

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»



В. А. Яворский

Математика глазами физиков

Методические материалы
по физике и математике



Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Яворский В. А.

А23 Математика глазами физиков: методические материалы по физике и математике / В. А. Яворский. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 92 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии дается обзор математических приемов и методов, использующихся при решении задач по физике, с примерами решения олимпиадных задач с муниципального и регионального этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Книга предназначена учащимся 8–11 классов школ с углубленным изучением физики и математики, учителям физики и математики, руководителям кружков и факультативов по физике, а также всем людям, увлекающимся физикой.

Яворский Владислав Антонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Содержание

Введение	4
Физика и математика в образовательном процессе	5
Отличия профессиональной математики от школьной	6
Вычислительное моделирование	8
8 класс	10
Тематические задачи	10
Задачи для самостоятельного решения	27
9 класс	29
Тематические задачи	29
Задачи для самостоятельного решения	47
10 класс	49
Тематические задачи	49
Задачи для самостоятельного решения	65
11 класс	67
Тематические задачи	67
Задачи для самостоятельного решения	89

Введение

Науки делятся на естественные, неестественные и противоестественные.

Л.Д. Ландау

... и сверхестественные (математика)

Неизвестный преподаватель кафедры общей физики МФТИ

Кто я — физик или математик? Этот вопрос себе задают многие школьники, размышляя о будущей профессии, о любимом предмете или об участии в олимпиадах. Более того, о связях и различиях между физикой и математикой размышляли и писали многие известные учёные — математики, физики, философы, педагоги.

А раз писали — добро пожаловать в поисковые системы в Интернет. Здесь же дадим краткую выжимку из определений и свойств этих наук.

Физика изучает реальный мир. Поскольку он бесконечно сложен, имеет огромное число степеней свободы, то главными целями физики являются упрощение системы, выделение её значимых наблюдаемых параметров и определение взаимосвязей между ними. Как говорил Л.Д. Ландау: «Главное в физике — это умение пренебрегать!». Например, при решении школьной задачи о полёте камня под углом к горизонту мы пренебрегаем кучей параметров: размерами и формой камня, сопротивлением воздуха, шарообразностью и вращением Земли, и т. д., сводя задачу к движению материальной точки в однородном поле тяжести. Естественно, это решение вряд ли будет применимо, например, при расчётах стрельбы из реальных пушек — там придётся использовать более сложную модель, решение которой оформлено в форме артиллерийских таблиц.

Математика имеет дело с абстрактными моделями и объектами, полученными из физики. И не только из физики — одно и то же уравнение может описывать модели в самых разных областях знаний. Например, математическая модель столкновения частиц в газе применима для расчёта скоростей химических реакций, для скорости распространения эпидемии и т. д.

Математика — это наука об абстрактных структурах, и числа — это только одна из множества интереснейших структур, которыми зани-

маются математики. Эти структуры позволяют создать язык описания явлений в физических, химических, биологических и иных системах, позволяя «на кончике пера» предсказать новые свойства или эффекты, делая математику универсальным инструментом для изучения естественных наук.

Однако математические построения сами по себе не имеют отношения к свойствам окружающего мира, это чисто логические конструкции. Они приобретают смысл физических утверждений, только когда применяются к реальным физическим системам. Как это уже часто случалось, для одних и тех же физических явлений разными учёными создавалось несколько логически непротиворечивых математических моделей, и только эксперимент позволял делать выбор в пользу одной из них. Итак, физика и математика — это разные науки, с разными подходами к изучаемым объектам, но с необходимостью совместного применения для успешного решения поставленных задач.

Физика и математика в образовательном процессе

Математика — королева и служанка наук.

Эрик Темпл Белл

Давайте задумаемся: а почему физику начинают учить только в 7 классе, а не с 1 класса? Для ответа на этот вопрос давайте посмотрим на некоторые уравнения в математике и физике, которые изучают в школе и техническом вузе:

- 1 класс: $1 + 1 = 2$;
- 7–8 класс: $S = v \cdot t$, $m = \rho \cdot V$;
- 9 класс: $\vec{F} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$;
- 10 класс: $v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$;
- 11 класс: $a = x'' = -X_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$;
- 1 курс: $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$;
- 4 курс: $\left(i \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right)^2 - c^2 (\hat{\sigma}, (\hat{\mathbf{p}} - \alpha q A))^2 = m^2 c^4$.

Вывод: для изучения некоторых разделов физики необходим определенный математический аппарат. При недостаточной математической подготовке при решении олимпиадных и не только задач по физике начинают возникать проблемы чисто математического плана — школьники не могут правильно посчитать угол столкновения шаров, найти максимум функции в виде квадратичного трехчлена, выразить для данной формулы одну величину через другие, и т. д.

Учите математику!

Отличия профессиональной математики от школьной

Решение трудной математической проблемы можно сравнить с взятием крепости.

Наум Яковлевич Виленькин

Осел, груженный золотом, возьмёт любую крепость.

Филипп II Македонский

Математика окружает нас. Бытовая техника, компьютеры, приложения для смартфонов, транспорт, электростанции, жилые здания и предприятия — для их проектирования и оптимизации использованы математические расчеты. С созданием ЭВМ все сложные математические расчеты производятся с помощью компьютеров. Собственно работа профессионального физика или математика заключается в создании подходящей модели, адекватно описывающей данную естественную или искусственную систему, написание программы для ЭВМ (10%), а следующие 90% времени уходит на расчеты на компьютере (или фиксировании с помощью компьютера результатов наблюдений или физических экспериментов) и анализ получившихся результатов (опять-таки при помощи компьютера).

Среди профессиональных физиков и математиков, решающих прикладные задачи, не проводятся олимпиады. Их цель — быстро и качественно сделать проект, уложившись в утвержденную смету расходов.

Вот некоторые отличия от школьной математики (В.В. Посметьев «Ультраматематика»):

- Числа не целые, а дробные с мантиссой и порядком. Например: $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

- Результаты измерений и функции задаются таблицей из чисел. В реальных системах нет непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций. Интегрирование и дифференцирование производятся численно (быстро и много-много раз);
- Любая измеренная или рассчитанная величина имеет погрешность, т. е. лежит в некотором диапазоне значений. Соответственно допустимы приближенные методы решения — лишь бы для заказчика результат был приемлем;
- Практически нет вычислений в аналитическом виде. Математик формулирует и программирует задачи, а решает их компьютер;
- Не существует градации оценок «отлично», «хорошо», и т. д. за частичное решение заданий, как в школе или в вузе. Не дают золотые, серебряные и бронзовые медали или дипломы, как на предметных школьных олимпиадах. Проект должен быть сделан на 100%, иначе следуют штрафные санкции;
- В отличие от корректно сформулированных школьных задач, в реальных проектах есть только проблема. Исходно неизвестны ни методы, ни требуемые исходные данные, и даже решится ли данная проблема;
- В школе решение задачи оканчивается ответом. Исследовательская задача или проект после этого только начинаются: как входные параметры влияют на результат? Какие наборы значений параметров являются оптимальными для разных режимов работы установки?
- В прикладных задачах практически нет логических доказательств и выводов. Нет нескольких методов решения одной и той же задачи. Потребителей интересует быстрое получение конечного результата;
- Нет запрета на использование вычислительной техники и языков программирования. Нет запрета на поиск ответов и подходящих методов в Интернет, в книгах, справочниках, научных статьях. Нет запрета на помощь и консультацию других людей, лучше разбирающихся в области знаний, в которой реализуется проект;
- Нет контрольных, повторения, новых тем. Реализация проектов — довольно однообразный и монотонный труд. Что позволяет его оптимизировать и сделать максимально эффективным и производительным.

Современные математика и физика при решении прикладных задач ориентированы на мощные компьютеры (суперкомпьютеры). Пожалуй, этому стоит начинать учиться уже в школе.

Вычислительное моделирование

Работает? Не трогай.
Неизвестный программист

Как уже говорилось ранее, эксперимент — это основа проверки жизнеспособности физической теории. Но что делать, если эксперимент нельзя провести? Для этого могут быть несколько причин:

- Эксперимент невозможен технически;
- Эксперимент слишком дорог;
- Эксперимент нарушает этические нормы или несет существенные риски для экологии, экспериментаторов, объектов исследования, и т. д.

В таких случаях либо ограничиваются наблюдением естественных событий, либо прибегают к вычислительному моделированию.

Одним из мощных методов моделирования является метод молекулярной динамики, основанный на разбиении сложной системы на элементарные составляющие объекты и изучении временной эволюции системы взаимодействующих объектов через интегрирование их уравнений движения. С точки зрения математики, для каждого элементарного объекта (частицы) записывается уравнение движения (2-й закон Ньютона), в правой части которого в виде векторной суммы сил учтены взаимодействия с другими частицами в виде некоторого потенциала. Поскольку частиц много, таких уравнений соответственно тоже много, и существуют как эффективные алгоритмы и программные пакеты для решения систем таких уравнений, так и суперкомпьютеры, применяющиеся для решения прикладных задач.

В частности, ожидается, что уже в 2018 году будет создан суперкомпьютер производительностью более 1 эксафлопс (выполняющий более 10^{18} операций с плавающей запятой в секунду). Для сравнения, 8-поточковый процессор Intel core i7 имеет производительность порядка

100 гигафлопс (10^{11} операций в секунду), а графические адаптеры NVidia могут достигать производительности 10 терафлопс (10^{13} операций в секунду), что в сочетании с соответствующим программным обеспечением CUDA делают их привлекательными для создания домашних компактных вычислительных центров.



Рис. 1

1 эксафлопс — много это или мало для решения вычислительных задач в различных областях науки? При учёте попарных взаимодействий, сложность решения зависит от квадрата числа частиц, т. е. на текущий момент мы можем в реальном времени моделировать системы из примерно $10^8 - 10^9$ частиц. А ведь в одном моле вещества число молекул равно $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$! С другой стороны, прокариотическая клетка имеет характерный объём 1 мкм^3 , в котором содержится порядка $10^{10} - 10^{11}$ атомов. Так что в течение 5 – 10 лет можно ожидать впечатляющих результатов по моделированию жизнедеятельности организмов на клеточном уровне.

8 класс

Тематические задачи

Подобие фигур, проценты

Задача 8.1^[10]. В ящик с жёсткими стенками, имеющий форму куба объёмом 1 м^3 и массой 300 кг , насыпали стальные шары диаметром 20 мм и плотностью 7800 кг/м^3 . Затем ящик потрясли и добавили в него столько шаров, что больше уже не получается засунуть ни одного шара (то есть получилась максимально плотная упаковка шаров в ящике). Суммарная масса шаров и ящика получилась равной 6072 кг . Далее в этот же ящик с шарами досыпали ещё мелких шариков диаметром 1 мм , сделанных из того же материала, и снова «утрясли» ящик до максимально возможного заполнения, досыпая при необходимости мелкие шарики. Оцените, какой после этого стала суммарная масса ящика с шарами и с шариками.

Решение. Масса насыпанных в ящик крупных шаров равна 5772 кг , а занимаемый ими объём равен $(5772 \text{ кг}) / (7800 \text{ кг/м}^3) = 0,74 \text{ м}^3$. Следовательно, после заполнения ящика крупными шарами металл занимает только 740 литров из 1000 (74%). Оставшаяся часть объёма ящика (260 литров) заполнена воздухом. Так как диаметр маленького шарика в 20 раз меньше диаметра большого шара (а объём — в 8000 раз), то можно пренебречь разностью кривизны стенок ящика и поверхности больших шаров и считать, что маленькие шарики засыпаются в пустой ящик объёмом 260 литров. После засыпания в ящик мелких шариков, аналогично предыдущему случаю, 74% от 260 литров окажутся заполненными металлом. То есть суммарная масса ящика с шарами и с шариками будет равна $(6072 \text{ кг}) + 0,74 \cdot (0,26 \text{ м}^3) \cdot (7800 \text{ кг/м}^3) \approx 7572 \text{ кг}$.

Ответ: 7572 кг .

Подобие фигур, операции со степенями

Задача 8.2. Высота Эйфелевой башни составляет 325 м, а масса равна 10000 тонн. Чему будет равна масса статуэтки в виде Эйфелевой башни, если она является её точной копией, уменьшенной в 1000 раз?

Решение. Если линейные размеры статуэтки в $k = 10^3$ раз меньше оригинала (0,325 м), то её объём будет меньше уже в $k^3 = 10^9$ раз. Поскольку масса пропорциональна объёму, то масса статуэтки будет в 10^9 раз меньше массы оригинала, которая равна 10^4 тонн = 10^7 кг = $= 10^{10}$ г. Следовательно, масса статуэтки равна 10 грамм.

Ответ: 10 грамм.

Подобие фигур, анализ полученного ответа

Задача 8.3^[13]. Куб из однородного материала плавает, погрузившись на глубину h в жидкость. Верхняя грань куба горизонтальна. На какую глубину H в этой же жидкости погрузится куб, имеющий вдвое бóльшую плотность и вдвое бóльшую длину ребра?

Решение. Предположим, что в обоих случаях верхняя грань куба горизонтальна. Запишем условие плавания куба с длиной ребра a , имеющего плотность ρ , в жидкости с плотностью $\rho_{\text{ж}}$:

$$\rho_{\text{ж}} h a^2 g = \rho a^3 g$$

или

$$h = a \frac{\rho}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Тогда для второго куба

$$\rho_{\text{ж}} h (2a)^2 g = \rho (2a)^3 g$$

или

$$H = 4a \frac{\rho}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Из этих уравнений следует, что $H = 4h$.

Но это не окончательный ответ. Дело в том, что если $H = 4h > 2a$, то большой куб утонет. Это накладывает более жёсткое условие на плавание маленького куба. Так как $4h > 2a$, то $h < a/2$.

Иными словами, глубина погружения маленького куба не должна превышать $a/2$. В противном случае большой куб утонет.

Другое замечание касается того, как куб плавает в жидкости. Можно показать, что в некотором диапазоне плотностей (а именно, $0,36\rho_{\text{ж}} < \rho < 0,64\rho_{\text{ж}}$) устойчивое положение для плаванья куба — ребром вверх, вне этого диапазона — гранью вверх. Доказательство этого факта выходит за рамки программы 8 класса.

Ответ: $4h$, если $h < a/2$.

Делимость чисел, переход между единицами измерения

Задача 8.4^[12]. Кубики сахара–рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто(m) = 500 г, 168 штук». Протяжённость самого длинного ребра коробки $c = 112$ мм. Вдоль самого короткого ребра коробочки укладывается ровно 3 кусочка сахара. Чему равна плотность сахара-рафинада?

Примечание. Нетто — масса продукта без учёта массы упаковки (тары). Достоверно известно, что плотность сахара–рафинада не превышает $4 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Так как в коробочке уложено 3 слоя кусочков сахара, то в одном слое $n = 168/3 = 56$ кусочков. Число 56 можно разложить на простые множители: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$. Следовательно, один слой может иметь размеры $28 \cdot 2$ кусочка, $14 \cdot 4$ кусочка или $7 \cdot 8$ кусочков. Первый вариант противоречит условию, так как тогда вдоль самого короткого ребра помещалось бы 2 кусочка.

Таким образом, вдоль длинного ребра можно положить либо 14, либо 8 кусочков и, соответственно, размер ребра кубика сахара равен либо $a_1 = 112 \text{ мм}/14 = 8 \text{ мм}$, либо $a_2 = 112 \text{ мм}/8 = 14 \text{ мм}$.

В первом случае:

Общий объём сахара равен

$$V_1 = 8 \text{ мм} \cdot 8 \text{ мм} \cdot 8 \text{ мм} \cdot 168 \text{ штук} = 86016 \text{ мм}^3 \approx 86 \text{ см}^3.$$

Плотность сахара равна

$$\rho_1 = m/V_1 = 500 \text{ г}/86 \text{ см}^3 = 5,8 \text{ г}/\text{см}^3 = 5800 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Такая плотность противоречит условию.

Во втором случае:

Общий объём сахара равен

$$V_2 = 14 \text{ мм} \cdot 14 \text{ мм} \cdot 14 \text{ мм} \cdot 168 \text{ штук} = 460992 \text{ мм}^3 \approx 461 \text{ см}^3.$$

Плотность сахара равна

$$\rho_2 = m/V_1 = 500 \text{ г}/461 \text{ см}^3 = 1,08 \text{ г}/\text{см}^3 = 1080 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Ответ: 1080 кг/м³.

Теорема Пифагора, свойства окружности, касательная, малые параметры

Задача 8.5^[7]. На море штиль. Отец и сын стоят у самой кромки воды. Расстояние от уровня воды до уровня глаз отца $H = 160$ см, а до уровня глаз сына $h = 80$ см. Во сколько раз горизонт дальше для отца, чем для сына?

Решение. Пусть радиус Земли равен R (см. рис 2).

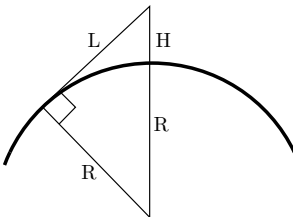


Рис. 2

Тогда по теореме Пифагора можно найти расстояние, на котором отец видит горизонт:

$$L_0 = \sqrt{(R + H)^2 - R^2} = \sqrt{2RH + H^2}.$$

Воспользуемся тем, что радиус планеты во много раз больше роста человека ($R \gg H$) и можно пренебречь вторым слагаемым:

$$L_0 = \sqrt{2RH}.$$

Аналогично находим расстояние, на котором горизонт видит сын: $L_c = \sqrt{2Rh}$. Тогда

$$\frac{L_0}{L_c} = \sqrt{\frac{H}{h}} = \sqrt{2} \approx 1,4.$$

Примечание. Если не использовать приближение, то в ответ войдёт радиус Земли, который не дан в условии.

Ответ: 1,4.

Среднее значение двух величин, решение линейного уравнения

Задача 8.6^[7]. Первую часть пути машина проехала со скоростью $2v$, а вторую часть со скоростью $6/7v$. В результате всего движения средняя скорость машины оказалась равна v . Во сколько раз вторая часть пути длиннее первой?

