Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НАУКА В РЕГИОНЫ

Газовые законы

Методические материалы
по физике
для учащихся 8 класса

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Желтоухов А. А., Калашников А. Д.

А23 Газовые законы: методические материалы по физике для учащихся 8 класса / А. А. Желтоухов, А. Д. Калашников. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 67 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии дается обзор приемов и методов, использующихся при решении задач по физике, с примерами решения олимпиадных задач с муниципального и регионального этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Книга предназначается учащимся 8 класса школ с углубленным изучением физики и математики, учителям физики и математики, руководителям кружков и факультативов по физике, а также всем людям, увлекающимся физикой.

Желтоухов Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры общей физики МФТИ

Калашников Александр Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики МФТИ

Содержание

Основные термодинамические понятия. Газовые законы

Основные термодинамические понятия

Тепловые явления изучаются двумя разделами физики: термодинамикой и молекулярной физикой. Из этих двух разделов термодинамика сформировалась первой и её развитие было тесно связано с изобретением и исследованием паровых машин. Молекулярная физика, или молекулярно-кинетическая теория (сокращённо МКТ) сформировалась несколько позже. В основе МКТ лежат три утверждения.

1. Все вещества состоят из отдельных атомов или молекул, разделённых промежутками.
2. Молекулы вещества находятся в состоянии непрерывного беспорядочного теплового движения.
3. Между молекулами вещества существует взаимное притяжение и отталкивание.

МКТ рассматривает системы состоящие из большого числа частиц. Из-за того, что этих частиц очень много и они движутся хаотически, к ним становится возможно применять законы теории вероятности и статистики. В результате, состояние такой системы можно описать небольшим набором параметров. Примером таких параметров являются давление, объём и температура. Термодинамика отвлекается от внутреннего устройства системы и работает только с этим небольшим числом параметров. Законы термодинамики (часть из них ещё называют «начала термодинамики») сначала были получены, как обобщения опытных фактов, и лишь потом были выведены математически на основе МКТ.

Примером таких законов является *нулевое начало термодинамики*, согласно которому изолированная система (которая не обменивается с окружающей средой ни энергией, ни веществом) при неизменных внешних условиях со временем приходит в состояние *термодинамического равновесия* — все макроскопические процессы прекращаются, а термодинамические параметры становятся постоянными по всему объёму системы. При равенстве температур говорят, что наступило тепловое равновесие, а при равенстве давлений — механическое равновесие.

Поскольку число частиц в термодинамических системах очень велико, его принято измерять не в тысячах или миллионах, а в ещё более «крупных» единицах — молях. Один моль любого вещества содержит огромное число $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ молекул, которое называется *постоянная Авогадро* (или *число Авогадро*). Таким образом, если в системе N молекул, то количество вещества в этой системе $\nu = \dfrac{N}{N_A}$. Масса одного моля вещества называется *молярной массой*. Постоянная Авогадро была выбрана так, чтобы масса одного моля в граммах численно равнялась массе соответствующей молекулы в а. е. м. (атомных единицах массы). Так, например, масса одного моля углерода равна 12 грамм.

Всякое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её параметров состояния, называется *термодинамическим процессом*.

Пусть в сосуде с поршнем находится некоторая порция газа. Тогда примером термодинамического процесса может служить процесс, в котором при перемещении поршня происходит изменение объёма V газа в сосуде. При этом каждому значению объёма V в состоянии теплового равновесия будет соответствовать определённое значение давления газа P . Следовательно, между объёмом газа и его давлением будет существовать некоторая зависимость PV, которую можно представить графически, т. е. построить её график в координатах (P, V).

Каждая точка на графике соответствует состоянию термодинамического равновесия. Но всякое изменение одного из параметров означает, что система вышла из состояния теплового равновесия и ей уже нельзя приписать в целом ни определённого давления, ни определённой температуры. Например, при быстром опускании поршня (т. е. при сжатии газа) параметры газа (например, давление, плотность и температура) вблизи поршня изменятся довольно существенно. В то же время, вдали от поршня изменение состояния газа произойдёт несколько позже.

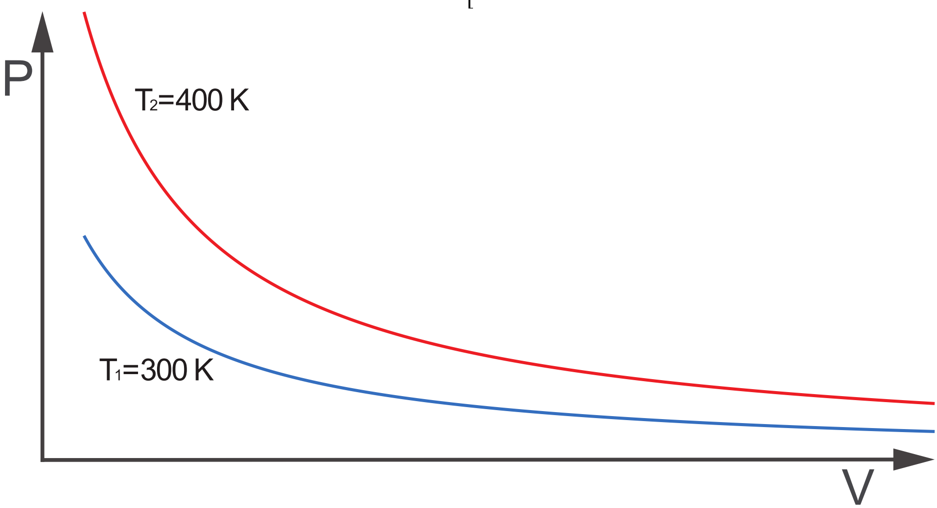
Поэтому газ в целом имеет разные давления и температуры в различных точках, и такое состояние газа нельзя изобразить графически.

Таким образом, на графиках изображаются достаточно медленные процессы, в которых система последовательно проходит много состояний термодинамического равновесия. Такие процессы называются *равновесными* или *квазистатическими*. В дальнейшем мы будем рассматривать только квазистатические процессы.

Процессы, протекающие при постоянной массе газа и неизменном значении одного из параметров состояния газа (давление, объём или температура), принято называть *изопроцессами*. Например, процесс, происходящий при постоянной температуре, называется *изотермическим*, при постоянном объёме — *изохорическим (или изохорным)*, при постоянном давлении — *изобарическим (или изобарным)*.

Изотермический процесс. Закон Бойля–Мариотта

[



Изотермы при разных температурах

В XVII веке независимо друг от друга английский физик Бойль и французский физик Мариотт экспериментально установили закон связывающий изменения давления и объёма газа в изотермическом процессе. Закон носит название закона Бойля–Мариотта и обычно записывается в виде:

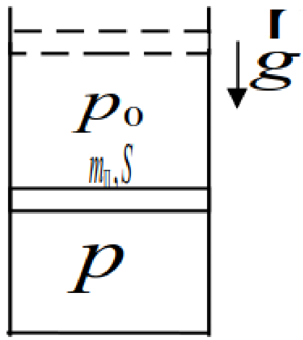
$$PV = \mathrm{const}\,,$$

где значение константы определяется температурой, при которой происходит данный процесс. График этого процесса (изотерма) в координатах P и V изобразится кривой, определяемой уравнением

$$P = \frac{\mathrm{const}}{V}.$$

Эта кривая, как известно из математики, называется гиперболой. На рисунке выше изображены изотермы одной и той же массы газа для двух разных температур T_1 и T_2, $T_2 > T_1$. Изотерма, соответствующая бóльшей температуре, проходит выше, так как при одинаковых объёмах бóльшей температуре соответствует и бóльшее давление.

