две задачи на ограниченность.

Пример 28.

$$\sqrt{5 + x} + \sqrt{12 + x} = \sqrt{53 - x}$$

Решение:

Попытка решить это уравнение «в лоб» очевидно окажется довольно громоздкой и повлечет за собой долгую цепочку переходов. Попробуем подойти к задаче с другой стороны.

В левой части уравнения стоит функция строго возрастающая в области допустимых значений. Ее график строго возрастает. А вот в правой части стоит функция строго убывающая на ОДЗ. Так же строго убывает ее график.

Очевидно, что графики строго возрастающей и строго убывающей функции могут иметь в лучшем случае одну общую точку. Таким образом решение уравнения, если и есть, то оно одно. В данной задаче решение легко угадывается. Это $x = 4$.

Таким образом мы угадали корень и доказали, что других корней при этом быть не может. Это заканчивает решение.

<u>Ответ:</u> $x = 4$.

Пример 29 (МГУ, мехмат, 2001).

$$7x - 5|x-1| = 7\sqrt{2x+8} - 5|\sqrt{2x+8} - 1|$$

Решение:

Шаблонные методы решения здесь бессильны: конструкция содержит и корни и модули от разных выражений. Однако можно заметить некоторую симметричность данного уравнения. Рассмотрим для начала левую часть и обозначим:

$$f(x) = 7x - 5|x-1|$$

Посмотрим теперь, как ведет себя функция с разных случаях раскрытия модуля:

При $x < 1 \Rightarrow f(x) = 12x - 5$ - строго возрастающая функция;

При $x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 5$ - строго возрастающая функция.

Таким образом (помня при этом, что модуль - непрерывная функция) можно сделать вывод, что вне зависимости от случая раскрытия модуля функция $f(x)$ - строго возрастающая функция.

Заметим теперь, что правая часть исходного уравнения - это та же самая функция, о которой мы говорили, только от аргумента $\sqrt{2x+8}$. То есть наше уравнение можно записать в виде:

$$f(x) = f(\sqrt{2x+8})$$

Так как по доказанному выше функция $f(x)$ строго возрастающая, то имеет место взаимнооднозначное соответствие: каждому значению функции соответствует только один аргумент. Значит можно смело говорить о следующем:

$$f(x) = f(\sqrt{2x+8}) \Longleftrightarrow x = \sqrt{2x+8}$$

Это простое иррационально уравнение. Решим его:

$$x = \sqrt{2x+8} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x_1 = 4; x_2 = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 4$$

<u>Ответ:</u> $x = 4$.

Пример 30. (МФТИ, 2012)

$$\frac{2x+8}{8-\sqrt{x^2-2x+65}} \leqslant 1 \quad (\star)$$

Решение:

С первого взгляда становится ясно, что шаблонные методы здесь бесполезны. Перенос единицы влево только увеличит конструкцию неравенства, то же самое касается и домножения на сопряжённое. Поэтому разумно подумать об оценке множества значений. Итак, рассмотрим подкоренное выражение:

$$x^2-2x+65.$$

На множители разложить не выйдет (дискриминант отрицательный), но это не помешает нам оценить значения этого трёхчлена. Для этого выделим полный квадрат:

$$x^2-2x+65 = x^2-2x+1+64 = (x-1)^2+64$$

Первое слагаемое - полный квадрат, он неотрицателен при любом значении x. А значит всё выражение не может быть меньше 64. Таким образом:

$$x^2-2x+65 \geqslant 64 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+65} \geqslant 8 \Rightarrow 8-\sqrt{x^2-2x+65} \leqslant 0$$

Таким образом знаменатель исходного неравенства неположительный! Значит мы можем домножить на него, поменяв при этом знак неравенства. Единственное, о чём необходимо помнить: знаменатель исходного неравенства не мог быть равен нулю. А нулю он равен, когда подкоренное выражение равно 8, то есть при $x = 1$. Таким образом:

$$(\star) \iff \begin{cases} 2x+8 \geqslant 8-\sqrt{x^2-2x+65} \quad (1) \\ x \neq 1 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно (1). Это простое иррациональное неравенство (вторая схема второго параграфа)

$$(1) \iff \sqrt{x^2-2x+65} \geqslant -2x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x<0 \\ x^2-2x+65 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x \geqslant 0 \\ x^2-2x+65 \geqslant (-2x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \qquad x>0 \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ 3x^2+2x-65 \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \qquad x>0 \\ \begin{cases} x \leqslant 0, \\ (x+5)\left(x-\dfrac{13}{3}\right) \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff x \in [-5;\infty)$$

В итоге получаем:

$$(\star) \iff \begin{cases} 2x+8 \geqslant 8-\sqrt{x^2-2x+65} \quad (1) \\ x \neq 1 \quad (2) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in [-5;\infty) \\ x \neq 1 \end{cases} \iff x \in [-5;1) \cup (1;\infty)$$

Ответ: $x \in [-5;1) \cup (1;\infty)$.