Решение. Данная задача иллюстрирует тот факт, что иногда число уравнений может быть меньше количества неизвестных величин.

Пусть S_1 и S_2 — длины первой и второй частей пути, а t_1 и t_2 — времена, затраченные на преодоление этих путей. Они связаны друг с другом соотношениями $t_1 = \frac{S_1}{2v}$ и $t_2 = \frac{S_2}{6v/7}$. Поэтому средняя скорость равна:

$$v = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{2v} + \frac{S_2}{6v/7}},$$

отсюда

$$1 = \frac{1 + S_2/S_1}{1/2 + \frac{S_2/S_1}{6/7}},$$

или

$$\frac{1}{2} + \frac{7S_2}{6S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1},$$

тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = 3.$$

Ответ: $\frac{S_2}{S_1} = 3$.

Центр масс, площади геометрических фигур, свойства треугольников, проекции

Задача 8.7. Определить координаты центра масс трапеции (см. рис. 3) в заданной системе координат.

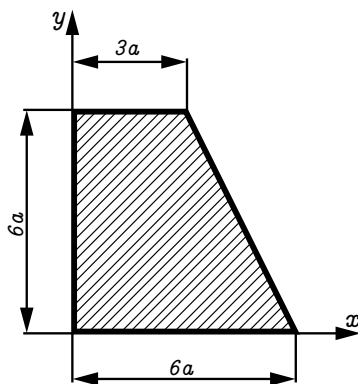


Рис. 3

Решение. Данная задача имеет несколько методов решения.

Экспериментальный. Вырежем данную трапецию из листа миллиметровой бумаги (для простоты $a = 1$ см). Выберем любую точку трапеции, которая заведомо не является центром масс (например, вблизи любой вершины), и подвесим на вертикальной поверхности (стене комнаты или стенке шкафа) на кнопке так, чтобы фигура могла свободно вращаться. К этой же кнопке прикрепим вертикальный отвес на тонкой нити, которая, исходя из равенства сил и моментов сил в положении равновесия, будет проходить через центр масс, проведем прямую линию вдоль нити. Затем выберем новую точку на трапеции и вновь ее подвесим. Проведем вдоль нити прямую линию, которая пересечется с предыдущей прямой в точке центра масс.

Учитывая масштаб, получаем: $x_c \approx 2,3a$, $y_c \approx 2,7a$ (с погрешностью $0,1a$).

Геометрический. По аналогии с предыдущим пунктом, нарисуем трапецию на листе миллиметровой бумаги (для простоты $a = 1$ см).

Проведём в трапеции диагональ, которая разделит трапецию на 2 треугольника. Как известно из курса планиметрии, медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны, делит площадь треугольника пополам, и, следовательно, проходит через центр масс треугольника. Поэтому точка пересечения 3 медиан треугольника — это его центр масс.

В каждом из треугольников проведём медианы и определим центр масс каждого из треугольников. Центр масс всей трапеции будет лежать на отрезке, соединяющем точки центра масс треугольников. Далее в трапеции проведём вторую диагональ, которая разобьёт её на 2 треугольника. Повторяя операцию, описанную ранее, находим ещё один отрезок, соединяющий их центры масс. Он пересечёт предыдущий отрезок в центре масс трапеции.

Учитывая масштаб, получаем: $x_c \approx 2,3a$, $y_c \approx 2,7a$ (с погрешностью $0,1a$).

Через площади фигур. Вспомним определение центра масс системы из 2 объектов:

$$x_c = \frac{x_{c1}m_1 + x_{c2}m_2}{m_1 + m_2}, \quad y_c = \frac{y_{c1}m_1 + y_{c2}m_2}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку масса плоской фигуры пропорциональна её площади, можно записать:

$$x_c = \frac{x_{c1}S_1 + x_{c2}S_2}{S_1 + S_2}, \quad y_c = \frac{y_{c1}S_1 + y_{c2}S_2}{S_1 + S_2}.$$

Разобьём сложную фигуру на простые фигуры, площади которых можно вычислить (см. рис. 4), и положения центров масс которых известны. В данном случае это прямоугольник и прямоугольный треугольник.

У прямоугольника центр масс лежит в точке симметрии, её координаты $x_{c1} = 1,5a$, $y_{c1} = 3a$. Площадь прямоугольника равна $S_1 = 6a \cdot 3a = 18a^2$.

У треугольника центр масс лежит в точке пересечения медиан, которые в этой точке делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. В аналогичном отношении делятся и проекции медиан на оси координат. Значит, координаты центра масс прямоугольного треугольника:

$$x_{c2} = 3a + 3a/3 = 4a, \quad y_{c2} = 2 \cdot 3a/3 = 2a.$$

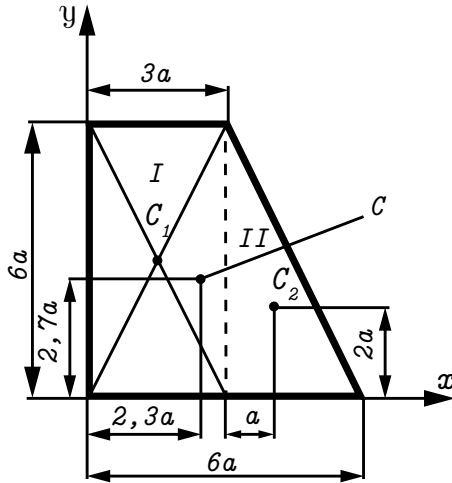


Рис. 4

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $S_2 = 9a^2$. Подставляем получившиеся значения в формулу для центра масс системы:

$$x_c = \frac{1,5a \cdot 18a^2 + 4a \cdot 9a^2}{18a^2 + 9a^2} = \frac{7}{3}a \approx 2,3a,$$

$$y_c = \frac{3a \cdot 18a^2 + 2a \cdot 9a^2}{18a^2 + 9a^2} = \frac{8}{3}a \approx 2,7a.$$

Через дополнительный треугольник. Дополним рисунок прямоугольным треугольником с катетами $6a$ и $3a$, приставленным меньшим катетом к верхнему основанию трапеции. Получившийся большой прямоугольный треугольник со сторонами $12a$ и $6a$ подобен маленькому с коэффициентом подобия 2, а его площадь S в 4 раза больше, чем

площадь S_1 маленького треугольника: $S_1 = S/4$. Площадь трапеции: $S_2 = S - S_1 = 3S/4$.

Центр масс большого треугольника находится на высоте

$$y_c = \frac{1}{3}(6a + 6a) = 4a.$$

Площадь верхнего маленького треугольника находится на высоте

$$y_{c1} = 6a + \frac{1}{3}6a = 8a.$$

Подставляем величины в формулу для координат центра масс большого треугольника:

$$y_c = \frac{y_{c1}S_1 + y_{c2}S_2}{S_1 + S_2} = \frac{y_{c1}}{4} + \frac{3y_{c1}}{4},$$

$$y_{c2} = \frac{4y_c - y_{c1}}{3} = \frac{8}{3}a \approx 2,7a.$$

Аналогично получаем $x_{c2} = \frac{7}{3}a \approx 2,3a$.

Ответ: $x_c = \frac{7}{3}a \approx 2,3a$, $y_{c2} = \frac{8}{3}a \approx 2,7a$.

Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными (теплота)

Задача 8.8^[14]. Чайник с водой при температуре $t_0 = 20$ °C нагрелся на газовой горелке до $t_1 = 40$ °C за время $\tau_1 = 2$ мин. Желая ускорить нагрев, половину воды вылили, и ещё через $\tau_2 = 1$ мин температура воды достигла $t_2 = 55$ °C. Так как и это показалось медленным, вылили ещё половину оставшейся воды, но при этом случайно задели кран горелки, вдвое убавив её мощность. Через какое время τ_3 чайник все-таки нагреется до $t_3 = 100$ °C? Потерями тепла в окружающую среду можно пренебречь.

Решение. Так как после первого уменьшения массы воды вдвое не произошло увеличения вдвое скорости роста температуры, пренебрегать

теплоёмкостью чайника нельзя. Запишем уравнения теплового баланса для трёх случаев:

$$N\tau_1 = C_0(t_1 - t_0) + C(t_1 - t_0),$$

$$N\tau_2 = C_0(t_2 - t_1) + \frac{C}{2}(t_2 - t_1),$$

где C_0 и C — теплоёмкости чайника и начальной массы воды соответственно. Из системы уравнений легко получить, что $2C_0 = C$. Для 3-го этапа нагрева:

$$\frac{N}{2}\tau_3 = C_0(t_3 - t_2) + \frac{C}{4}(t_3 - t_2).$$

Решая систему из третьего и первого уравнений, получаем, что $\tau_3 = 4,5$ мин.

Ответ: 4,5 мин.

Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными (электричество)

Задача 8.9. Дана электрическая цепь (см. рис. 5), состоящая из сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , диода, амперметра и источника тока с ЭДС E . Все элементы цепи являются идеальными. Определить силу тока, которую показывает амперметр.

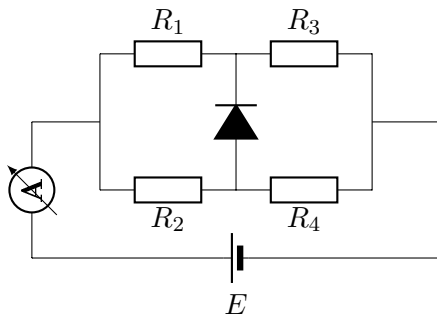


Рис. 5

Решение. Напомним правила Кирхгофа:

1. Для любого узла электрической цепи сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из него: $\sum I_{\text{вт}} = \sum I_{\text{выт}}$.
2. Для любого контура электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС, входящих в этот контур, равна алгебраической сумме падений напряжений на других элементах этого контура, где под словом «алгебраическая» понимается определенное правило знаков: $\sum_i E_i = \sum_j U_j$.

Для решения задачи диод можно заменить на идеальный проводник, если направление тока совпадает с направлением диода (снизу вверх — рис. 6), и на отсутствие проводника, если направление тока — противоположное (сверху вниз — рис. 7).

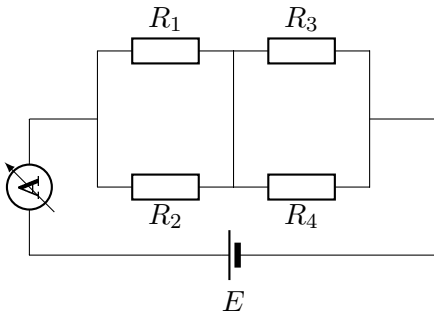


Рис. 6

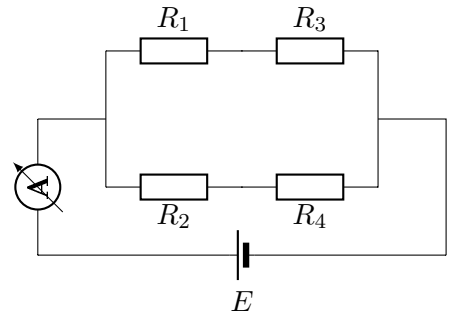


Рис. 7

Первая схема равносильна последовательному соединению параллельных соединений резисторов R_1 и R_2 и резисторов R_3 и R_4 .

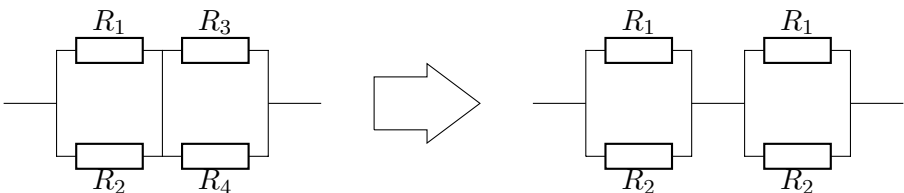


Рис. 8

Её эквивалентное сопротивление:

$$R_{\text{экв1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Следовательно, ток через амперметр будет

$$I = \frac{E}{R_{\text{экв1}}} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}. \quad (1)$$

Для второй схемы эквивалентное сопротивление равно

$$R_{\text{экв2}} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Следовательно, ток через амперметр будет

$$I = \frac{E}{R_{\text{экв2}}} = \frac{E(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}. \quad (2)$$

Определим направление тока I_D через диод. Рассмотрим схему на рисунке 6. Пусть через сопротивление R_1 идет ток I_1 , через сопротивление R_2 — ток I_2 , через сопротивление R_3 — ток I_3 , через сопротивление R_4 — ток I_4 , (во всех случаях слева направо). Из 1-го правила Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2, \quad I = I_3 + I_4.$$

Из 2-го правила Кирхгофа для каждого из контуров, содержащих сопротивление, можно записать:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, \quad I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0.$$

Из этой системы уравнений можно найти все неизвестные токи I_1 , I_2 , I_3 , I_4 :

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $I_2 = I - I_1$ и подставим во второе уравнение системы:

$$I_1 R_1 - (I - I_1) R_2 = 0,$$

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 = I R_2.$$

Отсюда получаем:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I_2 = I - I_1 = I - I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Аналогично:

$$I_3 = I \frac{R_4}{R_3 + R_4}, \quad I_4 = I \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Для нахождения силы тока I_D запишем 1-е правило Кирхгофа, например, для узла между сопротивлениями R_1 и R_3 . В узел входят токи I_1 и I_D , выходит I_3 . Отсюда:

$$I_1 + I_D = I_3,$$

$$I_D = I_3 - I_1 = I \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = I \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Если $R_1 R_4 > R_2 R_3$, то применяем формулу (1), если $R_1 R_4 < R_2 R_3$, то применяем формулу (2).

Ответ: при $R_1 R_4 > R_2 R_3$: $I = \frac{E}{R} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}};$

при $R_1 R_4 < R_2 R_3$: $I = \frac{E}{R} = \frac{E(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$

Свойства прямой линии

Задача 8.10^[14]. Если в сосуд объёмом V_0 , доверху заполненный жидкостью, опускать камни плотностью $\rho_k = 2,2 \text{ г/см}^3$, то в зависимости от их объёма V ($V < V_0$) средняя плотность содержимого сосуда будет изменяться, как показано на графике (см. рис. 9). Определите объём сосуда V_0 и плотность жидкости ρ_0 .

Решение. Проще всего решать задачу не аналитически, а продлить (экстраполировать) график до объёма 0 дм^3 и до плотности $2,2 \text{ г/см}^3$.

В первом случае мы получим плотность жидкости $0,8 \text{ г/см}^3$, а во втором — объём сосуда 14 дм^3 .

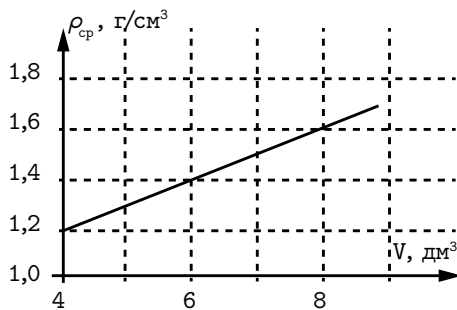


Рис. 9

Прямая линия проходит через точки $(0 \text{ дм}^3; \rho_0)$ и $(V_0; \rho_k)$. Уравнение прямой линии:

$$\rho_{\text{ср}} = \rho_0 + \frac{\rho_k - \rho_0}{V_0} V = 0,8 + 0,1V.$$

Ответ: $0,8 \text{ г/см}^3$, 14 дм^3 .

Правильный шестиугольник

Задача 8.11^[7]. Вещество графен представляет собой плоский слой атомов углерода, расположенных в вершинах одинаковых шестиугольников (на рисунке 10 атомы углерода показаны кружками). Площадь одного такого шестиугольника составляет $0,00524$ квадратных нанометра. Найдите количество атомов углерода в квадратном образце графена размером 10 нанометров на 10 нанометров. В одном метре — 1 миллиард нанометров.

Решение. Поскольку в каждой вершине сходятся три шестиугольника, можно считать, что в каждом шестиугольнике в одной вершине сосредоточена $1/3$ атома. Таким образом, на каждый шестиугольник приходится 2 атома.

В исследуемом образце $10 \cdot 10 / 0,00524 \approx 19000$ шестиугольников, или $19000 \cdot 2 = 38000$ атомов.

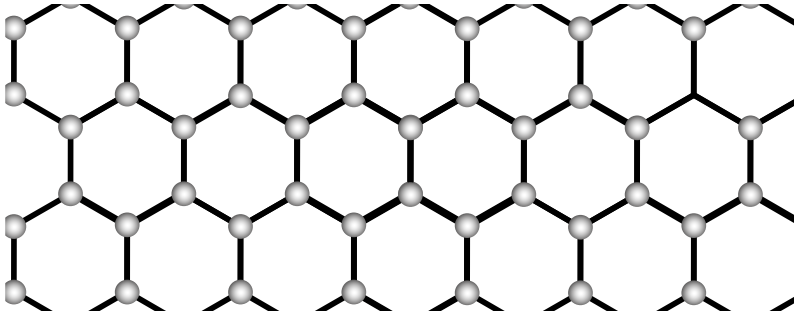


Рис. 10

Ответ: 38 тыс. атомов.

Графическое решение линейных неравенств, свойства прямых линий

Задача 8.12^[7]. Школьница Алиса проводит опыты с подвешенной к потолку пружинной, кубиком, большим числом одинаковых шариков и гирями. Алиса обнаружила, что подвешенный к пружине кубик растягивает её сильнее, чем шарик и гиря массой 300 г, но слабее, чем шарик и гиря массой 500 г. Также Алиса обнаружила, что подвешенный к пружине кубик растягивает пружину сильнее, чем три шарика, но слабее, чем четыре шарика. Какой может быть масса шарика? А масса кубика? Известно, что величина растяжения пружины прямо пропорциональна массе подвешенного к ней груза.

Решение. Пусть $m_{\text{к}}$ — масса кубика в граммах, $m_{\text{ш}}$ — масса шарика в граммах. По условию, выполняются неравенства: $m_{\text{ш}} + 300 < m_{\text{к}} < m_{\text{ш}} + 500$ и $3m_{\text{ш}} < m_{\text{к}} < 4m_{\text{ш}}$. Для удобства можно изобразить эти неравенства на графике (см. рис. 11).