Изобарический процесс. Закон Гей–Люссака



Поместим газ в сосуд с вертикальными стенками и подвижным поршнем, имеющим массу $m_п$ и площадь сечения S, который может перемещаться без трения (рисунок выше). Пусть на поршень сверху действует атмосферное давление P_0.

Рассмотрим равновесное состояние газа, характеризуемое давлением P. Величину этого давления найдём из условия механического равновесия для поршня. На поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести $m_{п}g$) и сила давления атмосферы $P_0 \cdot S$), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны газа под поршнем, значение которой равно $P \cdot S$.

Условие равновесия поршня — равенство нулю равнодействующей этих сил. Отсюда для давления P газа находим:

$$P = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Внешнее давление на газ по третьему закону Ньютона также равно P.

Исследуя на опыте тепловое расширение газов при постоянном давлении, французский учёный Гей–Люссак открыл, что объём V газа данной массы при изменении температуры t изменяется по линейному закону:

$$V = V_0 \left(1 + \alpha t\right).$$

Здесь V_0 — объём газа при температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, α — коэффициент объёмного расширения при постоянном давлении. Оказалось, что для всех газов принимает одно и тоже значение, равное $1/273\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Изохорический процесс. Закон Шарля

Рассмотрим теперь процесс нагревания газа при постоянном объёме, или, как говорят, процесс изохорического нагревания газа. Поместим для этого газ в герметический сосуд, например, в металлический котёл с плотно завинчивающейся крышкой. Будем нагревать газ в котле, измеряя его температуру и давление. Как показывает опыт, давление газа внутри котла увеличивается с ростом температуры.

Зависимость давления газа от температуры при неизменном объёме была экспериментально установлена французским физиком Шарлем. Согласно закону Шарля, давление P газа данной массы при изменении температуры T изменяется по линейному закону:

$$P = P_0 \left(1 + \gamma T\right).$$

Здесь P_0 — давление газа при температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, γ — термический коэффициент давления. Оказалось, что для всех газов принимает одно и тоже значение, равное 1/273 °C. Заметим, что коэффициент γ равен коэффициенту α в законе Гей–Люссака.

Абсолютная шкала температур

Законы Гей–Люссака и Шарля выглядят гораздо проще, если вместо температурной шкалы Цельсия ввести шкалу, предложенную английским физиком Кельвином. Связь между температурой T по шкале Кельвина и температурой t по шкале Цельсия даётся формулой:

$$T = t + 273 = t + \frac{1}{\alpha} = t + \frac{1}{\gamma}.$$

Единица измерения температуры по шкале Кельвина называется кельвином и обозначается буквой К. Шкалу Кельвина также называют *абсолютной шкалой температур*. На новой температурной шкале нулю градусов Цельсия соответствует температура $T_0 = 273$ К (точнее, 273,15 К). Законы Гей–Люссака и Шарля при этом примут вид:

$$V = V_0 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0 \alpha T,$$

$$P = P_0 \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + t\right) = P_0 \gamma T,$$

где V_0 и P_0 — объём и давление газа при температуре T_0.

Уравнение состояния идеального газа

Как отмечалось выше, в состоянии термодинамического равновесия система характеризуется небольшим числом параметров, которые называются параметры состояния. Эти параметры не являются независимыми — они связаны *уравнением состояния*. Параметрами состояния для газа являются давление P, объём V и температура T. Уравнение состояния, связывающее эти параметры, имеет вид

$$PV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $R = 8{,}31\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — универсальная газовая постоянная. Это уравнение также называется *уравнением (или законом) Менделеева–Клапейрона.*

Нетрудно заметить, что законы Бойля–Мариотта, Гей–Люссака и Шарля являются следствиями уравнения Менделеева–Клапейрона.

Следует также отметить, что в реальных условиях ни один из газов не подчиняется строго уравнению Менделеева–Клапейрона. Правда, отклонения от закона Менделеева–Клапейрона фактически исчезают для достаточно разреженных газов. Однако при низких температурах и больших плотностях начинаются заметные отклонения от этого закона. Отклонения от закона Менделеева–Клапейрона наблюдаются и при достаточно высоких температурах (порядка тысячи или нескольких тысяч градусов) для газов из многоатомных молекул. При этих температурах начинается распад молекул на атомы (диссоциация). При ещё более высоких температурах начинается распад атомов на электроны и ионы, и любой газ перестаёт подчиняться уравнению Менделеева–Клапейрона, даже при сколь угодно малых плотностях.

В термодинамике *идеальным* называют газ, строго подчиняющийся уравнению Менделеева–Клапейрона.

Примеры решения задач

Задача 1[1]. При нагревании газа при постоянном объёме на $\Delta T = 1$ К давление увеличилось на $\varphi = 0{,}2\%$. При какой начальной температуре находился газ?

Решение. В условии речь идёт о двух состояниях газа: до и после нагревания. Для каждого из них запишем уравнение состояния (уравнение Менделеева–Клапейрона):

$$P_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1,$$

$$P_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2,$$

где учтено, что $V_1 = V_2 = V$.

Поделив почленно второе уравнение на первое получим:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

По условию задачи:

$$T_2 = T_1 + \Delta T,$$

$$P_2 = P_1 + \frac{\varphi}{100\%} \cdot P_1.$$

После несложных вычислений находим:

$$T_1 = \Delta T \frac{100\%}{\varphi} = 500 \text{ К}.$$

Задача 2. Спутник погрузился в тень Земли. При этом температура внутри спутника, равная вначале $T_0 = 300$ К, упала на 1%, из-за чего давление воздуха понизилось на $\Delta P = 1000$ Па. Определите массу воздуха в спутнике, если воздух занимает объём $V = 10$ м^3 .

Решение. Начальное состояние воздуха в спутнике (до попадания его в тень) описывается уравнением

$$P_0 V = \frac{m}{M} R T_0,$$

где P_0 — начальное давление воздуха, m — масса воздуха, M — молярная масса воздуха. После попадания спутника в тень состояние воздуха изменилось, и теперь описывается уравнением:

$$PV = \frac{m}{M} RT,$$

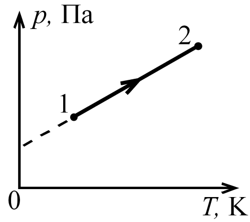
где, согласно условию задачи, $P = P_0 - \Delta p$, $T = 0{,}99 T_0$. Тогда, вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\Delta P V = \frac{m}{M} R \cdot 0{,}01 T_0.$$

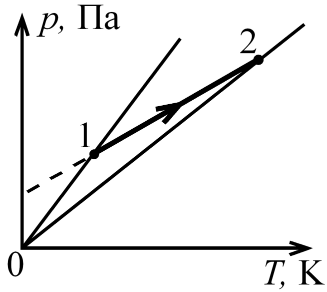
Окончательно, для массы воздуха в спутнике находим:

$$m = \frac{\Delta P \cdot V \cdot M}{R \cdot 0{,}01 T_0} = 11{,}6 \text{ кг}.$$

Задача 3*. При нагревании идеального газа была получена зависимость давления от температуры, изображённая на рисунке справа. Определите, что производилось во время нагревания газа: сжатие или расширение (T — абсолютная температура)?



Решение. Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся приёмом, основанном на вспомогательных построениях. График изохорного процесса в координатах P, T представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угловой коэффициент этой прямой обратно пропорционально зависит от объёма.



Проведём две изохоры, одна из которых проходит через точку 1, вторая — через 2 (на рисунке выше). Первая изохора соответствует объёму V_1 в состоянии 1, вторая — объёму V_2 в состоянии 2. Видно, что первая изохора идёт круче второй, следовательно, её угловой коэффициент больше. Это в свою очередь, означает, что $V_1 < V_2$, т. е. при переходе из состояния 1 в состояние 2 газ расширялся.