Примечание: на самом деле последнюю задачу можно было решать и уже известным нам способом. Если перенести единицу влево, то домножение знаменателя на сопряженное (на сумму $8+\sqrt{x^2-2x+65}$) также приводит к неравеснтву, которое мы получили в процессе оценки.

Пример 31.

$$\frac{8}{\sqrt{x^2-10x+41}}+\frac{13}{\sqrt{x^2-10x+26}}\geqslant 15$$

Решение:

Осознав бессмысленность шаблонных методов поступим аналогично номеру 12. Рассмотрим подкоренные выражения и попытаемся их оценить:

$$x^2-10x+41=x^2-10x+25+16=(x-5)^2+16$$

Таким образом получили, что подкоренное выражение первой дроби больше или равно 16 (причем знак равенства достигается при $x=5$. Продолжая цепочку рассуждений получим:

$$(x-5)^2+16\geqslant 16\Rightarrow\sqrt{(x-5)^2+16}\geqslant 4\Rightarrow\frac{8}{\sqrt{x^2-10x+41}}\leqslant 2$$

Аналогично поступаем с подкоренным выражением второй дроби

$$x^2-10x+26=x^2-10x+25+1=(x-5)^2+1\geqslant 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-10x+26}\geqslant 1\Rightarrow\frac{13}{\sqrt{x^2-10x+26}}\leqslant 13$$

Таким образом в результате оценки получили, что сумма двух исходных дробей меньше или равна 15. А по условию их сумма больше или равна 15! Таким образом неравенство верно только в случае равенства сумму дробей 15. Это равенство достигается только в том случае, когда каждая из дробей принимает максимальное значение. А происходит это при $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

4.4 Подведение итогов

Для того, чтобы решить задачу по данной теме на различных олимпиадах, необходимо:

- Держать в голове ключевое правило: озведение неравенства (уравнения) в квадрат является равносильным переходом тогда и только тогда, когда обе части возводимого в квадрат неравенства (уравнения) заведомо одного знака. В частности **возведение в квадрат равносильно, если обе части неотрицательны**. То есть всякий раз, когда вы что-то возводите в квадрат, у вас на уровне рефлекса должно срабатывать правило: обе части неотрицательны (в случае, если это исходно не так, то неотрицательность нужно потребовать, добавив это как условие в систему);

- **Знать и понимать ключевые схемы равносильных переходов** (шесть наиболее классических схем, приведенных в Главе 2). Убедитесь, что вы их именно понимаете, а не знаете наизусть. Для этого напишите их перед собой, а затем вслух проговорите, почему такая схема шаг за шагом получилась, какая логика в данном подходе.

- **Помнить о трёх ключевых идеях, которые могут встретиться в решении**. Анализ последних 20 лет олимпиады Физтех показывает, что основных идей всего **три**:

  1) **Домножение на сопряжённое и анализ ОДЗ.** Предположим, что в числителе стоит разность корня и модуля. Знак этой разности вы не знаете, зато домножив на сопряжённое вы будете уверены в знаке (ведь сумма корня и модуля неотрицательна) и получите формулу разность квадратов, тем самым избавитесь от иррациональности. Так же это касается разности корней, разности модулей, и разности корня/модуля с выражение, которое заведомо неотрицательно (например, квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом и ветвями вверх). При этом важно помнить об ОДЗ. Ведь избавившись от корня, вы расширяете исходное ОДЗ. Поэтому стоит на уровне системы включить старое ОДЗ.

  Анализ ОДЗ, в свою очередь, очень эффективен с точки зрения того, что он позволяет оценить знак тех или иных выражений. Благодаря чему мы могли домножать на сопряженное и раскрывать модули в заранее неочевидных ситуациях.

  2) **Замена переменной.** Если исходное выражение можно разделить на «блоки», зависящие от x и при этом эти «блоки» могут быть легко получены друг через друга, то следует задуматься о замене.

3) **Использование свойств функций.** Использование свойств монотонности и ограниченности функций могут стать ключом к лаконичному и красивому решению задач. Особенно это касается наиболее громоздких задач, где традиционные подходы едва ли применимы.