Возможные значения масс шарика и кубика образуют заштрихованную область. Минимальные массы шарика и кубика определяются из пересечения линий $m_{\text{ш}} + 300 = m_{\text{к}}$ и $m_{\text{к}} = 4m_{\text{ш}}$, то есть $m_{\text{ш}} = 100$ г, $m_{\text{к}} = 400$ г. Максимальные массы шарика и кубика определяются из пересечения линий $m_{\text{к}} = m_{\text{ш}} + 500$ и $3m_{\text{ш}} = m_{\text{к}}$, то есть $m_{\text{ш}} = 250$ г, $m_{\text{к}} = 750$ г.

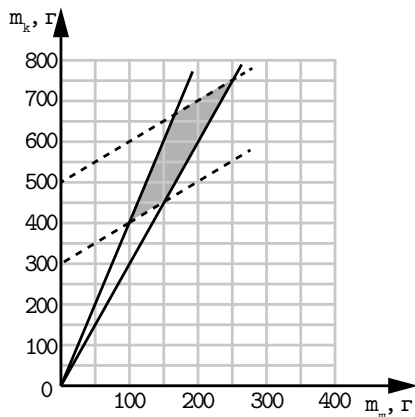


Рис. 11

Ответ: Масса шарика может лежать в промежутке от 100 г до 250 г, а масса кубика — в промежутке от 400 г до 750 г.

Приближенное вычисление площади сложных фигур

Задача 8.13^[10]. На листе бумаги изображена клякса, также даны карандаш, линейка, ножницы. Вырежьте кляксу из листа. Определите площадь кляксы.

Решение. Для определения площади кляксы S наносим на неё сетку из клеток размером 0,5 см на 0,5 см. Подсчитываем общее число целых клеток N_1 и не целых клеток N_2 . Если граница кляксы пересекает клетки случайным образом и таких клеток много, то в среднем их площадь будет равна половине площади целой клетки. Умножаем N_1 на $0,25 \text{ см}^2$, N_2 на $0,125 \text{ см}^2$ и суммируем результаты.

Тригонометрические функции для острого угла прямоугольного треугольника

Задача 8.14^[5]. При наблюдении с Земли за планетой X, обращающейся вокруг Солнца по круговой орбите, оказалось, что максимальный угол между направлением с Земли на Солнце и на планету X равен 46°

(см. рис. 12). Что это за планета? Расстояние до Солнца в астрономических единицах для разных планет: Меркурий — 0,39; Венера — 0,72; Земля — 1,00; Марс — 1,52; Юпитер — 5,20.

Решение. Рассмотрим треугольник, в вершинах которого расположены Земля, Солнце и планета X (см. рис. 13).

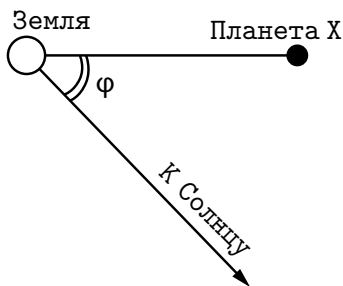


Рис. 12

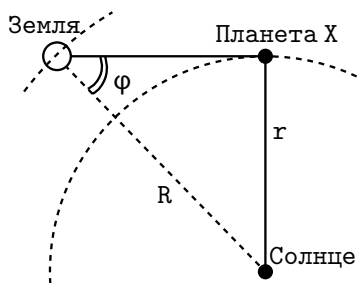


Рис. 13

По условию угол φ — максимальный, поэтому угол при планете X — прямой. Пусть r — радиус орбиты планеты X.

$$r = R \sin \varphi = 1 \text{ а.е.} \cdot \sin(46^\circ) \approx 1 \text{ а.е.} \cdot 0,72 = 0,72 \text{ а.е.}$$

Из списка данных по планетам видим, что планета X — это Венера.

Ответ: Венера.

Равенство углов, вертикальные углы

Задача 8.15. На бильярдном столе (длиной a и шириной b) в некоторой точке покоится шар. В каком направлении надо ударить шар кием, чтобы он попал в заданную лузу после N ударов о длинные борта бильярда? Потерями энергии при движении шара и ударах шара о борт пренебречь.

Решение. В рамках данной задачи можно считать, что шар можно рассматривать как материальную точку, а угол «падения» шара на борт равен углу «отражения». Представим борта в качестве зеркал, в ко-

торых отразим множество изображений бортов и луз. Поскольку вертикальные углы равны, задача сводится к нахождению «отраженной» лузы, при попадании в которую шар должен N раз пересечь границы бильярда (см. рис. 14 для $N = 3$).

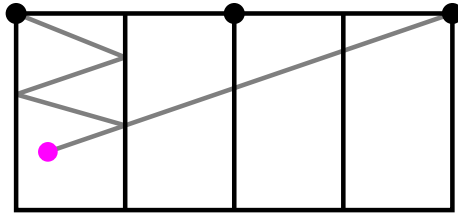


Рис. 14

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.16. В одном галлоне 3,79 литра. Один баррель (barrel — бочка) лёгкой нефти весит 111 кг. Удельная плотность нефти $\rho_n = 698 \text{ кг/м}^3$. Во сколько раз баррель больше галлона?

Задача 8.17. Расстояния между звёздами столь велики, что их принято измерять в астрономических единицах или парсеках. Одна астрономическая единица (а.е.) численно равна среднему расстоянию от Земли до Солнца $1 \text{ а.е.} = R_Z \approx 150 \text{ млн. км}$. Один парсек — это расстояние, с которого радиус земной орбиты виден под углом в одну угловую секунду. В одном градусе содержится 60 угловых минут ($1^\circ = 60'$), а в одной угловой минуте содержится 60 угловых секунд ($1' = 60''$). Скорость света 300 тысяч км/с. Сколько астрономических единиц содержится в одном парсеке? За сколько лет свет преодолеет расстояние в 1 парсек? Отношение длины окружности к её диаметру равно $\pi = 3,14$.

Задача 8.18. Постройте график и приближённо вычислите площадь под графиком функции $y = x^2$ при максимальном значении по оси абсцисс $x_{max} = 4$. Сравните значение с точной формулой для площади под параболой $S(x_{max}) = x_{max}^3/3$, вычислите относительную погрешность.

Задача 8.19. На середину плоской льдины толщиной $H = 60 \text{ см}$, плавающей в воде, ставят маленький медный кубик, в результате чего глу-

бина погружения льдины увеличивается на $\Delta h = 0,5$ см. Чему станет равна глубина $H_{\text{п}}$ погружения этой льдины, если на её середину вместо медного кубика поставить железный кубик с вдвое большей стороной? Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³, плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8900$ кг/м³, плотность железа $\rho_{\text{ж}} = 7800$ кг/м³.

9 класс

Тематические задачи

Уравнение параболы, радиус кривизны, тригонометрические функции

Задача 9.1. Пушка, стоящая на горизонтальной плоскости, делает выстрел под углом α к горизонту. Начальная скорость снаряда v_0 . Считая поле сил тяжести однородным с ускорением свободного падения g и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: уравнение траектории, по которой будет лететь снаряд; уравнение траектории для случая, когда дальность полета максимальна; радиус кривизны траектории в её наиболее высокой точке.

Решение. Выберем декартову систему координат, как показано на рисунке 15.

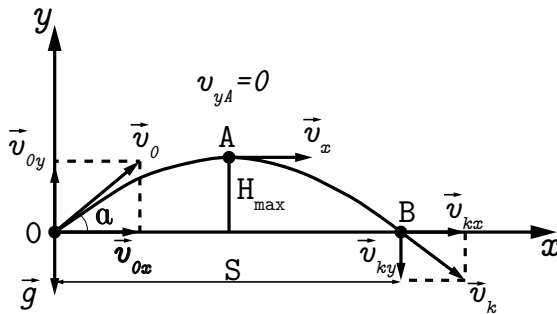


Рис. 15

Разложим начальные перемещение, скорость и ускорение на составляющие по координатам:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0, & y_0 &= 0, \\
 v_{0x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{0y} &= v_0 \sin \alpha, \\
 a_x &= 0, & a_y &= -g.
 \end{aligned}$$

Запишем уравнение равнопеременного прямолинейного движения в

проекции на OX и OY :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{cases}$$

Подставляем значения кинематических характеристик:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Для определения формы траектории исключим параметр времени t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Мы получили уравнение параболы. Т. к. коэффициент при x^2 отрицательный, то вершина параболы направлена вверх. Левая точка пересечения с началом координат соответствует начальному положению тела, правая точка — положению тела в момент падения на землю.

Для нахождения максимальной дальности полета снаряда приравняем $y(x) = 0$.

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0.$$

Поскольку тривиальное решение $x = 0$ нас не интересует, то

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot 2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Функция $x(\alpha)$ достигает максимума, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45^\circ$. Поскольку $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\cos^2 45^\circ = 1/2$, то уравнение траектории можно записать как

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = x - \frac{g}{v_0^2} x^2.$$

Если тело движется с некоторой скоростью v по криволинейной траектории некоторого радиуса R , то на него действует ускорение, перпендикулярное траектории:

$$a_{цб} = \frac{v^2}{R}.$$

В верхней точке траектории полета скорость равна $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, а ускорение равно ускорению свободного падения $a_{цб}$. Отсюда находим радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{v^2}{a_{цб}} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

При этом радиус-вектор направлен вертикально вниз.

Ответ: $y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$, $y(x) = x - \frac{g}{v_0^2} x^2$, $R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

График параболы, зеркальные отражения, целая часть числа

Задача 9.2^[3].

На горизонтальной площадке между двумя гладкими стенками установлена катапульта (см. рис. 16). Катапульта выстреливает шариками, начальная скорость которых v_0 . Какое максимально число ударов может совершить шарик перед тем как упадёт на площадку? Удары шарика о стенку считайте абсолютно упругими. Расстояние между стенками равно L_0 . Положение катапульти и угол вылета шарика можно изменять.

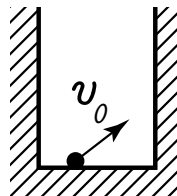


Рис. 16

Решение. Так как удар о стенку абсолютно упругий, то угол отражения φ_2 равен углу падения φ_1 . Для упрощения расчёта можно сделать «развертку» перемещения шарика (см. рис. 17).

Максимальное число ударов можно получить, если дальность полёта шарика максимальна, то есть равна $L = v_0^2/g$.

При выполнении этого условия при $L < L_0$ может произойти не более одного столкновения, а при $L_0 \leq L < 2L_0$ — не более двух.

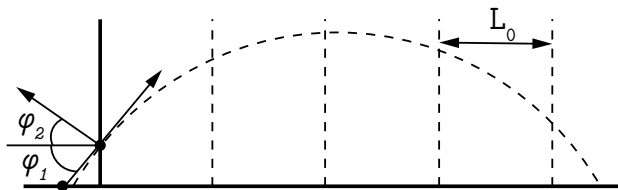


Рис. 17

По аналогии можно показать, что если

$$(n - 1)L_0 \leq L < nL_0,$$

то может произойти не более чем n столкновений. Таким образом число столкновений будет равно:

$$N = \left[\frac{L}{L_0} \right] + 1 = \left[\frac{v_0^2}{gL_0} \right] + 1,$$

где квадратные скобки означают взятие целой части числа, т. е. наибольшего целого числа, которое меньше того числа, которое стоит в квадратных скобках.

Ответ: $N = \left[\frac{v_0^2}{gL_0} \right] + 1.$

График параболы

Задача 9.3^[7]. На горизонтальном стальном листе покоится металлический брусок массой $m = 1$ кг с прикрепленной к нему изначально не деформированной пружиной. К свободному концу пружины прикладывают горизонтально направленную постепенно увеличивающуюся силу. Через некоторое время брусок начинает медленно перемещаться. Зависимость работы приложенной силы от перемещения точки приложения приведена в таблице 1.

Определите коэффициент жёсткости пружины, перемещение бруска и коэффициент трения бруска о поверхность стола.

x , см	0	1	2	3	4	5	6	7
A , мДж	0	22	82	178	319	481	640	800

Таблица 1

Решение. По данным таблицы построим график $A(x)$.

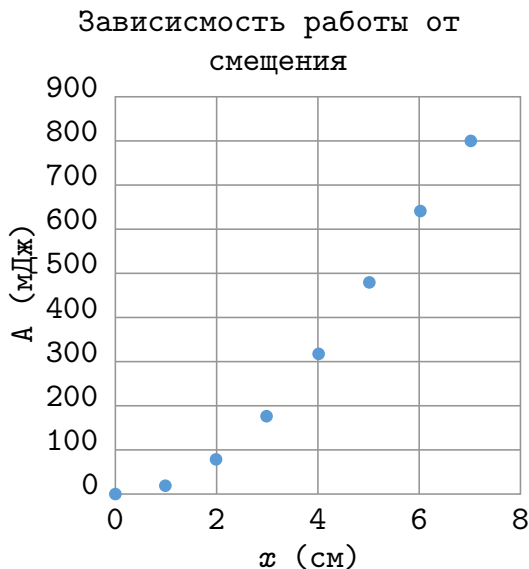


Рис. 18

Из него видно, что зависимость $A(x)$ состоит из двух участков. Начальный участок — парабола, затем линейный участок. Переход происходит точно в точке $x_0 = 4$ см. В этот момент сила упругости становится равной силе трения и брусок начинает движение.

Так как максимальное смещение свободного конца пружины 7 см, то брусок за время эксперимента переместился на 3 см. По угловому коэффициенту линейного участка графика найдём жёсткость пружины (при движении бруска пружина больше не удлиняется и вся добавочная работа внешней силы идет на преодоление силы трения) $\Delta A = \mu mg \Delta x$, откуда

$$\mu = \frac{\Delta A}{mg\Delta x} \approx 1,6.$$

Коэффициент жёсткости находим из условия начала скольжения:

$$\mu mg = kx_0,$$

$$k = \frac{\mu mg}{x_0} \approx 400 \text{ Н/м.}$$

Ответ: $k = 400 \text{ Н/м}$, $\Delta x = 3 \text{ см}$, $\mu = 1,6$.

Примечание. При определении числового ответа возможны погрешности до 10%.

Свойства арифметического корня n -ой степени, решение систем нелинейных уравнений

Задача 9.4^[9]. Металлическая фляжка имеет форму параллелепипеда. Масса заполненной водой фляжки равна M . Если фляжку положить на стол самой большой гранью, то она будет оказывать давление ρ_1 . Если её положить на среднюю грань, то давление будет равно ρ_2 . Если фляжку поставить на самую маленькую грань, то давление окажется равным ρ_3 . Чему равны масса m пустой фляжки, а также длины её ребер a , b и c ? Толщина стенок фляжки пренебрежимо мала по сравнению с длинами её ребер. Плотность воды ρ .

Примечание. Для определенности длину короткого ребра фляжки обозначьте a , длину среднего ребра b , длинного ребра c .

Решение. По условию:

$$\rho_1 = \frac{Mg}{bc}, \quad \rho_2 = \frac{Mg}{ac}, \quad \rho_3 = \frac{Mg}{ab}.$$

Составим комбинацию из ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 :

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3} = \frac{Mg}{c^2}.$$

Отсюда получаем:

$$c = \sqrt{\frac{Mg\rho_3}{\rho_1\rho_2}}.$$

Аналогично:

$$a = \sqrt{\frac{Mg\rho_1}{\rho_2\rho_3}}, \quad b = \sqrt{\frac{Mg\rho_2}{\rho_1\rho_3}}.$$

Другой способ решения системы уравнений — выражаем из первых двух уравнений величины a и b через c , и подставляем в третье уравнение.

Массу пустой фляжки найдём как разность масс фляжки с водой и собственно воды:

$$m = M - \rho V = M - \rho abc = M - \rho \sqrt{\frac{(Mg)^3}{\rho_1\rho_2\rho_3}}.$$

Ответ: $m = M - \rho \sqrt{\frac{(Mg)^3}{\rho_1\rho_2\rho_3}}, a = \sqrt{\frac{Mg\rho_1}{\rho_2\rho_3}}, b = \sqrt{\frac{Mg\rho_2}{\rho_1\rho_3}}, c = \sqrt{\frac{Mg\rho_3}{\rho_1\rho_2}}.$

Квадратное уравнение, свойства квадратного трёхчлена

Задача 9.5^[7]. Экспериментатор Глюк исследовал равноускоренное движение. Для этого он бросал вертикально вверх с балкона 17-го этажа камушки. С какой по величине скоростью v_0 он бросил камень, если длина его пути за первые $t = 3$ с полёта оказалась равной $l = 25$ м? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Попытка вычисления перемещения камня за время от 0 до t по обычному уравнению $H = v_0 t - gt^2/2$ приводит к ответу $v_0 = H/t + gt/2 = 23,3$ м/с, который следует признать неудачным, так как через 2,33 с проекция скорости на вертикальную ось изменяет знак. Следовательно, путь, пройденный за 3 с, больше перемещения (равного 25 м).

Для решения задачи необходимо предположить, что через некоторое время $\tau < t$ после старта камень изменит направление полета. В этом случае путь, пройденный камнем за время от 0 до t :

$$l = \frac{g\tau^2}{2} + \frac{g(t - \tau)^2}{2}.$$

Отсюда найдём время τ , а затем величину начальной скорости:

$$v_0 = g\tau = \frac{gt}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4l}{gt^2} - 1} \right), \quad v_{0,1} = 10 \text{ м/с}, \quad v_{0,2} = 20 \text{ м/с}.$$

Таким образом, возможны два варианта броска: со скоростью $v_{0,1} = 10 \text{ м/с}$ и со скоростью $v_{0,2} = 20 \text{ м/с}$. В первом случае через время t камень окажется ниже Глюка, а во втором случае — выше.

Ответ: $v_{0,1} = 10 \text{ м/с}$, $v_{0,2} = 20 \text{ м/с}$.

Минимум параболы, решение квадратного уравнения, формулы сокращённого умножения

Задача 9.6^[2].