Задача 4[1]. При расширении идеального газа его давление менялось по закону $P = \alpha V$, где α — постоянная величина. Во сколько раз изменится объём газа при увеличении температуры от 200 до 400 K?

Решение. Подставив данный в условии закон изменения давления в уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$, получим

$$V^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T.$$

Запишем это уравнение для двух состояний газа:

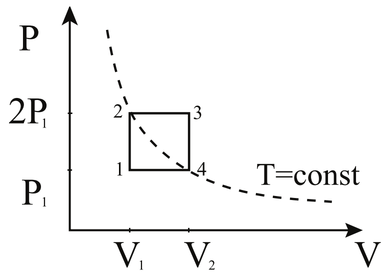
$$V_1^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_1,$$

$$V_1^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_1,$$

Поделив второе из этих уравнений на первое и извлекая квадратный корень из обеих частей, получим:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{2}.$$

Задача 5. Один моль идеального газа совершает процесс, состоящий из двух изохор (1–2 и 3–4) и двух изобар(2–3 и 4–1), причём точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. График этого процесса в координатах (P, V) изображён на рисунке справа. Изобразите этот процесс в координатах (P, T) и (V, T).



Решение. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для состояний 1, 2, 3 и 4, учитывая данные задачи:

$$P_1 V_1 = RT_1,$$

$$2P_1 V_1 = RT_2,$$

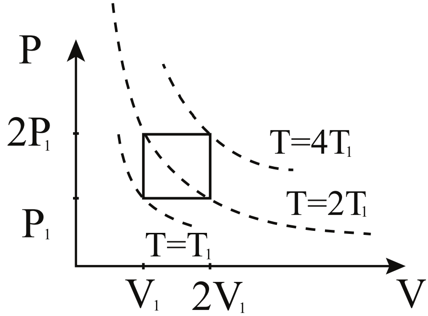
$$2P_1 V_3 = RT_3,$$

$$P_1 V_3 = RT_4 = RT_2.$$

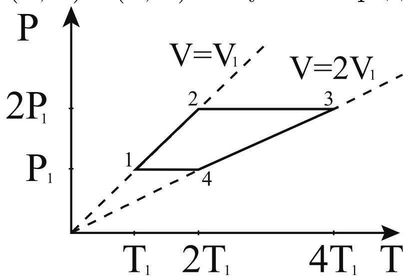
Из первых двух уравнений получаем $T_2 = 2T_1$, тогда первое и четвёртое уравнения дают $V_3 = 2V_1$. Тогда из третьего уравнения находим

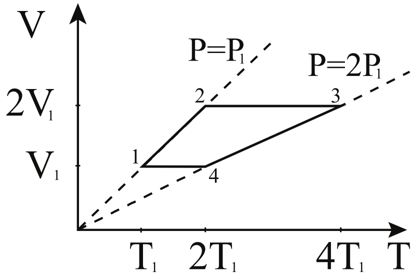
$$T_3 = \frac{4P_1 V_1}{R} = 4T_1.$$

Отметим, что чем больше температура на изотерме, тем дальше от начала координат находится соответствующая гипербола на графике в координатах (P, V) (рисунок ниже).



Зная координаты всех ключевых точек, построим графики в координатах (P, T) и (V, T). Результат представлен на левом и правом рисунках.

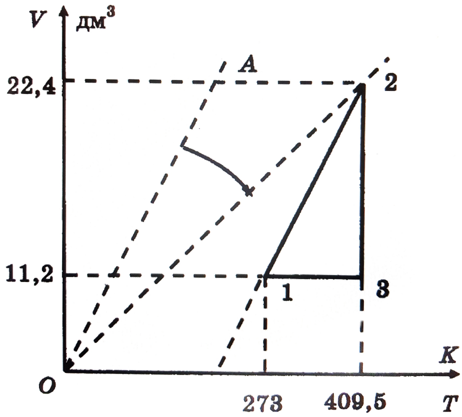




Изохорные процессы 1–2 и 3–4 на графике в координатах (P, T) представляют собой отрезки прямых, проходящих через начало координат. Причём большему объёму соответствует меньший угол наклона (более пологая прямая). Аналогично изобарные процессы на графике в координатах (V, T) представляют собой отрезки прямых, проходящих через начало координат. Причём большему давлению соответствует меньший угол наклона (более пологая прямая).

Задача 6[1]. На рисунке ниже в координатах (V, T) изображён замкнутый цикл 1–2–3–1, который совершает некоторая масса азота. Известно, что минимальное давление газа в этом процессе $P_{\min} = 3 \cdot 10^5$ Па. Определить массу газа и его давление в точке 1.

Решение. Как обсуждалось в задаче **5**, изобарный процесс на графике в координатах (V, T) лежит на прямой, проходящих через начало координат, причём, чем меньше давление, тем больше угол наклона. Плавно переходя от изобары OA к изобарам с большим давлением, мы сначала коснёмся графика процесса в точке 2. Очевидно, что в точке 2



давление минимально, так как изобары, проходящие через другие точки графика цикла, соответствуют бо́льшим давлениям. В частности, максимальное давление газа в цикле достигается в точке 3. Запишем уравнение состояния газа в точке 2:

$$P_2V_2 = \frac{m}{\mu_{N_2}}RT_2,$$

где $P_2 = P_{\min} = 3 \cdot 10^5$ Па, $V_2 = 22{,}4$ дм^3, $T_2 = 409{,}5$ К. В результате находим массу азота:

$$m = \frac{P_2V_2\mu_{N_2}}{RT_2} \approx 0{,}04 \text{ кг}.$$

Зная m, из уравнения Менделеева–Клапейрона для состояния газа в точке 1 мы можем найти давление в точке 1:

$$P_1 = \frac{mRT_1}{\mu_{N_2}V_1}.$$

Задача 7. Для одного моля идеального газа всегда выполняется условие $PV = RT$, где P — давление газа, V — объём газа, T — температура газа, $R = 8{,}31$ Дж/К. Экспериментатор заметил, что с одним молем идеального газа, что-то происходит, но так, что его температура зависит от параметров газа по закону $T = T_0 \cdot (1 - P_0/P)$, где T_0 и P_0 — некоторые известные положительные величины, причём давление всегда было $P > P_0$. Определите наибольший возможный объём газа в этом процессе.

Решение. Из условия задачи получаем $PV = RT_0(1 - P_0/P)$. Отсюда

$$V = R\frac{T_0}{P_0}\left(\frac{P_0}{P} - \left(\frac{P_0}{P}\right)^2\right) = R\frac{T_0}{P_0}(x - x^2),\ \text{где } x = P_0/P.$$

Выделим полный квадрат:

$$x - x^2 = -\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}\right) = -\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Следовательно, максимальное значение объёма $V = R\dfrac{T_0}{P_0}\cdot\dfrac{1}{4}$.

Задача 8. В вертикально расположенном цилиндре с гладкими стенками сечением S под поршнем массой m находится воздух при температуре T_1. Когда на поршень положили груз массой M, расстояние от него до дна цилиндра уменьшилось в n раз. На сколько повысилась температура воздуха в цилиндре? Атмосферное давление P_0.