Два параллельных стержня выступают из стены. На них надеты две пружины жёсткостями k_1 и k_2 . Первоначально пружины не деформированы и одна из них на L длиннее другой. Одним концом пружины прикреплены к стене (см. рис. 19). Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы расположить свободные концы пружин на одинаковом расстоянии от стены?

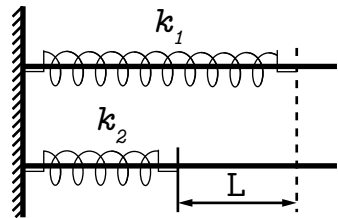


Рис. 19

Решение. Пусть при смещении концов пружин первая деформировалась на x_1 , а вторая — на x_2 . Допустим, что вторая пружина длиннее, тогда $x_2 = L - x_1$.

Поскольку потерь энергии нет, совершаемая работа A идёт на увеличение потенциальной энергии упругой деформации пружин:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 (L - x_1)^2}{2} = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 (L^2 - 2Lx_1 + x_1^2)}{2} = \\
&= \frac{k_1 + k_2}{2} x_1^2 - k_2 L x_1 + \frac{k_2 L^2}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} \left(x_1^2 - \frac{2k_2 L x_1}{k_1 + k_2} \right) + \frac{k_2 L^2}{2} = \\
&= \frac{k_1 + k_2}{2} \left(x_1^2 - \frac{2k_2 L x_1}{k_1 + k_2} + \left(\frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 - \left(\frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 \right) + \frac{k_2 L^2}{2} = \\
&= \frac{k_1 + k_2}{2} \left(x_1 - \frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 + \frac{k_2 L^2}{2} - \frac{k_2^2 L^2}{2(k_1 + k_2)} = \\
&= \frac{k_1 + k_2}{2} \left(x_1 - \frac{k_2 L}{k_1 + k_2} \right)^2 + \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}.
\end{aligned}$$

Функция $A(x_1)$ имеет вид параболы с вершиной снизу, её наименьшее значение достигается при $x_1 = \frac{k_2 L}{k_1 + k_2}$, а значение функции при этом равно $A_{min} = \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}$.

$$\text{Ответ: } A_{min} = \frac{k_1 k_2 L^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Интегрирование линейных функций через площади фигур

Задача 9.7^[11]. Теплоёмкость некоторых материалов может зависеть от температуры. Рассмотрим брусок массы $m_1 = 1$ кг, изготовленный из материала, удельная теплоёмкость которого зависит от температуры t по закону $c = c_1(1 + \alpha t)$, где $c_1 = 1,4 \cdot 10^3$ Дж/(кг°C), $\alpha = 0,014$ °C⁻¹. Такой брусок, нагретый до температуры $t_1 = 100$ °C, опускают в калориметр, в котором находится некоторая масса m_2 воды при температуре $t_2 = 20$ °C. После установления теплового равновесия температура в калориметре оказалась равной $t_0 = 60$ °C. Пренебрегая теплоёмкостью калориметра и тепловыми потерями, определите массу m_2 воды в калориметре. Известно, что удельная теплоёмкость воды $c_2 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг°C).

Решение. Построим график зависимости удельной теплоёмкости материала бруска от температуры (см. рис. 20).

На оси абсцисс отмечены точки t_1 , t_2 и t_0 . За время теплообмена с водой в калориметре температура бруска снизилась с t_1 до t_0 . При этом брусок передал воде количество теплоты, численно равное площади заштрихованной поверхности (т. е. площади трапеции), умноженной на массу бруска $m_1 = 4$ кг. Запишем уравнение теплового баланса:

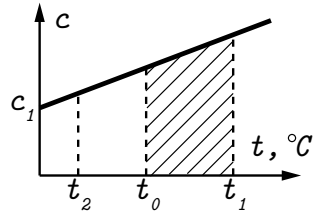


Рис. 20

$$m_2 c_2 (t_0 - t_2) = m_1 c_1 \left(\frac{1 + \alpha t_1 + 1 + \alpha t_0}{2} \right) (t_1 - t_0).$$

Из этого соотношения находим:

$$m_2 = m_1 \frac{c_1}{2c_2} \frac{\alpha(t_1^2 - t_0^2) + 2(t_1 - t_0)}{t_1 - t_2} \approx 0,707 \text{ кг.}$$

Ответ: 0,707 кг.

Центр масс вогнутого четырёхугольника, медиана, равнобедренный треугольник

Задача 9.8^[4]. Четырёхугольник $ABCD$ вырезан из однородной пластины таким образом, что $AB = AD$, $CB = CD = 5$ см, длина диагонали $BD = 8$ см. Вычислите длину диагонали AC , если известно, что центр масс четырёхугольника совпадает с вершиной C .

Примечание. Центр масс однородного треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

Решение. Центр масс может совпадать с вершиной только в том случае, когда четырёхугольник вогнутый (см. рис. 21).

Пусть CE — медиана треугольника ABC , CF — медиана треугольника ACD . Соединим точки F и E прямой.

Центр масс лежит в её середине и совпадает с точкой C . Следовательно, FE — средняя линия треугольника DAB , а значит $AC = CK$. В треугольнике DAB проведём медиану AK . Так как треугольник DCB — равнобедренный, CK является медианой и высотой одновременно. Следовательно:

$$AC = CK = \sqrt{(CB)^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = 3 \text{ см.}$$

Ответ: 3 см.

Задача 9.9^[8]. В крупном торговом центре эскалаторы, работающие на спуск и на подъём, установлены в перпендикулярных плоскостях. Скорость движения ленты эскалаторов одинакова и равна $v = 1$ м/с. Углы наклона эскалаторов к горизонту тоже одинаковы и равны $\alpha = 30^\circ$. Определите, с какой скоростью $v_{\text{отн}}$ движется пассажир, стоящий на одном эскалаторе относительно пассажира, стоящего на другом?

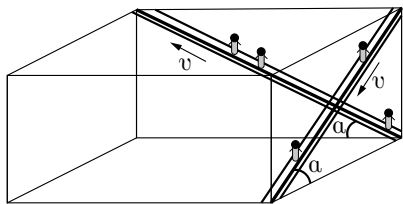


Рис. 22

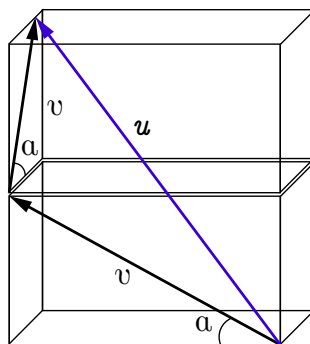


Рис. 23

Решение. Выразим относительную скорость через три проекции на ортогональные оси: $v \cos \alpha$ на горизонтальные оси и $2v \sin \alpha$ на вертикальную ось, т. к. по вертикали движение эскалаторов идёт в противоположных направлениях.

Чтобы найти длину вектора относительной скорости через его координаты, дважды применим теорему Пифагора и получим:

$$u^2 = (2v \sin \alpha)^2 + (v \cos \alpha)^2 + (v \cos \alpha)^2.$$

Отсюда с учётом основного тригонометрического тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $\sin 30^\circ = 1/2$ получаем:

$$u = v\sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)} = v\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1,6 \text{ м/с}.$$

Ответ: 1,6 м/с.

Длина дуги

Задача 9.10^[8]. Для тела, движущегося с постоянной по модулю скоростью, получен график зависимости модуля перемещения s от пути L . Определите модуль скорости тела, если известно, что всё движение заняло $t = 20$ с. Изобразите возможную траекторию тела.

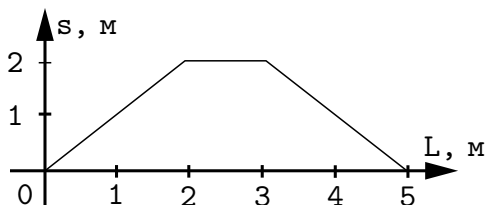


Рис. 24

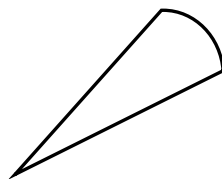


Рис. 25

Решение. Модуль скорости тела равен $v = L/t = 0,25$ м/с. На первом участке модуль перемещения и путь равны. Такое возможно при прямолинейном движении. На втором участке перемещение не изменяется, следовательно, тело движется на постоянном расстоянии от точки старта, например, по окружности радиусом $R = 2$ м. Угол на который успевае повернуть тело, равен отношению длины дуги к радиусу: $\alpha = 0,5$ рад.

На третьем участке модуль перемещения уменьшается, и настолько же увеличивается путь. Такое возможно при прямолинейном движе-

нии курсом на точку старта. Возможная траектория приведена на рисунке 25.

Заметим, что при движении по дуге окружности тело может быстро разворачиваться и двигаться в обратном направлении с прежней скоростью. Приведённое решение — один из простейших вариантов.

Вписанные и описанные окружности, площади фигур

Задача 9.11^[3]. Над горизонтальной поверхностью расположено параллельно ей светящееся кольцо диаметра $d = 2$ м. Между кольцом и поверхностью расположен соосный кольцу непрозрачный квадрат со стороной d (см. рис. 26). Расстояние от кольца до квадрата и от квадрата до поверхности равны $H = 3$ м. Чему равна площадь полной тени на горизонтальной поверхности? На рисунке тень изображена условно.

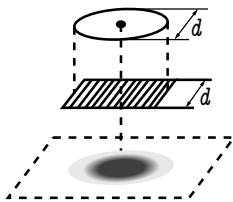


Рис. 26

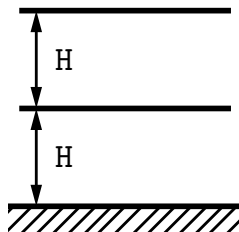


Рис. 27

Решение. Полная тень будет иметь форму квадрата со стороной d . В самом деле, часть лампы 1 будет освещать ту часть пола, которая на рисунке 28 выше прямой AB .

Часть лампы 3 освещает часть пола, которая на рисунке ниже прямой CD . Аналогично, части лампы 2 и 4 освещают пол правее BC и левее DA .

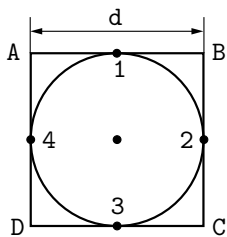


Рис. 28

Таким образом, вне квадрата $ABCD$ будет полутень или целиком освещенная поверхность. Тогда площадь полной тени равна площади квадрата: $s = d^2 = 4 \text{ м}^2$.

Ответ: 4 м^2 .

Площадь сектора окружности, проекции векторов

Задача 9.12^[7]. Цилиндр, разделённый на 4 равных сектора, плотности которых равны ρ , 3ρ , 2ρ , 5ρ соответственно (см. рис. 29), может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр.

Цилиндр опускают в кювету с жидкостью, имеющей плотность 4ρ до тех пор, пока уровень жидкости не достигнет оси цилиндра. После чего цилиндр раскручивают и он, сделав несколько оборотов, останавливается. Найдите для каждого сектора долю δ погруженной в жидкость части. Трения в оси нет.

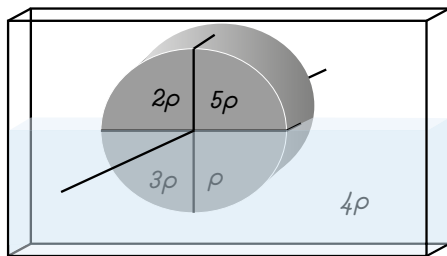


Рис. 29

Решение. Так как части цилиндра однородны, то массы этих частей пропорциональны плотностям и равны соответственно m , $3m$, $2m$ и $5m$.

В силу симметрии погружённой части цилиндра линия действия силы Архимеда проходит через ось вращения и не создает вращательного момента (относительно оси).

Пусть R — расстояние от оси до центра тяжести сектора (т. к. секторы однородны, значит R для всех одинаково). Угол между центром масс любого сектора и его границей равен $90^\circ/2 = 45^\circ$.

Пусть α — угол между вертикалью и направлением на центр масс для сектора массой $5m$ (см. рис. 30).

В равновесии сумма моментов сил тяжести относительно оси равна нулю:

$$5mgR \sin \alpha + mgR \cos \alpha = 3mgR \sin \alpha + 2mgR \cos \alpha,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,50$, а сам угол $\alpha = 27^\circ$.

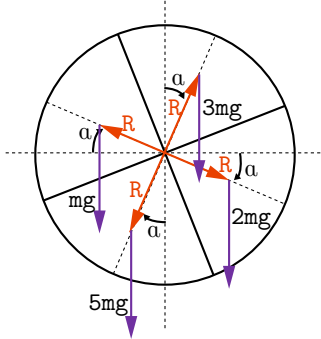


Рис. 30

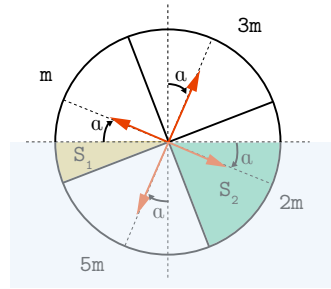


Рис. 31

Т. к. $\alpha < 45^\circ$, то груз массой $5m$ оказался внизу, а груз массой $2m$ ниже груза массой m (см. рис. 31).

Обозначив через S площадь поперечного сечения цилиндра, а через l — его толщину, получим:

$$\delta_1 = \frac{lS_1}{lS/4} = \frac{45^\circ - \alpha}{360^\circ} S \approx 0,2, \quad \delta_2 = \frac{lS_2}{lS/4} = \frac{45^\circ + \alpha}{360^\circ} S \approx 0,8,$$

$$\delta_3 = \frac{l \cdot 0}{lS/4} = 0, \text{ (полностью над уровнем жидкости)}$$

$$\delta_5 = \frac{lS/4}{lS/4} = 1. \text{ (полностью под уровнем жидкости)}$$

Подстрочный индекс у символа δ соответствует массе сектора в единицах m .

Ответ: $\delta_1 \approx 0,2$, $\delta_2 \approx 0,8$, $\delta_3 = 0$, $\delta_5 = 1$.

Линеаризация экспериментальных данных, квадратное уравнение

Задача 9.13^[10]. В баллистической лаборатории получили зависимость значений скорости v брошенного вверх шарика от его высоты h над уровнем стола. Результаты измерений для последовательных моментов времени представлены в таблице 32.

№	1	2	3	4	5	6	7	8
h , см	100	180	220	270	320	250	140	50
v , м/с	7,2	6,0	5,3	4,2	2,8	4,7	6,6	9,0

Рис. 32

Известно, что в одном из измерений (возможно и в первом) скорость была определена неверно. Найдите в каком. Для этого постройте график с результатами измерений в таких координатах, в которых он должен быть линейным. Рассчитайте максимальную высоту подъёма шарика над столом. Через какое время после первого измерения шарик упал на стол? Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Решение. Из закона сохранения энергии $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$ получаем: $v^2 = v_0^2 - 2gh$, где v_0 — скорость на уровне стола. Следовательно, зависимость скорости от высоты будет линейной, например, в осях $v^2(h)$.

Нанесем экспериментальные точки на поле графика с осями v^2 и h .

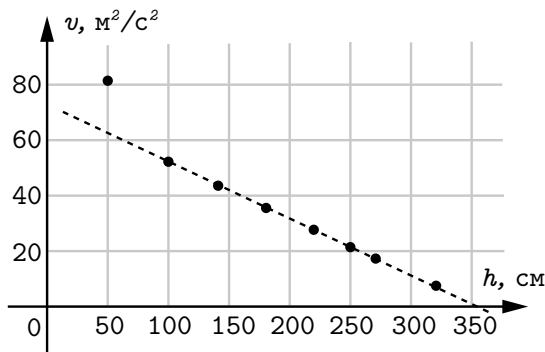


Рис. 33

Все точки, кроме соответствующей $h = 50$ см, лежат на одной прямой, пересекающей ось h в районе $H = 365$ см. Это и есть максимальная высота подъёма.

Время полета с высоты $h_1 = 100$ см до падения, с начальной скоростью $7,2$ м/с можно найти, решив квадратное уравнение $0 = 1 + 7,2t - 9,8t^2/2$, и выбрав положительный корень $t = 1,6$ с.

Ответ: Последняя точка, 365 см, $1,6$ см.

Проекции вектора, теорема Пифагора

Задача 9.14^[9]. Ступени лестницы имеют ширину $a = 28$ см и высоту $b = 15$ см. С какой максимальной установившейся скоростью u человек массой $m = 70$ кг может идти вниз по такой лестнице, наступая на каждую ступеньку? Какую среднюю мощность P он должен развивать при подъёме по лестнице с этой скоростью? $g = \text{м/с}^2$.

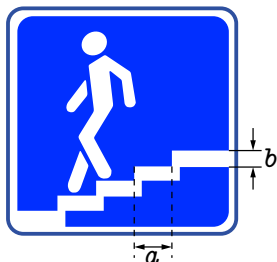


Рис. 34

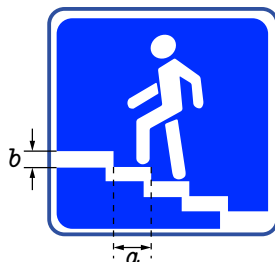


Рис. 35

Решение. Центр масс человека опустится на b за минимальное время, равное времени свободного падения:

$$\tau = \sqrt{\frac{2b}{g}} \approx 0,18 \text{ с.}$$

Средняя горизонтальная составляющая вектора скорости равна скорости перемещения на длину ступеньки за это время:

$$u_x = \frac{a}{\tau}.$$

Пусть φ — угол наклона лестницы: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Тогда среднее значение скорости человека равно

$$u = \frac{u_x}{\cos \varphi} = u_x \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\tau} \approx 1,8 \text{ м/с.}$$

Средняя сила, которую необходимо развивать мышцам человека, равна по модулю силе тяжести и направлена вверх. Поэтому средняя мощность при подъёме равна

$$P = \frac{mgb}{\tau} \approx 590 \text{ Вт.}$$

Ответ: 1,8 м/с, 590 Вт.

Теорема косинусов

Задача 9.15^[7]. Гладкую горку высотой h с постоянным углом наклона α перемещают с постоянной скоростью v относительно Земли (наклонной плоскостью вперёд) по горизонтальной поверхности. С неё начинает соскальзывать (без начальной скорости относительно горки) небольшая шайба массы m . Вычислите работу, которую за время всего спуска совершит над шайбой сила N реакции горки (в системе отсчёта, связанной с Землей).

Решение. В системе отсчёта сопутствующей горке и движущейся равномерно со скоростью v относительно земли сила нормальной реакции горки всегда направлена перпендикулярно мгновенной скорости шайбы и поэтому работы не совершает. В этой системе отсчёта закон сохранения энергии для шайбы выглядит так:

$$mgh = \frac{mu^2}{2},$$

где u — скорость шайбы относительно горки в конце спуска:

$$u = \sqrt{2gh}.$$

В системе отсчёта, связанной с землей, скорость шайбы v_1 может быть найдена с помощью теоремы косинусов. По закону сложения скоростей

$$v_1^2 = v^2 + u^2 + 2vu \cos \alpha.$$

В этой системе отсчёта закон сохранения энергии применительно к шайбе примет вид:

$$A_N + mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{mv_1^2}{2} - mgh - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1^2 - u^2 - v^2) = \\ &= \frac{m}{2}2vu \cos \alpha = mv\sqrt{2gh} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $A_N = mv\sqrt{2gh} \cos \alpha$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.16. Автомобиль, едущий со скоростью v_0 , в некоторый момент начинает движение с таким постоянным ускорением, что за время τ пройденный им путь s оказывается минимальным. Определите этот путь s .

Ответ: $s = (\sqrt{2} - 1)v_0\tau$.

Задача 9.17. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v_0 , направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются.

Ответ: $L_{max} = 2H + v_0^2/g$.

Задача 9.18. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 25,0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (см. рис. 36), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Найдите значения угловой скорости ω , при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Ответ: $5,7$ с⁻¹ (сильнее натянута верхняя нить) и $6,8$ с⁻¹ (сильнее натянута нижняя нить).

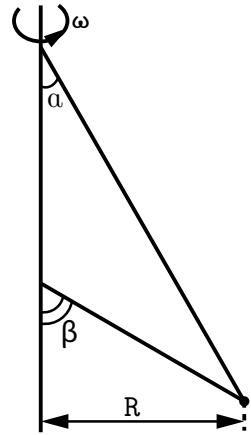


Рис. 36

10 класс

Тематические задачи

Объём и площадь поверхности сферы и цилиндра

Задача 10.1. Таблетка сухого горючего (уротропин — сухой спирт) имеет форму прямого цилиндра высотой 10 мм и диаметром 40 мм, и полностью сгорает за 12 минут. Оцените, за какое время сгорит таблетка из того же материала в форме шара? Как изменится время горения, если таблетку измельчить в мелкую пудру (10^9 частиц)? Горение происходит равномерно по всей поверхности материала.

Решение. Процесс горения представляет собой сложный физико-химический процесс, происходящий на границе 2 фаз — собственно твёрдого горючего и воздуха. Сначала под воздействием высокой температуры (например, огня от зажигалки или спички) происходит процесс нагрева и сублимации (переход из твёрдого состояния в газообразное) некоторой порции горючего вещества, а дальше молекулы газа вступают в реакцию окисления с молекулами кислорода O_2 . Выделившееся тепло идет на процесс нагрева и сублимации следующих порций горючего. Если газа выделяется меньше, чем сгорает — огонь затухнет, если больше — все вещество быстро (экспоненциально быстро) перейдёт в газообразную форму с последующим взрывом (детонацией), если столько же газа — будет наблюдаться процесс равномерного горения.

В каждый момент времени реакция нагрева и сублимации идёт на поверхности, т. е. количество взаимодействующего вещества пропорционально площади поверхности тела. Таким образом, при равномерном горении за каждую единицу времени все линейные размеры уменьшаются на одинаковую величину.

Пусть r — радиус цилиндра, H — его высота. Площадь поверхности цилиндра:

$$S_1 = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 2\pi r(r + H).$$

Поскольку $H < r$, то время горения будет определять полувисота цилиндра $H/2$ (по высоте материал прогреется и сублимирует раньше,

прогрев идёт с обеих сторон). Пусть α — некий размерный коэффициент между характерным линейным размером и временем сгорания, тогда:

$$t_1 = \alpha \frac{H}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2t_1}{H}.$$

Найдём объём одной таблетки:

$$V = \pi r^2 H.$$

По условию объём шара некоторого радиуса R такой же, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 H,$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3r^2 H}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3(20 \text{ мм})^2(10 \text{ мм})}{4}} \approx 14,4 \text{ мм}.$$

Время горения шара будет пропорционально радиусу как характерному линейному размеру:

$$t_2 = \alpha R = \frac{2t_1}{H} \sqrt[3]{\frac{3r^2 H}{4}} = 2t_1 \sqrt[3]{\frac{3r^2}{4H^2}} = 2 \cdot (12 \text{ мин}) \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20^2}{4 \cdot 10^2}} = 34,6 \text{ мин}.$$

Причиной существенного увеличения времени горения (и соответственно снижения интенсивности горения) стало уменьшение отношения площади поверхности тела к его объёму. Для цилиндра:

$$\frac{S_1}{V} = \frac{2\pi r(r+H)}{\pi r^2 H} = 2 \frac{r+H}{rH} = 0,3 \text{ мм}^{-1}.$$

Для шара:

$$\frac{S_2}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R} \approx 0,2 \text{ мм}^{-1}.$$

Если материал таблетки измельчить в мелкую пудру (которую представим в виде $N = 10^9$ одинаковых маленьких шариков), то отношение площади поверхности к объёму значительно увеличится:

$$V_3 = \frac{V}{N} \Rightarrow R_3 = \frac{R}{\sqrt[3]{N}},$$

$$\frac{S_3}{V} = \frac{4\pi R_3^2}{\frac{4}{3}\pi R_3^3} = \frac{3}{R_3} = \frac{3}{R} \sqrt[3]{N} = \frac{S_2}{V} \sqrt[3]{N} \approx 0,2 \sqrt[3]{N} = 200 \text{ мм}^{-1}.$$

Поскольку время горения каждого шарика одинаково, то:

$$t_3 = \alpha R_3 = \frac{\alpha R}{\sqrt[3]{N}} = \frac{t_2}{\sqrt[3]{N}} = \frac{12 \text{ мин}}{1000} = 0,72 \text{ с.}$$

Таким образом, измельчение горючего вещества приводит к резкому уменьшению времени и увеличению интенсивности горения, т. е. к взрыву. Например, в деревообрабатывающих мастерских есть опасность самовоспламенения опилок в жаркий день.

Ответ: 34,6 мин, 0,72 с.

Векторный метод в кинематике

Задача 10.2. С высоты h на наклонную плоскость падает маленький теннисный шарик и упруго отскакивает от неё. Угол наклона плоскости к горизонту — α . Найти расстояние до точки, в которой шарик второй раз коснётся наклонной плоскости. Поле сил тяжести считать однородным, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Решим задачу векторным методом. Сделаем рисунок с примерной траекторией полета шарика:

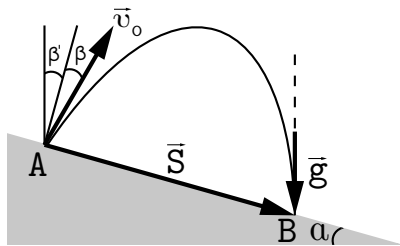


Рис. 37

Здесь $\beta' = \alpha$ — угол между вертикальной прямой и нормалью к наклонной плоскости, $\beta = \beta' = \alpha$ — при упругом ударе угол падения равен углу отражения, \vec{v}_0 — начальная скорость шарика сразу после соударения с плоскостью, A и B — точки соприкосновения шарика с плоскостью (считаем его материальной точкой), \vec{S} — перемещение шарика.

$$\vec{S}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Вектор $\vec{g}t^2/2$ направлен вертикально вниз и заканчивается в точке B . Вектор \vec{v}_0t направлен из точки A вдоль вектора \vec{v}_0 до пересечения с вектором $\vec{g}t^2/2$ в точке C :

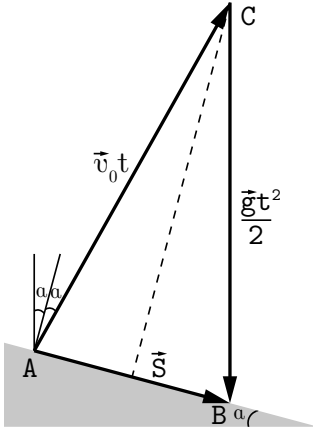


Рис. 38

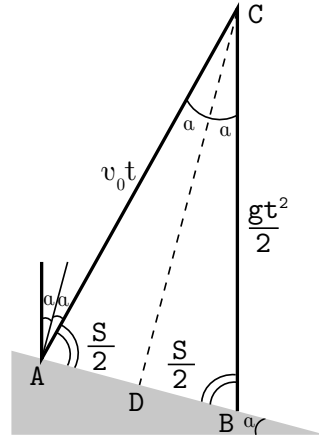


Рис. 39

Опустим из точки C на основание треугольника ABC перпендикуляр. $\angle ACD = \alpha$ как вертикальные накрест лежащие углы.

$$\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\text{из } \angle CAD + \angle ACD = \frac{\pi}{2}),$$

$$\angle CBD = \pi - \angle CAD - \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Отсюда $\angle CBD = \angle CAD$, т. е. треугольник ACB — равнобедренный.

Следовательно, $AC = CB$ или $v_0t = \frac{gt^2}{2}$, откуда находим время полета шарика между столкновениями:

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

Расстояние между точками:

$$S = AB = 2AD = 2AC \sin \alpha = 2v_0t \sin \alpha = 2v_0 \sin \alpha \frac{2v_0}{g} = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g}.$$

Неизвестную нам начальную скорость v_0 можно найти из известной высоты h , с которой упал шарик, при помощи закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2},$$

$$v_0^2 = 2gh.$$

Подставляя это выражение в уравнение для S , получим:

$$S = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g} = \frac{4 \sin \alpha}{g} 2gh = 8h \sin \alpha.$$

Ответ: $S = 8h \sin \alpha$.

Экстремум функции, свойства квадратного уравнения

Задача 10.3^[7]. Определите наибольшее возможное давление одного моля идеального газа в процессе, происходящем по закону: $T = T_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)$, где T_0 и V_0 — известные положительные постоянные, V — текущее значение объёма газа. В течение всего процесса $V > V_0$.

Решение. Запишем уравнение состояния для идеального газа, взятого в количестве 1 моль:

$$pV = RT,$$

где V — молярный объём газа. С учётом уравнения процесса $T = T_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)$ (данного в условии), получим:

$$pV = RT_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right).$$

Преобразуем уравнение к виду:

$$p = \frac{RT_0}{V_0} \left(\frac{V_0}{V} - \frac{V_0^2}{V^2}\right).$$

Если сделать замену переменных: $x = V_0/V$, то получим квадратное уравнение (относительно x):

$$p(x) = \frac{RT_0}{V_0} (x - x^2).$$

Найдём максимум этой функции.

1 способ: экстремуму функции $p(x)$ соответствует $p'(x) = 0$.

$$p'(x) = \frac{RT_0}{V_0}(1 - 2x) = 0.$$

Уравнение имеет единственный корень $x = 1/2$. Для определения типа экстремума найдем вторую производную функции:

$$p''(x) = -2\frac{RT_0}{V_0} < 0,$$

следовательно, данный экстремум является максимумом функции.

2 способ: квадратное уравнение $x - x^2$ имеет корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Поскольку парабола является симметричной относительно своей вершины, ей соответствует значение $x = 1/2$. Т. к. коэффициент при x^2 меньше нуля, то ветви параболы направлены вниз, а экстремум является максимумом.

Максимальное давление в этой точке будет равно

$$p_{max} = p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{RT_0}{V_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{RT_0}{4V_0}.$$

Ответ: $p_{max} = \frac{RT_0}{4V_0}$.

Экстремум функции, касательная к окружности

Задача 10.4^[6]. На рисунке 40 представлена (в относительных единицах) зависимость объёма порции воздуха массой $m = 10$ г от его температуры (примерно шестая часть окружности единичного радиуса). Найдите максимальное давление p_{max} , которого достигал воздух в процессе нагревания, если $V_0 = 1$ л, а $T_0 = 300$ К. В этой задаче воздух можно считать идеальным газом.

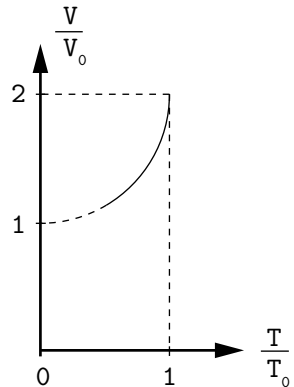


Рис. 40

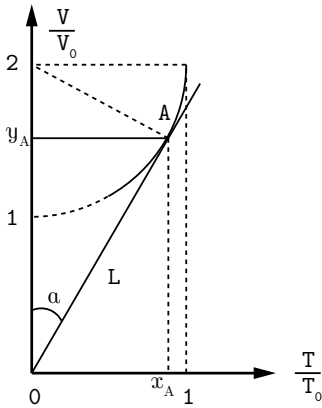


Рис. 41

Решение. Запишем уравнение состояния идеального газа Менделеева–Клайперона:

$$pV = \nu RT.$$

Отсюда можно выразить зависимость V/V_0 от T/T_0 :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\nu RT}{pV_0} = \left(\frac{\nu RT_0}{pV_0} \right) \frac{T}{T_0}.$$

Видно, что процесс с постоянным давлением (изобара) в используемых координатах представляет из себя прямую, проходящую через начало координат. Причём чем больше давление, тем больше угол α (см. рис. 41).

Таким образом, точку, в которой давление было максимально, можно найти, проведя касательную из начала координат к графику процесса (точка А на рисунке 41). Поскольку радиус окружности единичный, $\sin \alpha = 1/2$, значит, $\alpha = 30^\circ$ и

$$L = 2 \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$x_A = L \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_A = L \cos \alpha = \frac{3}{2}.$$

Зная координаты точки на графике, найдём максимальное давление:

$$y_A = \left(\frac{\nu RT_0}{p_{max} V_0} \right) x_A \Rightarrow p_{max} = \frac{\nu RT_0 x_A}{V_0 y_A} = \frac{m RT_0 x_A}{\mu V_0 y_A} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

где $\mu = 29$ г/моль — молярная масса воздуха. В качестве альтернативы, решить задачу можно и без нахождения координат точки касания прямой к окружности, используя свойство $k = \operatorname{tg} \varphi$, где k — коэффициент в уравнении прямой, φ — угол наклона прямой:

$$\frac{\nu RT_0}{p_{max} V_0} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$p_{max} = \frac{\nu RT_0}{V_0} \operatorname{tg} \alpha \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Ответ: $p_{max} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$

Интегрирование функций через площади фигур, приближенное интегрирование

Задача 10.5^[7]. К потолку прикреплена верёвка массой $M = 100 \text{ г}$ и длиной $L = 2 \text{ м}$, к которой через небольшой блок массой $2m$ подвешен груз, имеющий массу $4m$ (см. рис. 42). Какую минимальную работу потребует совершить внешней вертикальной силе, приложенной к свободному концу верёвки в такой системе, чтобы поднять свободный конец верёвки на $L/2$? Длиной части верёвки, огибающей блок, можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

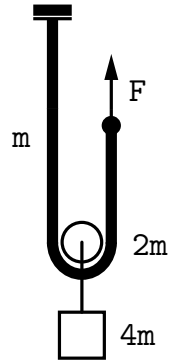


Рис. 42

Решение. Требование минимальности работы подразумевает, что груз поднимается вверх медленно (квазистатически), и процесс происходит на участке, где приложенная сила минимальна.

Из условия движения груза $4m$ без ускорения следует, что около блока сила натяжения верёвки:

$$2T = 4mg + 2mg,$$

отсюда $T = 3mg$. Условие равномерного подъёма свободного конца верёвки длиной x позволяет найти внешнюю силу F :

$$F(x) = T + m \frac{x}{L} g = 3mg + \frac{mg}{L} x.$$

Видно, что сила минимальна на начальном этапе подъёма, когда свободный конец верёвки находится около блока. Так как функция F изменяется линейно, работа может быть найдена как площадь трапеции на графике зависимости $F(x)$ на отрезке $x \in [0; L/2]$. В данном случае основания трапеции равны $3mg$ и $3,5mg$, высота трапеции — $L/2$.

$$A_{\min} = \frac{3mg + 3,5mg}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{13}{8} mgL \approx 3,25 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A_{\min} = 3,25$ Дж.

Примечание. Если функция $F(x)$ является нелинейной, то одним из приближенных методов определения площади по прямой является метод сетки. Нанесем на график сетку из клеток известного размера (т. е. известной площади S), так чтобы границы клеток проходили по осям абсцисс и ординат (или левой и правой границ интервала интегрирования). Подсчитываем под графиком общее число целых клеток N_1 и нецелых клеток N_2 . Если график пересекает клетки случайным образом, и таких клеток много, то в среднем их площадь будет равна половине площади целой клетки. Умножаем N_1 на S , N_2 на $S/2$, и суммируем результаты.

Другим методом приближённого вычисления интеграла через площадь фигуры, применимым для численных расчётов на компьютере, является разбиение отрезка на оси абсцисс на N малых интервалов $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N - 1$, и приближение функции на каждом интервале трапецией:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} S_i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F(x_i) + F(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Если все интервалы равны, то $\Delta x = \frac{x_N - x_0}{N}$, тогда:

$$A = \left(\frac{F(x_0) + F(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} F(x_i) \right) \Delta x.$$

Объём шара, периодическое движение, угловой размер

Задача 10.6^[5]. Определите среднюю плотность солнечного вещества ρ_c , если с Земли солнечный диск виден под углом $\alpha = 32'$, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ [СИ], а в году 365 суток.