Решение. В первой ситуации на поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести mg и сила давления атмосферы P_0S), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны воздуха под поршнем P_1S. Из равенства нулю равнодействующей этих сил (условие механического равновесия поршня) для начального давления P_1 воздуха находим:

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Рассуждая аналогичным образом, для давления P_2 воздуха во второй ситуации (на поршень положили дополнительный груз массой M) имеем:

$$P_1 = P_0 + \frac{(m+M)g}{S}.$$

Пусть H_1 и H_2 — расстояния от дна цилиндра до поршня в начале и в конце опыта. Тогда для начального (V_1) и конечного (V_2) объёмов воздуха можно записать: $V_1 = H_1S$, $V_2 = H_2S$. С учётом полученных соотношений уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний воздуха принимают вид:

$$P_1V_1 = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) H_1S = \nu RT_1,$$
$$P_2V_2 = \left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) H_2S = \nu RT_2,$$

где ν — число молей воздуха в цилиндре. Учитывая, что объём воздуха уменьшился в n раз ($H_2 = H_1/n$,) для отношения температур воздуха находим:

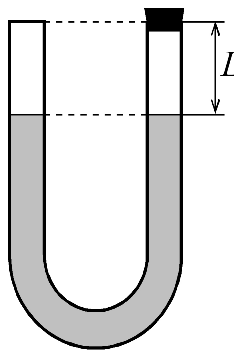
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) H_1S}{\left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) H_2S} = \frac{n\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) S}{\left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) S}.$$

Теперь для изменения температуры $\Delta T = T_2 - T_1$ получаем:

$$\Delta T = T_1\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{Mg}{n(P_0S + mg)}\right).$$

Заметим, что воздух будет нагреваться, если выражение в скобках больше нуля.

Задача 9[4]. U-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с вертикально расположенными коленами заполняется ртутью так, что в каждом из открытых колен остаётся слой воздуха длиной $L = 320$ мм (рисунок справа). Затем правое колено закрывается небольшой пробкой. Какой максимальной длины слой ртути можно долить в левое колено, чтобы она не выливалась из трубки? Опыт производится при постоянной температуре, внешнее давление составляет 720 мм рт. ст.



Решение. Пусть S — площадь сечения трубки. Тогда, после того, как правое колено закрыли пробкой, между пробкой и ртутью оказался заперт воздух, занимающий объём $V_1 = SL$ при давлении $P_1 =$ $= 720$ мм рт. ст. Равновесное состояние этого воздуха описывается уравнением Менделеева–Клапейрона $P_1V_1 = P_1SL = \nu RT$ где ν — число молей воздуха, T — его температура.

При доливании в левое колено максимально возможного количества ртути оно будет заполнено ртутью полностью, т. е. уровень ртути поднимется на L, а в правом колене уровень ртути поднимется на некоторую высоту h. Таким образом, полная высота столбика ртути, долитой в трубку, равна $L + h$.

Ртуть в трубке находится в равновесии. Условием равновесия является равенство давлений в точках, расположенных в правом и левом коленах на одном горизонтальном уровне. Выберем уровень, проходящий на расстоянии L от верхнего края трубки. Давление в левом колене $P_{\text{л}} = P_1 + \rho_{\text{рт}} gL$, где P_1 — атмосферное давление на открытую поверхность ртути. Давление в правом колене $P_{\text{п}} = P_2 + \rho_{\text{рт}} gh$, где P_2 — давление воздуха запертого в правом колене. Тогда условие равновесия ртути в трубке можно записать следующим образом:

$$P_{\text{л}} = P_1 + \rho_{\text{рт}} gL = P_{\text{п}} = P_2 + \rho \text{рт} gh.$$

Новое равновесное состояние запертого в правом колене воздуха описывается уравнением:

$$P_2 V_2 = P_2 S(L - h) = \nu RT.$$

Используя составленные соотношения, получаем квадратное уравнение для определения h:

$$P_2 S(L - h) = (P_1 + \rho_{\text{рт}} g(L - h))S(L - h) = P_1 SL,$$

решая которое, находим: $h = 80$ мм (второй корень уравнения, $h = 1280$ мм, не удовлетворяет условию задачи).

Следовательно, в трубку можно долить слой ртути максимальной высотой $L + h = 400$ мм.

Задача 10. Воздушный шар, наполненный водородом H_2, имеет объём $V = 1000$ м^3. Чему равна подъёмная сила шара у поверхности Земли? Давление и температура водорода и окружающего воздуха одинаковые и составляют соответственно 760 мм рт. ст. и 20 °C. Оболочка шара тонкая и имеет массу 9 кг, молярная масса воздуха $M_{\text{возд}} = 29$ г/моль.

Решение. Подъёмная сила шара равна разности силы Архимеда (выталкивающей силы), действующей на аэростат со стороны окружающего его воздуха, и силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород внутри него: $F_{\text{под}} = F_{\text{арх}} + F_{\text{тяж}}$.

Для силы Архимеда имеем:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{возд}} g V \text{ , где } \rho_{\text{возд}} = \frac{PM_{\text{возд}}}{RT}.$$

Здесь P — давление воздуха, $M_{\text{возд}}$ — его молярная масса, T — температура. Учитывая уравнение состояния водорода, для силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород, получаем:

$$F_{\text{тяж}} = (m + m_{\text{вод}})g = (m + \rho_{\text{возд}} V)g = \left(m + \frac{PM_{\text{возд}}V}{RT}\right)g,$$

где m — масса оболочки, $M_{\text{вод}}$ — молярная масса водорода. Теперь для подъёмной силы находим:

$$F_{\text{под}} = \left(\frac{PV(M_{\text{возд}} - M_{\text{вод}})}{RT} - m\right)g = 1020 \text{ Н}.$$

Задача 11[2]. На какую глубину в жидкость плотности ρ надо погрузить открытую трубку длины L, чтобы, закрыв верхнее отверстие, вынуть столбик жидкости высотой $L/2$? Атмосферное давление равно P.

Решение. Обозначим глубину погружения трубки x. Тогда уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха в верхней части трубки будет иметь вид:

$$PS(L - x) = \nu RT.$$

После того, как трубку закрывают и вынимают, количество вещества ν и температура T воздуха в её верхней части не меняются. Уравнение Менделеева–Клапейрона для нового состояния будет иметь вид:

$$P_1 S\left(L - \frac{L}{2}\right) = \nu RT.$$

Приравнивая левые части этих уравнений и сокращая на S, получаем.

$$P\,(L - x) = P_1 \frac{L}{2}.$$

Чтобы жидкость не вытекала из трубки, наружное давление P должно уравновешивать давление воздуха внутри P_1 и давление столба жидкости $\rho g \frac{L}{2}$:

$$P = P_1 + \rho g \frac{L}{2}.$$

В результате имеем:

$$P(L-x)=\left(P-\rho g\frac{L}{2}\right)\cdot 0{,}5\cdot L,$$

$$x=\frac{L}{2}\left(1+\frac{\rho g L}{2P}\right).$$

Задача 12[2]. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжёлый поршень. Масса газа и его температура над поршнем и под ним одинаковы. Отношение внутреннего объёма части сосуда над поршнем к внутреннему объёму части сосуда под поршнем равно 3. Каким будет это соотношение, если температуру газа увеличить в 2 раза?

Решение. Чтобы поршень находился в равновесии, давление газа под ним должно быть больше давления газа над ним на величину $\frac{mg}{S}$, где m — масса поршня, а S — его площадь (она равна площади горизонтального сечения сосуда). Обозначим суммарный объём газа V. Тогда объём над поршнем $\frac{3}{4}V$, а под поршнем — $\frac{1}{4}V$. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа над поршнем и под поршнем до нагрева:

$$P\cdot\frac{3}{4}V=\nu RT,$$

$$\left(P+\frac{mg}{S}\right)\cdot\frac{1}{4}V=\nu RT.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\frac{mg}{S}=2P=\frac{8\nu RT}{3V}.$$

Обозначим отношение объёмов над поршнем V_1 и под поршнем V_2 после нагрева через $x=\dfrac{V_1}{V_2}$. Тогда из условия $V_1+V_2=V$ получаем

$$V_2=\frac{V}{1+x}, V_1=x\cdot V_2.$$

Теперь запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа над поршнем и под поршнем после нагрева:

$$P^*\cdot\frac{x}{1+x}V=\nu R2T,$$

$$(P^* + \frac{mg}{S}) \cdot \frac{V}{1+x} = \nu R2T.$$

Аналогично случаю до нагрева, из этих двух уравнений получим:

$$\frac{mg}{S} = P^*(x-1) = \frac{(x^2-1)\nu R2T}{x \cdot V}.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{(x^2-1)2}{x} = \frac{8}{3},$$

$$3x^2 - 4x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \approx 1{,}9.$$

Задача 13. На дне озера глубиной h температура воды равна T_1, а на поверхности — T_2. Пузырёк воздуха, имеющий начальный объём V_1, медленно поднимается со дна. Чему равен объём пузырька у поверхности воды? Атмосферное давление равно P_0

Решение. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа внутри пузырька на дне и у поверхности:

$$P_1V_1 = \nu RT_1,$$

$$P_2V_2 = \nu RT_2.$$

Вблизи поверхности давление равно атмосферному $P_2 = P_0$, а на дне озера — $P_1 = P_0 + \rho gh$. В результате, получаем:

$$V_2 = \frac{\nu RT_2}{P_0} = \frac{P_1V_1T_2}{P_0T_1} = \frac{(P_0+\rho gh)V_1T_2}{P_0T_1}.$$

Задача 14[3]. С какой максимальной силой прижимается к телу человека медицинская банка, если площадь её отверстия $S = 12{,}6$ см^2? В момент прикладывания к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80\,°\mathrm{C}$, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Изменением объёма воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

Решение. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для газа в банке в момент прикладывания к телу и в момент, когда воздух в ней охладился до t_0:

$$P_0V = \nu RT,$$

$$P_2V = \nu RT_0.$$

Отсюда получаем $P_2 = P_0\dfrac{T_0}{T}$. Снаружи банка прижимается к коже атмосферным давлением с силой P_0S. С другой стороны, давление воздуха в банке стремиться оттолкнуть банку от кожи с силой P_2S. В результате, сила с которой прижимается банка равна

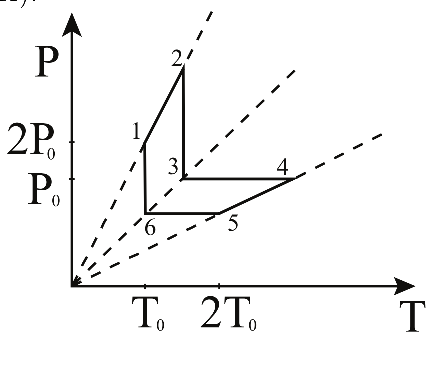
$$F = P_0S - P_2S = P_0S\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) = 21\ \text{Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 15. Идеальный газ сначала расширяется при постоянном давлении, затем нагревается при постоянном объёме, потом газ изотермически сжимается, после охлаждается при постоянном давлении и по изохоре возвращается в начальное состояние. Нарисуйте графики этого процесса в координатах (V, P); (T, V); (T, P).

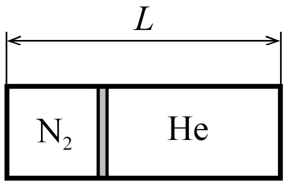
Задача 16*. Уравнение теплового процесса $PV^2 = \alpha$, где α — некоторая константа. Увеличивается или уменьшается температура газа при увеличении объёма?

Задача 17. Определите число молекул в 1 см^3 воздуха при н. у. ($P = 10^5$ Па, $T = 273$ К).



Задача 18. На рисунке выше в координатах (P, T) изображён замкнутый цикл 1–2–3–4–5–6–1. Изобразите этот процесс в координатах (P, V) и (V, T).

Задача 19. Горизонтально расположенный сосуд постоянного внутреннего сечения и длины L разделён теплонепроницаемой подвижной перегородкой (на рисунке ниже). В одной части сосуда находится азот, в другой гелий. В первоначальном состоянии температура газов 300 K, а объём, занимаемый гелием, в два раза больше объёма азота. Затем температуру азота повышают до 600 K. На какое расстояние переместится перегородка? Толщина перегородки много меньше L. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

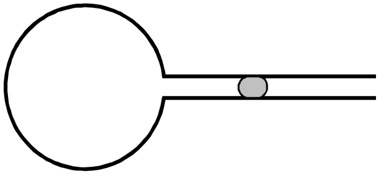


Задача 20. Водитель ручным насосом накачивает полностью спустившую шину. Объём шины $V = 25$ л. Насос при каждом рабочем ходе захватывает $V_0 = 0{,}5$ л воздуха из атмосферы при нормальных условиях ($P_0 = 10^5$ Па) . Сколько ходов должен сделать поршень насоса, чтобы накачать шину до давления $P = 2 \cdot 10^5$ Па?

Задача 21[2]. В горлышко бутылки вставили пробку сечением 2 см^2. Давление воздуха в бутылке равно 10^5 Па при температуре 7 °C. Чтобы вынуть пробку при этой температуре, нужно приложить силу 10 Н. На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела?

Задача 22. Оцените, какое количество воздушных шариков наполненных гелием потребуется, чтобы поднять человека, масса которого со снаряжением 70 кг? Атмосферное давление 10^5 Па, температура воздуха 17 °C, объём шарика 50 л.

Задача 23. В тонкостенную колбу впаяна длинная стеклянная трубка постоянного внутреннего сечения (рисунок ниже). В трубке находится капелька ртути, отделяющая воздух в колбе от окружающего воздуха. Изменение температуры окружающего воздуха при постоянном атмосферном давлении приводит к смещению капельки — получаем газовый термометр. При температуре $t_1 = 17\,^\circ\mathrm{C}$ капелька находится на расстоянии $L_1 = 20$ см от левого края трубки. Минимальная температура, которую можно измерить таким термометром, равна $t_0 = 7\,^\circ\mathrm{C}$. При какой температуре t_2 капелька будет находиться на расстоянии $L_2 = 40$ см от колбы? Атмосферное давление считать неизменным.



Задача 24[4]. В вертикально расположенной тонкостенной трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 280$ мм заперт слой воздуха длиной L. Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Опыт производится при постоянной температуре, внешнее давление составляет 770 мм рт. ст.

Задача 25. Два моля идеального газа находились в баллоне, где имеется клапан, выпускающий газ при давлении внутри баллона более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па. При температуре 300 К давление в баллоне было равно $1 \cdot 10^5$ Па. Затем газ нагрели до температуры 600 К. Сколько газа при этом вышло из баллона? Ответ приведите в молях.

Примечание. Клапан работает следующим образом. При давлении внутри баллона более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па клапан открывается. Как только давление в баллоне становится менее $1{,}5 \cdot 10^5$ Па, клапан закрывается. Таким образом, давление в баллоне поддерживается не более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

Задача 26. Газ находится в вертикальном цилиндре с гладкими стенками под тяжёлым поршнем с площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2. Когда цилиндр перевернули открытым концом вниз, оказалось, что в новом равновесном состоянии объём газа в три раза больше первоначального. Определите массу поршня. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, $g = 10$ м/с^2. Температура поддерживается постоянной.

Внутренняя энергия

Вещества состоят из молекул, которые непрерывно и хаотично движутся и взаимодействуют друг с другом. Вследствие движения, молекулы обладают кинетической энергией, а вследствие наличия взаимодействия, они обладают потенциальной энергией.