Решение. Солнце будем считать шаром радиуса r (см. рис. 43), тогда его масса

$$M = \rho_c V = \rho_c \frac{4}{3} \pi r^3.$$

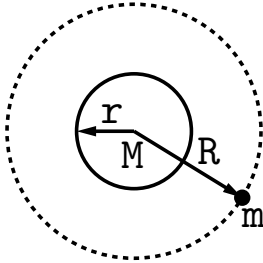


Рис. 43

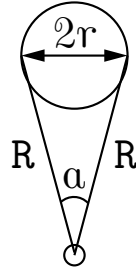


Рис. 44

Предположим, что Земля движется по окружности радиуса R , с постоянной угловой скоростью ω , и пусть масса Земли равна m . Тогда радиус Солнца можно выразить через радиус орбиты Земли в приближении малости угла α :

$$r = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx R \frac{\alpha}{2},$$

$$\alpha = \frac{32}{60} \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,0093 \text{ рад.}$$

Угловую скорость вращения Земли можно выразить через период вращения T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} \approx 3,15 \cdot 10^7 \text{ с.}$$

По 2-му закону Ньютона:

$$m\omega^2 R = G \frac{Mm}{R^2}.$$

Подставляем выражения для M , r , ω из предыдущих уравнений:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R = \frac{G}{R^2} \rho_c \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{G}{R^2} \rho_c \frac{4}{3} \pi \left(R \frac{\alpha}{2} \right)^3,$$

$$\rho_c = \frac{24\pi}{GT^2 \alpha^3} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho_c = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Площади фигур, экстремум функции

Задача 10.7. Можно ли надуть мыльный пузырь кубической формы?

Решение. Вспомним, какова физическая природа поверхностного натяжения. Молекулы растворителя (например, воды), находясь в объёме, образуют связи с другими молекулами — при этом выделяется тепло и понижается общая энергия системы. Если же молекула находится на границе раздела фаз, то она не может образовать все возможные связи, следовательно, её энергия будет выше. Система стремится к минимуму общей энергии, что соответствует минимуму площади взаимодействия растворителя (в данном случае мыльной воды) с окружающей средой, т. е. минимальной площади мыльной плёнки.

В частности, в отсутствие сил тяготения отдельный мыльный пузырь приобретает формы пространственной фигуры с минимальной площадью поверхности — шара.

Иная ситуация будет в случае, когда мыльная плёнка связана с проволочным каркасом кубической формы — мыльная плёнка вовсе не будет закрывать все грани, т. к. это не является минимумом площади.

В общем случае данная задача очень сложна и носит название проблемы Плато. Её простейшая формулировка: найти поверхность наименьшей площади, ограниченную данным замкнутым пространственным контуром. В случае некоторых симметричных контуров пространственный вид решения можно угадать теоретически или экспериментально, и далее найти оптимальные соотношения параметров геометрической фигуры.

Допустим, что фигура имеет вид тессеракта (см. рис. 45)

Площадь мыльной поверхности в этом случае складывается из площади 6 граней внутреннего куба и площадей 12 трапеций, основания которых лежат на рёбрах внутреннего и внешнего кубов.

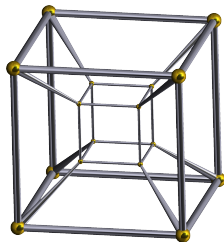


Рис. 45

Пусть a — длина ребра внешнего куба, x — длина ребра внутреннего куба. Каждая боковая сторона трапеции — по сути диагональ куба с длиной ребра $a/2 - x/2$, отсюда высота трапеции по теореме Пифагора равна:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{a-x}{\sqrt{2}}.$$

Площадь трапеции:

$$S_{\text{трапец}} = \frac{a+x}{2}h = \frac{a^2-x^2}{2\sqrt{2}}.$$

Полная площадь поверхности:

$$S = 12S_{\text{трапец}} + S_{\text{куб}} = 12\frac{a^2-x^2}{2\sqrt{2}} + 6x^2 = 3\sqrt{2}a^2 + 3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)x^2.$$

Поскольку коэффициент при квадратичном члене больше нуля, то минимум функции достигается при $x = 0$. Следовательно, фигура в виде тессеракта может существовать, только если схлопыванию стенок маленького куба будет препятствовать давление газа (воздуха), заранее туда доставленного (см. рис. 46).

Допустим, что внутри каркаса образуется плоская фигура в виде квадрата (см. рис. 47).

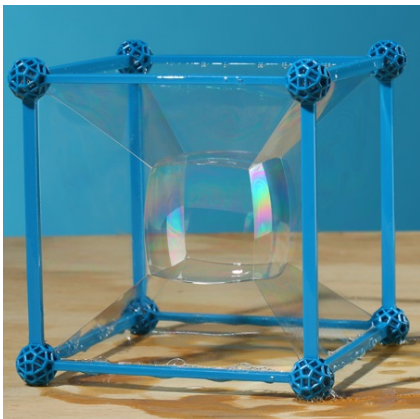


Рис. 46

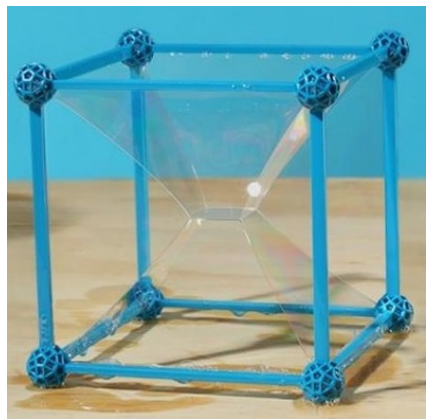


Рис. 47

В частности, такой результат можно получить экспериментально, опустив каркас кубической формы в раствор из воды, мыльного раствора и глицерина. Если его достать *очень* аккуратно, то первоначально плёнка закрывает все грани (что соответствует минимуму поверхности для контура в виде квадрата), однако при лёгком встряхивании (достаточном для соприкосновения мыльных плёнок с разных граней) пространственная структура мыльных поверхностей примет указанную форму.

Площадь мыльной поверхности в этом случае складывается из площади внутреннего квадрата, площадей 8 трапеций, основания которых лежат на сторонах квадрата и рёбрах внешнего куба, и площадей 4 треугольников, вершинами которых являются 2 вершины ребра куба (перпендикулярного плоскости квадрата) и ближайшая к ним вершина квадрата.

Для нахождения минимума площади снова введём обозначения: a — длина ребра внешнего куба, x — длина стороны квадрата. Для определенности предположим, что плоскость квадрата расположена горизонтально (как на рисунке 47) на высоте $a/2$. Тогда высота трапеции, согласно теореме Пифагора, равна:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}.$$

Площадь трапеции:

$$S_{\text{трапец}} = \frac{a+x}{2}h = \frac{a+x}{4}\sqrt{2a^2 - 2ax + x^2}.$$

Если опустить проекцию вершины квадрата на нижнюю грань, то снова получим её в качестве вершины квадрата со стороной $a/2 - x/2$. Диагональ этого квадрата равна искомой высоте треугольников с вершинами в вершинах куба и вершине квадрата. По теореме Пифагора:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{a-x}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда площадь треугольника:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{a(a-x)}{2\sqrt{2}}.$$

Полная площадь мыльной поверхности:

$$\begin{aligned}
 S &= 8S_{\text{трапец}} + 4S_{\text{треуг}} + S_{\text{квадрат}} = \\
 &= 8 \frac{a+x}{4} \sqrt{2a^2 - 2ax + x^2} + 4 \frac{a(a-x)}{2\sqrt{2}} + x^2 = \\
 &= 2(a+x) \sqrt{2a^2 - 2ax + x^2} + \sqrt{2}a(a-x) + x^2 = \\
 &= a^2 \left[2 \left(1 + \frac{x}{a} \right) \sqrt{2 - 2\frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} \right)^2} + \sqrt{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Мы получили достаточно сложную функцию зависимости полной площади поверхности от безразмерного параметра x/a . Чтобы не брать производные и не решать сложные уравнения для поиска экстремума, построим график данной функции:

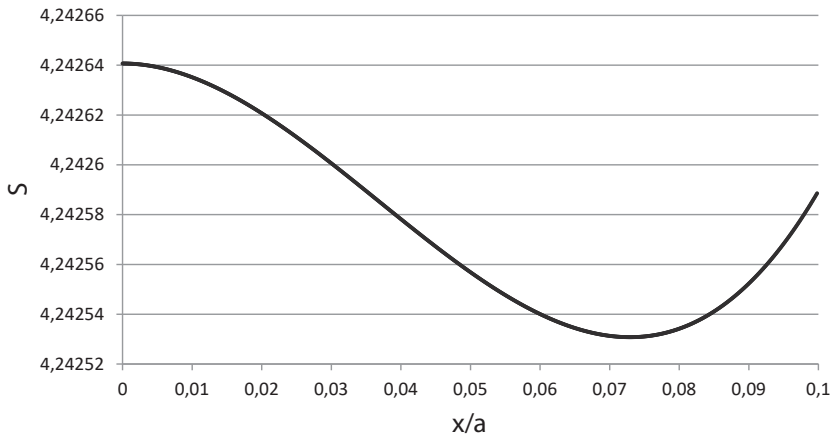


Рис. 48

Можно видеть, что данная функция имеет минимум при значении аргумента примерно $x/a \approx 0,073$.

Тригонометрические функции, прямоугольный треугольник, равнобедренный треугольник, внешний угол

Задача 10.8^[11]. Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма ABC (см. рис. 49). Луч света, падающий из воздуха под углом φ_0 на грань AC , после прохождения призмы выходит через грань AB под тем же углом φ_0 . Чему равен угол преломления φ_1 ? Показатель преломления воды $n_0 = 4/3$, угол C при вершине призмы — прямой. Величина угла φ_0 неизвестна.

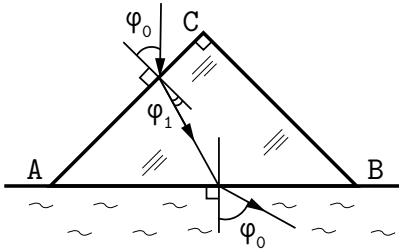


Рис. 49

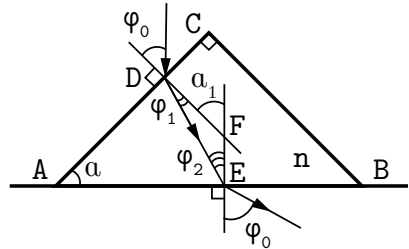


Рис. 50

Решение. Пусть показатель преломления стекла равен n . Выполним рисунок, поясняющий ход луча (см. рис. 50).

Запишем закон Снеллиуса для луча, преломляющегося на гранях AC и AB :

$$\sin \varphi_0 = n \sin \varphi_1, \text{ для грани } AC, \quad (3)$$

$$n_0 \sin \varphi_0 = n \sin \varphi_2, \text{ для грани } AB. \quad (4)$$

Разделим почленно уравнение (4) на уравнение (3):

$$n_0 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}.$$

Так как призма равнобедренная и прямоугольная, то угол $\alpha = 45^\circ$. Для треугольника DEF угол α_1 — внешний. По теореме о внешнем угле треугольника: $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1$. Заметим, что углы α и α_1 равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. С учётом двух

последних соотношений получаем:

$$N_0 = \frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1}{\sqrt{2} \sin \varphi_1} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Подставив в уравнение значение n_0 , окончательно получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{4\sqrt{2} + 3} \approx 0,347.$$

откуда следует, что $\varphi_1 \approx 19,1^\circ$.

Погрешности, производная, приближённые вычисления

Задача 10.9. Одним из вариантов решения задачи Нильса Бора об измерении высоты Пизанской башни ($H = 56,7$ м) при помощи барометра и любых других физических приборов является сбрасывание с крыши башни барометра и измерение времени его падения t . Определить, с какой максимально допустимой погрешностью Δt надо измерять время, чтобы погрешность измерения высоты составила не более $\Delta H = 0,1$ м.

Решение. Предполагая, что поле сил тяжести однородное, а сопротивление воздуха отсутствует, запишем для равноускоренного движения выражение для зависимости пройденного пути от времени:

$$H = \frac{gt^2}{2}.$$

Предполагая, что высоту башни мы знаем с некоторой погрешностью ΔH , запишем уравнение для высоты $H + \Delta H$:

$$H + \Delta H = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2},$$

где Δt — разница во времени падения барометра. Подставляем выражение для H во вторую формулу:

$$\Delta H = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Предполагая, что поправка Δt мала по сравнению со временем полёта с верхушки башни t , можно пренебречь слагаемым Δt^2 :

$$\Delta H \approx \frac{g}{2} 2t \Delta t = gt \Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\Delta H}{gt} = \frac{\Delta H}{g} \sqrt{\frac{g}{2H}} = \frac{\Delta H}{\sqrt{2gH}} \approx 0,003 \text{ с.}$$

Очевидно, что человек с его характерным временем реакции $0,2-0,4$ с не сможет секундомером измерить время с такой точностью, и необходимы специальные методы измерения, например фотофиниш.

Другим методом решения задачи является дифференцирование:

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = H'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt,$$

откуда получаем

$$\Delta t = \frac{\Delta H}{gt} = \frac{\Delta H}{\sqrt{2gH}}.$$

Ответ: 0,003 с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.10. Снаряд вылетел из катапульты со скоростью $v_1 = 39$ м/с. Через время $\tau = 4,2$ с он упал на землю со скоростью $v_2 = 45$ м/с. Определите минимальную v_{min} и максимальную v_{max} скорости снаряда за время его полета. Ускорение свободного падения $g \approx 9,8$ м/с². Сопротивление воздуха можно не учитывать.

Ответ: $v_{min} = 36$ м/с, $v_{max} = 45$ м/с.

Задача 10.11. Один моль гелия расширяется так, что его давление линейно зависит от объёма. Температуры в исходном и конечном состояниях одинаковы. Вычислите работу, совершаемую газом, если известно, что в ходе рассматриваемого процесса разность между максимальной и минимальной температурой равна ΔT , а объём гелия увеличивается в k раз, причём $k > 1$.

Ответ: $A = 2\nu R \Delta T \frac{k+1}{k-1}$.

Задача 10.12. Учёные обратили внимание на то, что единицы длины, времени и массы «приспособлены» к людям и связаны с особенностями планеты Земля, но могут оказаться «неудобными» при контактах с представителями внеземных цивилизаций. Поэтому было предложено в качестве основных механических единиц взять фундаментальные постоянные $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, $G \approx 7 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² и $\hbar \approx 1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Тогда единицы длины l_p , времени t_p и массы m_p будут производными от этих физических величин и выражаться через них. Такие единицы назвали планковскими.

Выразите единицы длины l_p , времени t_p и массы m_p через «новые» основные единицы c , G и \hbar , взятые в соответствующей степени. Примите коэффициент пропорциональности между производной единицей и основными единицами равным 1. Сколько метров в единице длины l_p , секунд в единице времени t_p и килограммов в единице массы m_p ?

Ответ: $1,6 \cdot 10^{-35}$ м, 10^{-44} с, $2,1 \cdot 10^{-8}$ с.

11 класс

Тематические задачи

Векторный метод в кинематике, подобные треугольники, теорема Пифагора, теорема минусов, свойства медианы, равнобедренные треугольники

Задача 11.1. Тело бросают под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Поле сил тяжести считать однородным с ускорением свободного падения g , сопротивлением воздуха можно пренебречь. Определить величину и угол скорости тела в момент падения. Определить время и максимальную высоту подъёма, дальность полёта тела.

Решение. Обычно такую задачу решают через введение системы координат и определение проекций скорости и перемещения на оси, однако есть и альтернативный метод — векторный. Запишем в векторном виде уравнения для равноускоренного движения:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Отметим все эти вектора на рисунке 51.

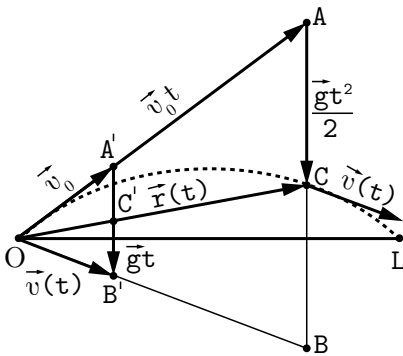


Рис. 51

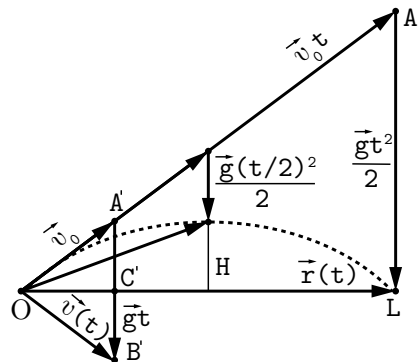


Рис. 52

Здесь $\vec{OC} = \vec{r}$ — радиус-вектор текущего положения тела, который,

согласно формуле (5), является суммой векторов $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_0 t$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{g} t^2 / 2$. Штрихованной линией обозначена предполагаемая траектория тела, которая заканчивается в точке L .

Также введём вектора $\overrightarrow{OA'} = \vec{v}_0$ и $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$, соответствующие вектору начальной скорости и вектору скорости в момент времени t . Продолжение векторов $\overrightarrow{OB'}$ и \overrightarrow{AC} пересекаются в точке B , причём треугольники OAB и $OA'B'$ являются подобными ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, прямая пересекает параллельные прямые под одним углом, следовательно, все углы треугольников равны) с коэффициентом подобия, равным t . Отсюда $AB = gt^2$, $AC = CB$, то есть OC — медиана треугольника OAB .

Пусть отрезки $A'B'$ и OC пересекаются в точке C' . Вследствие подобия треугольников OAB и $OA'B'$ точка C' тоже делит отрезок $A'B'$ пополам, следовательно, отрезок OC' является медианой треугольника $OA'B'$.

Длину отрезка OC' можно найти как из подобия треугольников ($OC' = r/t$), так и из свойств медианы:

$$4OC'^2 = 2(OA'^2 + OB'^2) - A'B'^2.$$

Подставим величины:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{r}{t}\right)^2 &= 2(v_0^2 + v^2) - (gt)^2, \\ r^2 &= \frac{1}{2}(v_0^2 + v^2)t^2 - \frac{1}{4}(gt^2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Это равенство справедливо в *любой* момент времени полёта тела, в том числе и в момент падения (см. рис. 52).