Внутренней энергией тела называют сумму всех кинетических и сумму всех потенциальных энергий молекул, из которых оно состоит:

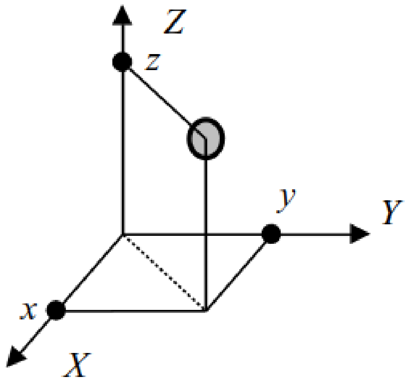
$$U = \sum W_k + \sum W_p. \tag{1}$$

Уже из определения можно увидеть, что при увеличении скоростей молекул внутренняя энергия тела увеличится. Скорости теплового движения молекул могут измениться, например, при нагревании тела (повышении температуры) или в результате неупругого столкновения (удара). Если состояние тела претерпевает изменения, но при этом конечная температура тела равна его первоначальной температуре, то средние скорости молекул и их кинетические энергии также примут первоначальные значения (независимо от потенциальной энергии).

При растяжении (или сжатии) изменяется расстояние между молекулами, и, как следствие, изменяется потенциальная энергия взаимодействия молекул. Если газ в некотором состоянии занимает некоторый объём, то молекулы удалены друг от друга на определённое среднее расстояние. Если теперь газ расширить, а потом нагреть и сжать до начального объёма, то расстояние между молекулами вернётся к первоначальному значению, а это означает, что и потенциальные энергии молекул примут первоначальные значения. Тот же результат получится для потенциальной энергии молекул газа, если повторить эти процессы без нагревания. Кинетические энергии молекул при этом могут меняться.

Данные примеры приводят нас к пониманию того, что внутренняя энергия тела, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, не зависит от того, каким способом данное тело приведено в данное состояние, а определяется параметрами его состояния, например, температурой и объёмом.

Степени свободы



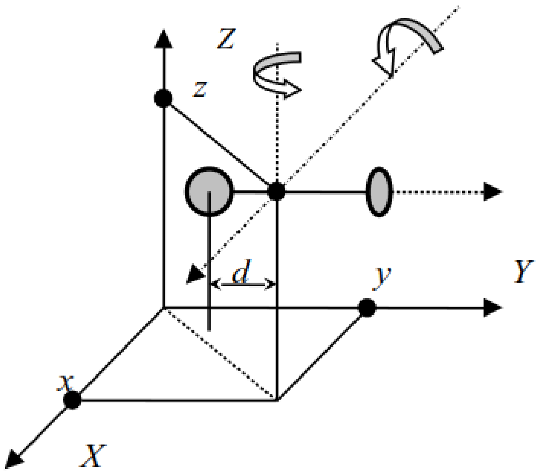
Молекулы могут участвовать в разных типах движения: поступательном (любые молекулы), вращательном (двух и многоатомные), колебательном (двух и многоатомные).

Число степеней свободы — это число независимых параметров (координат), необходимых для однозначного описания положения тела в пространстве.

Для описания положения в пространстве одноатомной молекулы потребуется всего три координаты, что соответствует тому, что она обладает тремя степенями свободы (рисунок выше).

Принято обозначать число степеней свободы буквой i . Для рассматриваемого примера $i = 3$. Наличие этих трёх координат фактически указывает на способность тела двигаться в трёх направлениях, или, как говорят, обладает тремя поступательными степенями свободы.

Для описания положения в пространстве двухатомной молекулы потребуется учесть способность центра масс этой молекулы двигаться в трёх направлениях (три *поступательные* степени свободы) и способность вращаться вокруг двух осей, проходящих через центр масс (две *вращательные* степени свободы). Третья ось, проходящая через центры атомов двухатомных молекул, не изменяет положения атомов, и потому не рассматривается (на рисунке ниже пунктирные оси и фигурные оси).



У трёхатомных или многоатомных молекул их было бы три.

И последнее возможное движение — это колебания атомов относительно центра масс молекулы. Такое движение приводит к изменению расстояния d (на рисунке выше показано для одного атома). Этот тип движения атомов в молекуле «даёт о себе знать» только при температурах выше некоторой характерной температуры (для большинства молекул она составляет примерно 1000 K). При более высокой температуре есть смысл рассматривать эту одну *колебательную* степень свободы, а при более низкой — считать, что данная степень свободы отсутствует.

Таким образом, для описания положения в пространстве двухатомной молекулы требуется 6 величин:

1) три координаты центра масс (поступательные степени свободы),

2) два угла (вращательные степени свободы),

3) одно расстояние d между атомами (колебательная степень свободы).

В итоге имеем $i = 6$ при высокой температуре ($T > 1000$ K) и $i = 5$ при низкой температуре ($T < 1000$ K). Число степеней свободы, подсчитываемое для расчёта энергии, отличается от выше описанного в части *колебательного* движения.

Внутренняя энергия идеального газа

В модели идеального газа потенциальная энергия взаимодействия молекул считается равной нулю. Тогда из (1) имеем $U = \sum W_K$.

В термодинамике часто пользуются принципом равнораспределения энергии по степеням свободы. Суть принципа состоит в том, что *на каждую степень свободы приходится одинаковая часть общей внутренней энергии.*

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа равна

$$\overline{E_\text{к}} = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура газа.

Число степеней свободы у одноатомных молекул равно трём: $i = 3$. Легко догадаться, что на каждую степень свободы для одноатомных газов будет приходиться энергия:

$$\overline{\varepsilon_\text{к}} = \frac{1}{2}kT.$$

Тогда средняя кинетическая энергия каждой молекулы с числом степеней свободы будет записываться так:

$$\overline{E_\text{к}} = \frac{i}{2}kT.$$

Для всего газа можем получить выражение для внутренней энергии:

$$U = \frac{i}{2}kT \cdot N\frac{i}{2}kT \cdot \frac{m}{M}N_A = \frac{i}{2}\frac{m}{M}kN_AT.$$

Так как $R = kN_A = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная, то

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT.$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, выражение для внутренней энергии идеального газа можно записать так: $U = ipV/2$.

Напомним, что для двухатомного газа число степеней свободы может быть разным:

- $i = 6$ при высокой температуре ($T > 1000$ K),
- $i = 5$ при низкой температуре ($T < 1000$ K).

В распределении энергии по степеням свободы у молекул есть очень важная особенность: при колебательном движении на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT! Это связано с тем, что при колебаниях атомов в молекуле следует учитывать не только их кинетическую энергию, но и их потенциальную энергию взаимодействия. Средние значения этих энергий равны $kT/2$ каждое, что в сумме и даёт среднее значение энергии колебательного движения равное kT.

Поэтому подсчёт числа степеней свободы для двухатомной молекулы газа, имеющего высокую температуру ($T > 1000$ K), приводит к следующему результату: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}} = 7$.

Далее всегда (если нет специальной оговорки) мы будем считать, что молекулярная система жёсткая, и в ней нет колебаний.

Первый закон термодинамики

Обобщая полученные результаты рассмотрения способов изменений внутренней энергии, можем записать первый закон термодинамики:

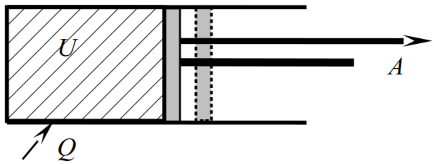
$$\Delta U = Q + A.$$

По сути, мы видим закон сохранения энергии, записанный для тепловых процессов, но это и есть первый закон термодинамики.

Изменение внутренней энергии термодинамической системы равно сумме полученного количества теплоты и работы, совершённой над ней окружающими телами.

Можно проиллюстрировать первый закон термодинамики и на другом примере: если газ заперт в лёгком цилиндре под поршнем (на рисунке ниже), а цилиндру сообщить количество теплоты Q, то газ нагреется, увеличив внутреннюю энергию (теплоёмкостью цилиндра пренебрегаем), его давление увеличится, и он совершит работу над окружающими телами A':

$$Q = \Delta U + A'.$$



Количество теплоты, переданное термодинамической системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение работы системой над окружающими телами.

В последних формулах встретились работы A и A'. Напомним, что

- A' — работа термодинамической системы над окружающими телами,
- A — работа окружающих тел над термодинамической системой.

При равномерном движении поршня сила, действующая на поршень со стороны газа, расположенного внутри цилиндра, равна по модулю и противоположна по направлению силе, действующей на газ со стороны поршня. Очевидно, что

$$A = -A'.$$

Работа окружающих тел *над системой* равна и противоположна по знаку работе системы *над окружающими телами.*

Первый закон термодинамики имеет одно важное следствие: невозможно создать вечный двигатель первого рода. Т. е. невозможно создать двигатель, который непрерывно и бесконечно долго совершал бы работу без потребления энергии из окружающей среды. И действительно: если $Q = 0$, то $A' = -\Delta U$, следовательно, система может совершить вполне конечную работу, не превосходящую запаса внутренней энергии системы.

Коротко остановимся на терминологии, используемой при описании тепловых процессов.

Термодинамический процесс называется *обратимым*, если при совершении его в прямом, а потом в обратном направлении все тела, включая саму систему, вернутся в исходное состояние. Необходимым и достаточным условием обратимости процесса является равновесность его промежуточных состояний.

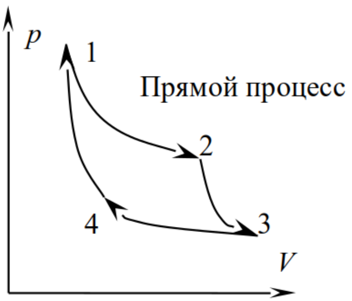
Употребляются также термины: равновесный, или квазистатический процессы. Равновесные процессы можно описать графически, неравновесный — невозможно.

Реальные процессы сопровождаются теплообменом, диффузией, трением (необратимыми процессами), следовательно, большинство реальных процессов являются необратимыми.

Круговым процессом (циклом) называют термодинамический процесс, в результате совершения которого система возвращается в исходное состояние. Равновесный круговой процесс можно изобразить графически, при этом график процесса представляет собой замкнутую линию.

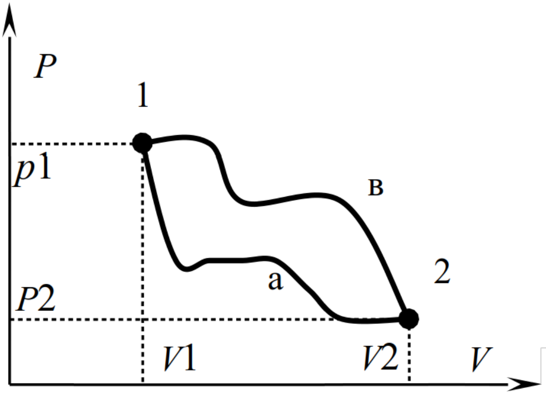
В *прямом круговом* процессе система за цикл совершает положительную работу (рисунок слева).

В *обратном круговом* процессе система за цикл совершает отрицательную работу (рисунок справа).



Теплоёмкость

Перевод термодинамической системы (например, порции идеального газа) из состояния 1 в состояние 2 можно осуществить разными способами. На рисунке ниже показаны графики двух возможных процессов (1а–2 и 1в–2), позволяющих осуществить такой перевод.



Изменение внутренней энергии системы в том и в другом случае одинаково (оно определяется положениями точек 1 и 2 на pV-диаграмме), а работа, совершённая системой над окружающими телами, различна (площадь фигур под графиками процессов 1а–2 и 1в–2 разная, площадь под графиком процесса 1в–2 больше).

Следовательно, и количество теплоты, затраченное на перевод системы из состояния 1 в 2 ($Q = \Delta U + A'$), будет разным.

Теплоёмкостью C термодинамической системы (тела) называют отношение бесконечно малого количества теплоты ΔQ, переданного системе, к изменению ΔT его температуры, вызванного этим количеством теплоты:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Численное значение теплоёмкости тела показывает, какое количество теплоты потребуется для изменения температуры всего тела на 1 градус по шкале Цельсия (Кельвина).

При расчётах чаще пользуются удельной теплоёмкостью (теплоёмкостью 1 кг вещества).

Удельной теплоёмкостью вещества называют отношение теплоёмкости тела (системы) к массе этого тела (системы):

$$c_m = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[c_m] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$.

Молярной теплоёмкостью тела (системы) называют отношение теплоёмкости тела (системы) к количеству вещества в этом теле (системе):

$$c_M = \frac{C}{\nu} = \frac{\Delta Q}{\nu \cdot \Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[c_M] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Получим соотношение между удельной и молярной теплоёмкостями:

$$c_M = \frac{Q}{\Delta T \cdot \frac{m}{M}} = \frac{Q \cdot M}{\Delta T \cdot m} = c_m M.$$

Теперь найдём молярную теплоёмкость идеального газа при изобарном и при изохорном процессах.

При изобарном процессе присутствуют и ΔU, и A', следовательно, молярная теплоёмкость газа при изобарном процессе:

$$c_p = \frac{Q}{\nu \Delta T} = \frac{\Delta U + A'}{\nu \Delta T} = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} + \frac{A'}{\nu \Delta T} = \frac{\frac{i}{2}\nu R \Delta T}{\nu \Delta T} + \frac{\nu R \Delta T}{\nu \Delta T} = \frac{iR}{2} + R = R\frac{i+2}{2}.$$

При изохорном процессе работа не совершается, $A' = 0$, следовательно, молярная теплоёмкость газа при изохорном процессе:

$$c_V = \frac{Q}{\nu \cdot \Delta T} = \frac{\Delta U + A'}{\nu \cdot \Delta T} = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} = \frac{\frac{i}{2}\nu R \Delta T}{\nu \Delta T} = \frac{iR}{2}.$$

Соотношение между c_V и c_p можно записать в двух формах:

1) $c_p = c_V + R$ — закон Майера,

2) $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ — коэффициент Пуассона.

Т. к. мы уже знаем, чему равно число степеней свободы у разных молекул, то можем вычислить значения c_p и γ (таблица ниже).

	формула	Одноатомные ($i = 3$)		Двухатомные ($i = 5$)	
c_p	$R\dfrac{i+2}{2}$	$\dfrac{5}{2}R$	$20{,}775\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$\dfrac{7}{2}R$	$29{,}085\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
γ	$\dfrac{i+2}{i}$	$\dfrac{5}{3}$	1,66667	$\dfrac{7}{5}$	1,4

Воздух представляет собой смесь газов, преимущественно двухатомных азота и кислорода, поэтому для него эксперименты дают значение $\gamma \approx 1{,}4$.

Для твёрдых тел теплоёмкости c_p и c_V будут почти одинаковыми. Это можно показать следующим образом. По определению $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$, но $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$, тогда

$$C_p = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{p\Delta V}{\Delta T} = C_V + \frac{p\Delta V}{\Delta T}.$$

При нагревании твёрдых или жидких тел изменение объёма составляет около 10^{-6} первоначального объёма, поэтому вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, что и позволяет говорить о равенстве $c_p = c_V$.

Для газов $\frac{\Delta V}{V}$ на два порядка больше, чем для твёрдых или жидких тел, потому пренебрегать вторым слагаемым нельзя, более того, оно будет составлять заметную долю теплоёмкости c_p.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 27. Вычислите внутреннюю энергию воздуха при 27 °C, выдыхаемого в лёгкие объёмом 2 литра. Молярная масса 29 г/моль.

Задача 28. Нагретый до 80 °C стальной шар радиуса 2 см положили на лёд с температурой 0 °C. На сколько опустится центр шарика? Потенциальной энергией шара пренебречь.