Поскольку точка L принадлежит горизонтальной плоскости, то треугольник OAL будет прямоугольным. Следовательно, подобный ему треугольник $OA'C'$ тоже будет прямоугольным, а отрезок OC' является не только медианой, но и высотой. Отсюда следует, что треугольник $OA'B'$ будет равнобедренным, и в момент падения скорость тела равна начальной скорости: $|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$, а угол падения равен углу взлета (OC' — биссектриса). Из уравнения (6) получаем:

$$L^2 = \frac{1}{2}(v_0^2 + v_0^2)t^2 - \frac{1}{4}(gt^2)^2 = (v_0 t)^2 - \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2, \quad (7)$$

то есть в данном случае уравнение (6) переходит в обычную теорему Пифагора. Время полёта определим из соотношения сторон треугольника $OA'C'$:

$$\sin \alpha = \frac{A'C'}{OA'} = \frac{gt}{2v_0}.$$

Отсюда находим время полёта:

$$t_x = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляем это выражение в уравнение (7):

$$L = \sqrt{(v_0 t_x)^2 - \left(\frac{gt_x^2}{2}\right)^2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

В момент максимальной высоты полёта вектор скорости тела $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$ направлен горизонтально. Следовательно, треугольник $OA'B'$ является прямоугольным с $\angle OB'A' = 90^\circ$. По определению синуса угла:

$$\sin \alpha = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{gt_{\text{п}}}{v_0},$$

где $t_{\text{п}}$ — время подъёма тела на максимальную высоту:

$$t_{\text{п}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_x}{2}.$$

То есть время подъёма тела на максимальную высоту в 2 раза меньше, чем полное время полёта на расстояние L . С учётом свойств подобия треугольников получаем, что максимальная высота достигается на середине пути между точками взлёта и падения тела, а вертикальная прямая, проходящая через точку максимального подъёма тела, является средней линией треугольника OAL . В свою очередь, прямая, проходящая через точки O и C , является медианой, следовательно,

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{gt_x^2}{2} = \frac{g}{8} \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Интегрирование через площади фигур

Задача 11.2^[9]. На тело имеющее массу $m = 5$ г начинает действовать единственная внешняя сила, график зависимости модуля которой от времени приведён на рисунке. При какой начальной скорости тела v работа этой силы за все время её действия окажется равной нулю? Как должна быть направлена эта начальная скорость по отношению к вектору силы, если он не меняет своего направления?

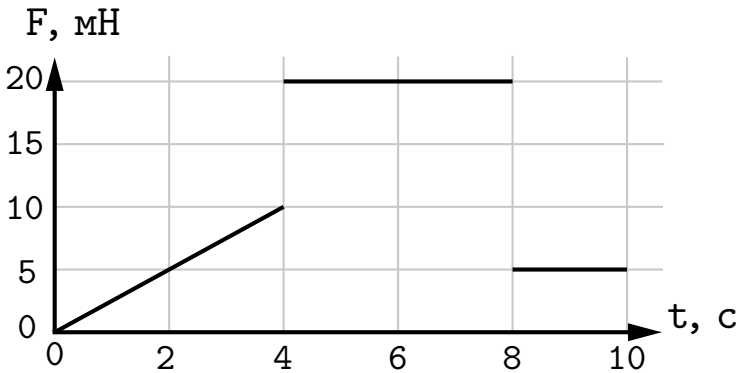


Рис. 53

Решение. Площадь под графиком пропорциональна импульсу силы, действующей на тело, через который, в свою очередь, можно определить изменение скорости тела за всё время действия силы. Найдём площадь под графиком как сумму площадей геометрических фигур — прямоугольного треугольника и 2 прямоугольников:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \int_0^{10} F(t) dt = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \right) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} = \\ &= 110 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м/с}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{110 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м/с}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} = 22 \text{ м/с}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + A = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2},$$

работа силы равна

$$A = mv\Delta v + \frac{m(\Delta v)^2}{2}.$$

Это выражение обращается в ноль при $v = -\Delta v/2$. Следовательно, вектор начальной скорости тела должен быть направлен в сторону, противоположную направлению вектора силы, и равен $v = 11$ м/с.

Если сила F направлена под углом к вектору скорости, то все проведённые нами вычисления будут относиться к составляющей скорости, параллельной силе, а перпендикулярная составляющая скорости не изменится.

Ответ: Вектор начальной скорости тела должен быть направлен в сторону, противоположную направлению вектора силы, и равен $v = 11$ м/с.

Экстремум функции, свойства квадратного уравнения, производная частного

Задача 11.3^[6]. Определите наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α — положительные постоянные, V — объём одного моля газа.

Решение. Запишем уравнение Менделеева-Клайперона для идеального газа, взятого в количестве 1 моль:

$$pV = RT,$$

где V — молярный объём газа. С учётом уравнения процесса $T = T_0 + \alpha V^2$ получим:

$$pV = R(T_0 + \alpha V^2).$$

1 способ: Выразим давление как функцию от объёма:

$$p(V) = \frac{R(T_0 + \alpha V^2)}{V}.$$

Экстремум функции достигается при $p'(V) = 0$ (вспоминаем $(f/g)' = (f' \cdot g - g' \cdot f)/g^2$):

$$\begin{aligned}
 p'(V) &= \left(\frac{R(T_0 + \alpha V^2)}{V} \right)' = R \frac{2\alpha V \cdot V - 1 \cdot (T_0 + \alpha V^2)}{V^2} = \\
 &= R \left(\alpha - \frac{T_0}{V^2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень $V^* = \sqrt{T_0/\alpha}$. Этому значению аргумента соответствует значение функции:

$$p(V^*) = \frac{R(T_0 + \alpha V^{*2})}{V^*} = \frac{R(T_0 + \alpha T_0/\alpha)}{\sqrt{T_0/\alpha}} = 2R\sqrt{\alpha T_0}.$$

Для определения характера экстремума найдём вторую производную:

$$p''(V) = \left(R \left(\alpha - \frac{T_0}{V^2} \right) \right)' = R \frac{2T_0}{V^3} > 0.$$

Поскольку вторая производная в точке экстремума больше 0, то данный экстремум является минимумом: $p_{min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$.

2 способ: Перепишем уравнение:

$$V^2 - \frac{p}{R\alpha}V + \frac{T_0}{\alpha} = 0.$$

Это квадратное уравнение (относительно V), корни которого находим через дискриминант:

$$V_{1,2} = \frac{p}{2R\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2R\alpha} \right)^2 - \frac{T_0}{\alpha}}.$$

В случае, когда давление достигает минимума (коэффициент при квадратичном члене больше 0, ветви параболы направлены вверх), дискриминант обращается в ноль:

$$\left(\frac{p}{2R\alpha} \right)^2 - \frac{T_0}{\alpha} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$p_{min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}.$$

Ответ: $p_{min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$.

Уравнение гармонических колебаний

Задача 11.4. В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1,0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

Решение. В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало лабораторной системы отсчёта $OX_{\text{л}}$ поместим в центр масс. Подвижную систему отсчёта OX свяжем со спицей. В лабораторной системе отсчёта ускорение бусинки при малом ее смещении x относительно спицы определяется силой притяжения концевоегo отрезка спицы длиной $2x$, расположенного примерно на расстоянии $L/2$ от бусинки:

$$a_{m,c} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm \frac{M}{L} 2x}{m \left(\frac{L}{2}\right)^2} = -\frac{8GM}{L^3} x.$$

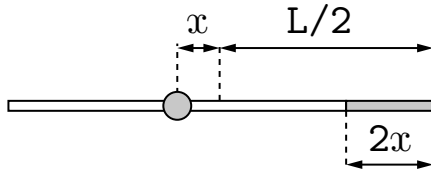


Рис. 54

Ускорение стержня при этом смещении бусинки

$$a_{M,c} = \frac{F_x}{M} = -\frac{Gm \frac{M}{L} 2x}{M \left(\frac{L}{2}\right)^2} = -\frac{8Gm}{L^3} x.$$

Тогда ускорение a_m бусинки относительно стержня будет равно

$$a_m = a_{m,c} - a_{M,c} = -\frac{8G(M+m)}{L^3} x.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы:

$$x'' + \frac{8G(M+m)}{L^3}x = x'' + \omega^2x = 0,$$

где ω — частота колебаний. Отсюда можно определить период колебаний:

$$T \frac{2\pi}{\omega} = \pi L \sqrt{\frac{L}{2GM+m}}.$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} \approx 2,0 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 24 \text{ суток}.$$

Ответ: $\tau = 24$ суток.

Примечание. В колебательной системе, в которой отсутствуют диссипативные явления (например, силы трения), справедлив закон сохранения энергии, который можно записать в следующем формальном виде:

$$E = E_k + E_p = \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + \frac{\beta}{2}x^2 = \text{const}.$$

Здесь под $\dot{x} \equiv x'$ обозначена первая производная величины x . Аналогично, под $\ddot{x} \equiv x''$ обозначается вторая производная. α и β — некоторые размерные коэффициенты пропорциональности в слагаемых для кинетической и потенциальной энергии, соответствующие рассматриваемой системе.

Продифференцируем обе части закона сохранения энергии, учитывая, что производная константы равна нулю:

$$\alpha\dot{x}\ddot{x} + \beta x\dot{x} = 0.$$

Сокращая на \dot{x} , получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{\alpha}x = 0,$$

в котором частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\beta/\alpha}$.

Интегрирование, дифференциальные уравнения

Задача 11.5^[13]. В электрической цепи (см. рис. 55), состоящей из резистора сопротивлением R , катушки индуктивностью L , на конденсаторе ёмкостью C_0 находится заряд Q_0 . В некоторый момент времени замыкают ключ K и одновременно начинают изменять ёмкость конденсатора так, что идеальный вольтметр показывает постоянное напряжение. Как зависит от времени ёмкость конденсатора $C(t)$ при изменении t от 0 до $t_1 = \sqrt{C_0 L}$? Какую работу за время t_1 совершили внешние силы? Считайте, что $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$.

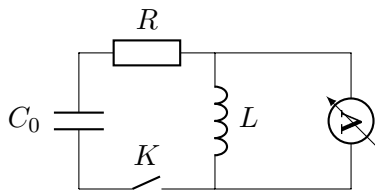


Рис. 55

Примечание. Количество теплоты, выделившейся на резисторе за время t_1 , равно $W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}$.

Решение. В начальный момент ключ не замкнут и ток в цепи не течёт, поэтому $U_L = U_C = \frac{Q_0}{C_0}$.

Напряжение на катушке равно $U_L = L \frac{dI}{dt}$ и остаётся постоянным (по условию). Разделяя переменные, получаем:

$$dI = \frac{U_L}{L} dt = \frac{Q_0}{C_0 L} dt.$$

Интегрируем:

$$I = \frac{Q_0}{C_0 L} t + \text{const}.$$

Учитывая, что в начальный момент тока нет ($I(0) = 0$), получаем $\text{const} = 0$ и решение:

$$I(t) = \frac{Q_0}{C_0 L} t.$$

Производная тока по времени: $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{Q_0}{C_0L}$. По закону Ома для полной цепи:

$$U_C(t) = U_L + RI(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \frac{Q_0}{C_0} + \frac{Q_0R}{C_0L} = \frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{R}{L}t\right).$$

Заряд на конденсаторе изменяется по закону:

$$\frac{dQ}{dt} = -I(t).$$

Справа стоит знак «-», т. к. конденсатор разряжается и заряд уменьшается.

$$dQ = -I(t)dt,$$

$$Q(t) = \text{const} - \int_0^t I(\tau)d\tau.$$

С учётом того, что в начальный момент заряд на конденсаторе равен Q_0 , получаем:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 - \int_0^t I(\tau)d\tau = Q_0 - \int_0^t \frac{Q_0}{C_0L} \tau d\tau = Q_0 - \frac{Q_0}{C_0L} \int_0^t \tau d\tau = \\ &= Q_0 - \frac{Q_0}{C_0L} \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = Q_0 \left(1 - \frac{t^2}{2C_0L}\right). \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить, вычислив площадь под графиком зависимости $I(t)$ (площадь трапеции).

Находим измеряемую ёмкость конденсатора:

$$C(t) = \frac{Q(t)}{U(t)} = \frac{Q_0 \left(1 - \frac{t^2}{2C_0L}\right)}{\frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{R}{L}t\right)} = C_0 \frac{1 - \frac{t^2}{2C_0L}}{1 + \frac{R}{L}t}.$$

Искомую работу найдём из закона сохранения энергии:

$$A = W_R + \Delta W_C + \Delta W_L.$$

Здесь:

W_R — количество теплоты, выделившейся на резисторе за время t_1 .

По условию оно равно $W_R = \frac{Q_0^2}{3C_0}$.

ΔW_C — энергия, запасённая в конденсаторе:

$$W_C(t) = \frac{1}{2}QU_C = \frac{Q_0}{2C_0} \left(1 - \frac{t^2}{2C_0L}\right) \left(1 + \frac{R}{L}t\right),$$

$$W_C(0) = \frac{1}{2}QU_C = \frac{Q_0}{2C_0}.$$

Момент времени t_1 по условию задан как $t_1 = L/R = \sqrt{C_0L}$, значит

$$W_C(t_1) = \frac{Q_0}{2C_0} \left(1 - \frac{C_0L}{2C_0L}\right) \left(1 + \frac{R}{L} \frac{L}{R}\right) = \frac{Q_0}{2C_0} \left(1 - \frac{1}{2}\right) (1 + 1) = \frac{Q_0}{2C_0}.$$

Отсюда получаем: $\Delta W_C = W_C(t_1) - W_C(0) = 0$.

ΔW_L — энергия, запасённая в катушке индуктивности:

$$\Delta W_L = W_L(t_1) - W_L(0) = \frac{LI^2(t_1)}{2} - \frac{LI^2(0)}{2} = \frac{LI^2(t_1)}{2}.$$

Найдём величину тока в момент времени t_1 :

$$I(t_1) = \frac{Q_0}{C_0L} t_1 = \frac{Q_0}{C_0L} \sqrt{C_0L} = \frac{Q_0}{\sqrt{C_0L}}.$$

Энергия в катушке:

$$\Delta W_L = \frac{LI^2(t_1)}{2} = \frac{L}{2} \frac{Q_0^2}{C_0L} = \frac{Q_0^2}{2C_0}.$$

Окончательно:

$$A = W_R + \Delta W_C + \Delta W_L = \frac{Q_0^2}{3C_0} + 0 + \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{5Q_0^2}{6C_0}.$$

Ответ: $C(t) = C_0 \frac{1 - t^2/2C_0L}{1 + Rt/L}$, $A = \frac{5Q_0^2}{6C_0}$.

Примечание. Условие того, что напряжение на индуктивности остаётся постоянным, может выполняться только конечное время, поэтому в первом вопросе стоит ограничение $t < t_1 = \sqrt{C_0L}$.

Замена интегрирования функции суммированием уравнений, решение дифференциальных уравнений, производная сложных функций

Задача 11.6^[1]. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 56, все элементы идеальные, их параметры указаны. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ на некоторое время замыкают, а затем размыкают. Сразу после замыкания ключа ток через резистор $3R$ равен I_0 . Сразу после размыкания ключа ток через этот же резистор равен $3I_0$.

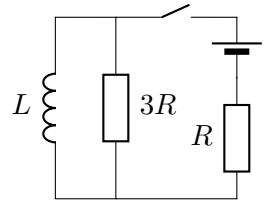


Рис. 56

Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи после размыкания ключа. Найдите ток, текущий через источник непосредственно перед размыканием ключа. Найдите заряд, протекший через резистор $3R$ при замкнутом ключе.

Решение. Опишем качественно ситуацию, которая возникнет после замыкания ключа. Сразу после замыкания ток через катушку не потечет из-за её инерционности, и весь пойдет через сопротивление $3R$. С течением времени ток I_{3R} через сопротивление $3R$ будет уменьшаться, а через катушку I_L — увеличиваться (сопротивление идеальной катушки для постоянного тока равно нулю), пока не достигнет максимума ε/R , однако ключ размыкают раньше.

Поскольку магнитный поток в катушке в момент размыкания ключа не меняется, то ток в катушке непосредственно перед размыканием ключа и сразу после размыкания один и тот же, и равен $3I_0$.

Теплота, которая выделится в цепи после размыкания ключа, равна энергии, запасенной в катушке:

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L(3I_0)^2}{2} = \frac{9}{2}LI_0^2.$$

Поскольку катушка — элемент инерционный, сразу после замыкания ключа ток через катушку не пойдёт, а пойдёт лишь через последовательно соединенные резисторы R и $3R$:

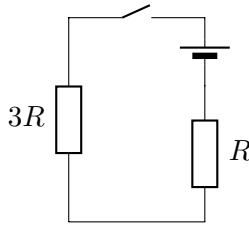


Рис. 57

Сразу после замыкания ключа ток через резистор $3R$ равен I_0 , отсюда:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{3R + R}.$$

Отсюда находим ЭДС источника: $\varepsilon = 4I_0R$.

Пусть I_ε — сила тока через источник, тогда из правил Кирхгоффа непосредственно перед размыканием ключа для контура из $3R$ и источника можно записать:

$$I_\varepsilon R + (I_\varepsilon - 3I_0) \cdot 3R = \varepsilon.$$

С учётом выражения для ε находим ток через источник непосредственно перед размыканием ключа:

$$I_\varepsilon = \frac{13}{4}I_0.$$

Найдём заряд, протекший через резистор $3R$ при замкнутом ключе двумя способами.

I способ. Из правил Кирхгоффа следует, что при замкнутом ключе напряжение на катушке и на резисторе $3R$ одинаковое. Пусть I_L — ток через катушку, I_{3R} — ток через резистор $3R$, тогда:

$$\Delta U = L \frac{\Delta I_L}{\Delta t} = I_{3R} \cdot 3R.$$

Здесь $\varepsilon_L = -L \frac{\Delta I_L}{\Delta t}$ — ЭДС самоиндукции, которое возникает при изменении тока в катушке ΔI_L за некоторый малый промежуток времени Δt . Перепишем это выражение:

$$L \Delta I_L = I_{3R} \Delta t \cdot 3R, \quad L \Delta I_L = \Delta q_{3R} \cdot 3R.$$

Разделим весь промежуток времени на малые интервалы $[t_i; t_i + \Delta t]$ равной длины. Для каждого из промежутков времени можно записать:

$$L(I_L(t_i + \Delta t) - I_L(t_i)) = (q_{3R}(t_i + \Delta t) - q_{3R}(t_i)) \cdot 3R.$$

Видно, что при суммировании по всем интервалам остаются только начальное и конечное значения:

$$L(3I_0 - 0) = (q - 0) \cdot 3R.$$

Отсюда находим заряд: $q = \frac{L}{R} I_0$.

II способ. Решим задачу математически, через нахождение зависимости токов от времени. Пусть I_ε — сила тока через источник, I_{3R} — ток через резистор $3R$, I_L — ток через катушку.

По первому правилу Кирхгоффа:

$$I_\varepsilon = I_L + I_{3R}.$$

По второму правилу Кирхгоффа для контура, содержащего катушку и резистор $3R$, с учётом выражения для ЭДС самоиндукции:

$$L \frac{dI_L}{dt} - I_{3R} \cdot 3R = 0,$$

$$I_{3R} = \frac{L}{3R} \frac{dI_L}{dt}.$$

По второму правилу Кирхгоффа для контура, содержащего источник и катушку:

$$\varepsilon = I_\varepsilon R + L \frac{dI_L}{dt}.$$

Подставляя значения для I_ε и I_{3R} , получаем:

$$\varepsilon = (I_L + I_{3R})R + L \frac{dI_L}{dt} = I_L R + \frac{L}{3R} \frac{dI_L}{dt} R + L \frac{dI_L}{dt} = I_L R + \frac{4}{3} L \frac{dI_L}{dt}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение для функции $I_L(t)$, которое надо дополнить условием отсутствия тока в начальном момент времени:

$$I_L(0) = 0.$$

Поскольку в школе решение таких уравнений не изучают, во избежание «роялей из кустов» в виде готовых ответов, применим следующий приём. Представим функцию $I_L(t)$ в виде произведения некоторых двух функций:

$$I_L(t) = a(t) \cdot b(t).$$

Вспоминая формулу для производной произведения функций и подставляя все в исходное уравнение, получим:

$$\varepsilon = I_L R + \frac{4}{3} L \frac{dI_L}{dt} = abR + \frac{4}{3} L (a'b + b'a) = a \left(bR + \frac{4}{3} L b' \right) + \frac{4}{3} L a' b.$$

Выберем функцию $b(t)$ так, чтобы

$$bR + \frac{4}{3} L b' = 0.$$

Разделяем переменные b и t , и разносим их в разные части уравнения:

$$\frac{db}{b} = -\frac{3R}{4L} dt.$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем:

$$\ln b = -\frac{3R}{4L} t, \quad b(t) = \exp\left(-\frac{3R}{4L} t\right).$$

При такой функции $b(t)$ исходное уравнение приобретает вид

$$\varepsilon = \frac{4}{3} L a' b = \frac{4}{3} L a' \exp\left(-\frac{3R}{4L} t\right),$$

$$a' = \frac{da}{dt} = \frac{3\varepsilon}{4L} \exp\left(\frac{3R}{4L} t\right).$$

Интегрируем:

$$a(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(\frac{3R}{4L} t\right) + C,$$

$$I_L(t) = a(t)b(t) = \frac{\varepsilon}{R} + C \exp\left(-\frac{3R}{4L} t\right).$$

Здесь C — постоянная интегрирования, которую найдем из начального условия $I_L(0) = 0$:

$$I_L(0) = \frac{\varepsilon}{R} + C = 0, \quad C = -\frac{\varepsilon}{R}.$$

Итого:

$$I_L(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right) \right).$$

Как видно из данной функции, в начальный момент ток через катушку равен нулю, а затем увеличивается, стремясь к пределу ε/R . Найдем ток через резистор $3R$:

$$I_{3R} = \frac{L}{3R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right) \right) \right) = \frac{\varepsilon}{4R} \exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right).$$

Анализ функции показывает, что в начальный момент ток максимален и равен

$$I_{3R}(0) = \frac{\varepsilon}{4R} = I_0,$$

а дальше экспоненциально уменьшается. Отсюда получаем $\varepsilon = 4I_0R$. Ток через резистор можно переписать как:

$$I_{3R} = I_0 \exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right).$$

При размыкании ключа в некоторый момент времени t_x ток через резистор становится равным току через катушку, и по условию он равен $3I_0$. Определим момент времени t_x :

$$I_L(t_x) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{3R}{4L}t_x\right) \right) = 3I_0,$$

$$1 - \exp\left(-\frac{3R}{4L}t_x\right) = \frac{R}{\varepsilon} \cdot 3I_0 = \frac{3I_0R}{4I_0R} = \frac{3}{4}.$$

Можно выразить точное значение t_x , но в этой задаче это излишне. Найдём заряд, который пройдёт через резистор $3R$ до размыкания ключа (до момента времени t_x):

$$\begin{aligned}
 q &= \int_0^{t_x} I_{3R}(t) dt = \int_0^{t_x} I_0 \exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right) dt = \\
 &= I_0 \frac{4L}{3R} \left(-\exp\left(-\frac{3R}{4L}t\right)\right) \Big|_0^{t_x} = I_0 \frac{4L}{3R} \left(1 - \exp\left(-\frac{3R}{4L}t_x\right)\right) = \\
 &= I_0 \frac{4L}{3R} \cdot \frac{3}{4} = \frac{L}{R} I_0.
 \end{aligned}$$

Ответ: $Q = \frac{9}{2}LI_0^2$, $I_\varepsilon = \frac{13}{4}I_0$, $q = \frac{L}{R}I_0$.

Дифференциальные уравнения, интегрирование, графическое решение, малые величины

Задача 11.7^[15]. Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, остаются в механическом равновесии. В приближении адиабатической атмосферы оцените высоту H атмосферы Земли и высоту h_0 нижней кромки облаков. Температура на поверхности Земли $t_0 = 27^\circ\text{C}$, а относительная влажность воздуха $\varphi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$. Воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль.

Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице 58.

$t, ^\circ\text{C}$	6	8	10	12	14	16	18
$P_H, \text{мм.рт.ст.}$	7,01	8,05	9,21	10,5	12,0	13,6	15,5
$t, ^\circ\text{C}$	20	22	24	26	28	30	
$P_H, \text{мм.рт.ст.}$	17,5	19,8	22,4	25,2	28,4	31,8	

Рис. 58

Решение. Рассмотрим перемещение одного моля воздуха в атмосфере. В адиабатическом приближении по закону сохранения энергии работа внешнего давления (по отношению к выделенной порции воздуха) расходуется на изменение внутренней энергии U и потенциальной энергии $\mu g z$. Тогда:

$$P_1 V_1 - P_2 V_2 = U_2 - U_1 + \mu g(z_2 - z_1).$$

Учитывая $U + PV = c_V T + RT = c_P T$, перегруппировав слагаемые, получим:

$$c_P \Delta T = -\mu g \Delta z.$$

Отсюда получаем зависимость температуры от высоты, учитывая, что молярная теплоёмкость для двухатомного газа при постоянном объёме равна $3,5R$:

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_P} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z.$$

Эту же формулу можно получить и другим способом. Выделим полубесконечный цилиндр воздуха с сечением площади S . Рассмотрим небольшую порцию на высоте от z до $z + dz$. Запишем условие механического равновесия для этой порции:

$$P(z)S = P(z + dz)S + g\rho S dz, \quad dP = -\rho g dz.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}.$$

$$dP = -\rho g dz = -\frac{P\mu}{RT} g dz. \quad (8)$$

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса в координатах P и V имеет вид $PV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = c_P/c_V$ — показатель адиабаты.

$$V = \frac{RT}{P}, \quad P \left(\frac{RT}{P} \right)^\gamma = \text{const},$$

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad P = \text{const} \cdot T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{dP}{dT} = \text{const} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}-1} = \left(\text{const} \cdot T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right) \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{T} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{T}. \quad (9)$$

Для двухатомного газа $c_P = 3,5R$, отсюда:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{c_P/c_V}{c_P/c_V - 1} = \frac{c_P}{c_P - c_V} \frac{c_P}{R} = \frac{7}{2}.$$

Сравнивая выражения (8) и (9), получаем:

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = -\frac{\mu}{RT} g dz,$$

$$dT = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} dz = -\frac{2\mu g}{7R} z.$$

Интегрируя уравнение, получаем

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_P} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z.$$

Высоту атмосферы можно оценить по высоте, при которой температура воздуха обращается в абсолютный ноль:

$$H \approx \frac{7RT_0}{2\mu g} \approx 30 \text{ км.}$$

Нижняя кромка облаков образуется в точке росы, т. е. на такой высоте h_0 , при которой парциальное давление водяного столба сравнивается с давлением насыщенного пара $P(z)$. На поверхности Земли давление пара $P_0 = \varphi P_H(T_0)$.

По законам гидростатики, парциальное давление водяного пара с высотой изменяется по закону:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Так как $h_0 \ll H$, то можно считать изменения температуры и давления воздуха малыми, поэтому его плотность практически постоянна и равна

$$\rho \approx \frac{P_0 \mu_{\text{H}_2\text{O}}}{RT_0}.$$

Тогда давление изменяется по линейному закону:

$$\frac{P(z)}{P_H(T_0)} \approx \frac{P_0}{P_H(T_0)} - \frac{\rho g z}{P_H(T_0)} = \varphi \left(1 - \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}} g z}{RT_0} \right).$$

Используя таблицу зависимости давления насыщенного пара от температуры и зная зависимость температуры от высоты, построим график

зависимости давления насыщенного пара $P_H(z)/P_H(T_0)$ от высоты z (см. рис. 59). На этой же координатной плоскости построим график зависимости парциального давления водяного пара $P(z)/P_H(T_0)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет искомой высотой.

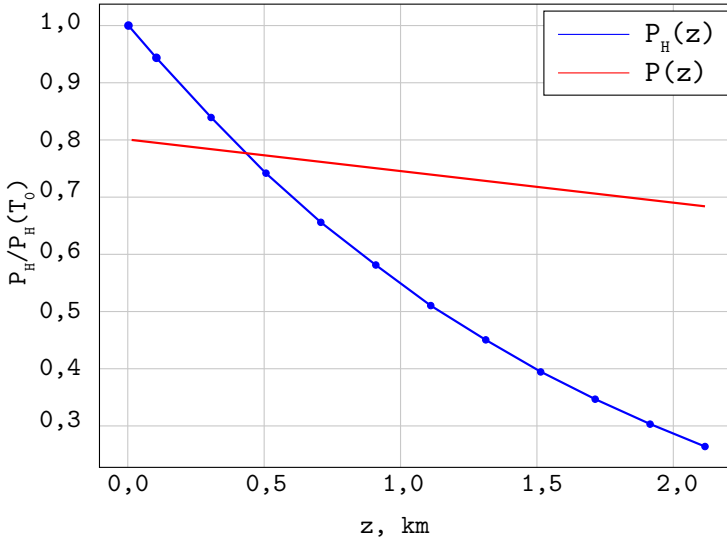


Рис. 59

Из графиков получаем, что $h_0 \approx 0,43$ км. Заметим, что на этой высоте парциальное давление паров понизилось примерно на 6% по сравнению с давлением у поверхности Земли, а температура — менее, чем на 2%, что вполне оправдывает наши приближения.

Ответ: 30 км, 0,43 км.

Тригонометрические функции, прямоугольный треугольник, касательная к окружности

Задача 11.8^[14]. Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили перед экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (см. рис. 60). Показатель преломления стекла линзы $n = 2,0$. Диаметр линзы, меньше размеров экрана.

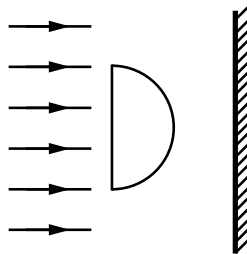


Рис. 60

Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина, изображенная на рисунке 61. Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещённостью.

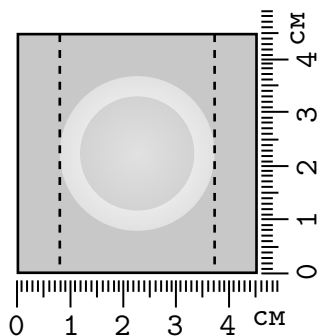


Рис. 61

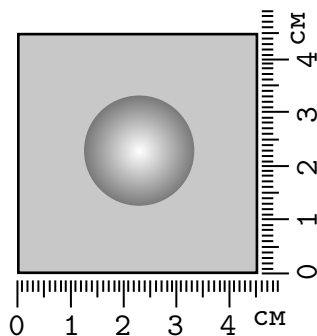


Рис. 62

Решение. Рассмотрим ход лучей в линзе. Плоскую границу линзы все лучи проходят без преломления. А вот из сферической поверхности выходят не все лучи. Часть из них испытывает полное отражение. Найдем предельный угол падения, при котором лучи перестают выходить за сферическую поверхность: $n \cdot \sin \alpha_{\text{пр}} = 1,0$. Отсюда $\alpha_{\text{пр}} = 30^\circ$.

Построим ход некоторых лучей. Из данной картинки (см. рис. 63) понятно, почему в первом случае мы наблюдаем на экране кольцо более яркое, чем вся поверхность экрана. Это кольцо создается как лучами, прошедшими мимо линзы, так и некоторыми лучами, прошедшими сквозь неё. При этом внешняя граница яркого кольца определяется как раз лучом, падающим на сферическую поверхность под предельным углом 30° .

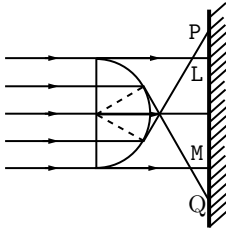


Рис. 63

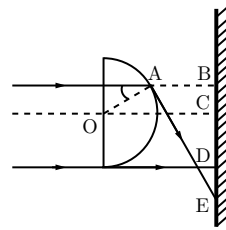


Рис. 64

Диаметр же темного центрального пятна равен диаметру линзы. Определим с помощью масштабной линейки внешний диаметр кольца $D = 2,90$ см и диаметр внутреннего темного круга $d = 2,10$ см.

Рассмотрим предельный луч. Отмеченный угол равен 30° , $CD = \frac{d}{2} = R = 1,05$ см (см. рис. 64).

$$CE = \frac{D}{2} = 1,45 \text{ см.}$$

Пусть L — искомое расстояние, тогда $AB = L - R \cos \alpha_{\text{пр}}$.

$$BD = \frac{D}{2} + R \sin \alpha_{\text{пр}}, \quad \frac{AB}{BD} = \text{tg } \alpha_{\text{пр}}.$$

В результате преобразований получим

$$L_1 = \frac{\frac{D}{2} \sin \alpha_{\text{пр}} + R}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = 2,05 \text{ см.}$$

Во втором случае точки D и E должны совпасть. Тогда $D = d = 2R$.

$$L_2 = \frac{R \sin \alpha_{\text{пр}} + R}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = 1,82 \text{ см.}$$

Ответ: $L_1 = 2,05$ см, $L_2 = 1,82$ см.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 11.9. Две бусинки, каждая с положительным зарядом q и массой m , могут скользить без трения по жесткому, непроводящему стержню.

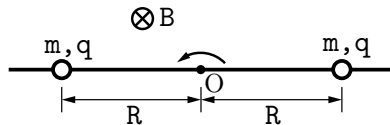


Рис. 65

Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией B и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O , перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (см. рис. 65).

Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии R от оси O при двух значениях угловой скорости ω_1 и ω_2 . Найти заряд q , считая известными m , B , ω_1 и ω_2 . Найти R , считая известными M , B , ω_1 и ω_2 . Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

Ответ: $q = \frac{m(\omega_1 + \omega_2)}{B}$, $R = \sqrt[3]{\frac{km(\omega_1 + \omega_2)^2}{4\omega_1\omega_2 B^2}}$.

Задача 11.10. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн, резистора сопротивлением $R = 1$ Ом, источника постоянного напряжения, ограничивающего резистора и ключа (см. рис. 66). Через значительное время после замыкания ключа сила тока через батарейку устанавливается постоянной и равной $I_0 = 0,1$ А.

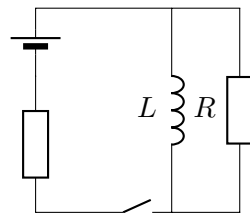


Рис. 66

Определите с точностью не хуже 1%, на какую величину ΔI изменится ток через катушку за время $\tau = 10^{-2}$ с после размыкания ключа? Все элементы цепи можно считать идеальными.

Ответ: $\Delta I = -1$ мА.

Задача 11.11. В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиуса R , а рядом поставили точно такой же аквариум с

золотой рыбкой (см. рис.67). Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать её, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в соседа. На каком расстоянии с точки зрения карася плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах равен $n = 4/3$? Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от её истинного размера? Прямое или перевернутое изображение соседки видит карась?

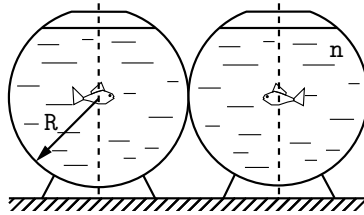


Рис. 67

Ответ: $3R$, 2, прямое увеличенное изображение.

Список литературы

1. Олимпиада «Физтех–2015».
2. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2003–2004 гг.
3. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2009–2010 гг.
4. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2010–2011 гг.
5. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2011–2012 гг.
6. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2013–2014 гг.
7. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2014–2015 гг.
8. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2015–2016 гг.
9. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2016–2017 гг.
10. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2017–2018 гг.
11. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2010–2011 гг.
12. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2014–2015 гг.
13. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2016–2017 гг.
14. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2017–2018 гг.

15. Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2017–2018 гг.