Задача 29. В цилиндре под давлением $p = 2$ атм находится смесь газов: гелия He и водорода H_2. Изобарический нагрев смеси газов приводит к увеличению объёма цилиндра на $\Delta V = 1$ л. На сколько изменилась при этом внутренняя энергия смеси газов? Масса водорода в 1,5 раза больше массы гелия. Молярные массы гелия и водорода равны соответственно 4 г/моль и 2 г/моль.

Задача 30. Дачный домик отапливается с помощью электрических батарей. При температуре батарей $T_{\text{Б}1} = 50\,^\circ\text{C}$ и температуре наружного воздуха $T_1 = -10\,^\circ\text{C}$ в домике устанавливается температура $T = 20\,^\circ\text{C}$. Во сколько раз нужно увеличить силу тока в батареях, чтобы в комнате поддерживалась прежняя температура в холодные дни при наружной температуре $T_2 = -25\,^\circ\text{C}$? Какова при этом будет температура батарей $T_{\text{Б}2}$? Электрическое сопротивление нагревательных элементов батарей можно считать не зависящим от температуры.

Закон Дальтона

При описании природных явлений и процессов в технических устройствах приходится иметь дело не только с одним газом (кислородом, водородом и т. п.), но и со смесью нескольких газов. Воздух, являющийся смесью азота, кислорода, углекислого газа, аргона и других газов, — наиболее часто упоминаемый пример смеси газов.

Допустим, что смесь из N различных газов находится в равновесном состоянии в сосуде объёмом V при абсолютной температуре T. От чего зависит общее давление P в сосуде, заполненном смесью газов? Исследованием этого вопроса в начале XIX века занимался английский химик Джон Дальтон.

Пронумеруем газы, входящие в состав смеси, присвоив каждому свой номер i, $i = 1{,}2, \ldots, N$. Давление P_i, которое производил бы каждый из газов, составляющих смесь, если удалить остальные газы из сосуда, называют *парциальным* давлением этого газа. Парциальный (от латинского слова pars — часть) — частичный, отдельный. Дальтоном экспериментально установлено, что для достаточно разреженных газов давление P смеси газов, химически не взаимодействующих между собой, равно сумме парциальных давлений компонентов смеси:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_N. \tag{2}$$

Сейчас этот закон называют *законом Дальтона.*

В смеси идеальных газов каждый из газов ведёт себя независимо от других газов, и его состояние описывается уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$P_i V = \frac{m_i}{M_i} RT = \nu_i RT\ . \tag{3}$$

Здесь m_i, M_i и ν_i масса, молярная масса и количество молей i-го газа. Если теперь в равенство (2), выражающее закон Дальтона, подставить значения парциальных давлений из (3), то после несложных преобразований можно получить уравнение, описывающее состояние смеси идеальных газов:

$$PV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots + \frac{m_N}{M_N}\right) RT = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N)\, RT. \tag{4}$$

Если ввести понятие *молярная масса смеси*:

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\nu_{\text{см}}} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} + \ldots + \dfrac{m_N}{M_N}} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N}, \tag{5}$$

то уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов будет выглядеть так:

$$P_{\text{см}} V = \frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} RT. \tag{6}$$

Примеры решения задач.

Задача 31. В баллоне находится смесь газов, содержащая 524 г ксенона, 16 г гелия и 71 г молекулярного хлора (Cl_2). Найти молярную массу этой смеси.

Решение. По определению молярной массы:

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\nu_{\text{см}}} = \frac{m_{Xe} + m_{He} + m_{\mathrm{Cl}_2}}{\nu_{Xe} + \nu_{He} + \nu_{\mathrm{Cl}_2}} = \frac{m_{Xe} + m_{He} + m_{\mathrm{Cl}_2}}{\dfrac{m_{Xe}}{M_{Xe}} + \dfrac{m_{He}}{M_{He}} + \dfrac{m_{\mathrm{Cl}_2}}{M_{\mathrm{Cl}_2}}},$$

$$M_{\text{см}} = \frac{524\,\text{г} + 16\,\text{г} + 71\,\text{г}}{\dfrac{524\,\text{г}}{131\,\text{г/моль}} + \dfrac{16\,\text{г}}{4\,\text{г/моль}} + \dfrac{71\,\text{г}}{71\,\text{г/моль}}} \approx 68\,\text{г/моль}.$$

Задача 32[1]. Азот массой $m = 10$ г поместили в сосуд объёмом $V = 1$ л и нагрели до температуры $t = 1500\,^\circ\mathrm{C}$, при которой $\alpha = \frac{1}{3}$ молекул азота диссоциировала на атомы. Найти давление в сосуде.

Решение. После нагревания в сосуде находится смесь двух газов — атомарного азота массой $m_N = \alpha m$ и молекулярного азота массой $m_{N_2} = (1 - \alpha)m$.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона на каждой из компонент смеси:

$$P_N V = \frac{m_N}{\mu_N} RT,$$

$$P_{N_2} V = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} RT.$$

Из закона Дальтона найдём итоговое давление в сосуде:

$$P = P_N + P_{N_2} = \frac{mRT}{V} \cdot \left(\frac{\alpha}{\mu_N + \dfrac{1-\alpha}{\mu_{N_2}}} \right) \approx 40\ \text{МПа}.$$

Задача 33[1]. В стальном баллоне находятся $m_1 = 0{,}2$ г водорода и $m_2 = 3{,}2$ г кислорода при температуре $27\,^\circ\mathrm{C}$. Водород соединяется с кислородом, образуя молекулы воды. После окончания реакции давление в баллоне увеличилось в 3 раза. Какая при этом установилась температура?

Решение. Согласно химической реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ две молекулы водорода соединяются с одной молекулой кислорода и образуют две молекулы воды. Количество вещества водорода и кислорода до реакции:

$$\nu_{O_2} = \frac{m_2}{\mu_{O_2}} = 0{,}1 \text{ моль},$$

$$\nu_{H_2} = \frac{m_2}{\mu_{H_2}} = 0{,}1 \text{ моль}.$$

Но для реакции молекул водорода требуется в 2 раза больше, чем кислорода. Таким образом, в реакцию вступит весь водород и 0,05 молей кислорода, а оставшиеся 0,05 молей кислорода не прореагируют. После окончания реакции в баллоне будет 0,1 молей воды и 0,05 молей кислорода.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона и закон Дальтона для начального состояния:

$$P_{H_2}V = \nu_{H_2}RT_1,$$

$$P_{O_2}V = \nu_{O_2}RT_1,$$

$$P_1 = P_{H_2} + P_{O_2} = (\nu_{H_2} + \nu_{O_2})RT_1.$$

Аналогично, для конечного состояния получаем

$$P_2 = \left(\nu_{H_2O} + \frac{1}{2}\nu_{O_2}\right)RT_2.$$

Используя условие $P_2 = 3P_1$, получаем

$$T_2 = \frac{3(\nu_{H_2} + \nu_{O_2})}{\nu_{H_2} + \frac{1}{2}\nu_{O_2}} \cdot T_1 = 1200\ K.$$

Задача 34[3]. В баллоне вместимостью $V_1 = 16{,}4$ л содержится смесь кислорода и азота общей массой $m = 120$ г, создающая при температуре $t_1 = 17\,^\circ$C давление $P_1 = 6 \cdot 10^5$ Па. Смесь пропускается через ловушку, содержащую раскалённые медные стружки, и закачивается в другой баллон объёмом $V_2 = 30$ л при температуре $t_1 = 87\,^\circ$C. Какое давление будет во втором баллоне, если весь кислород соединится с медью?

Решение. Из уравнения Менделеева–Клапейрона можно определить количество вещества смеси:

$$\nu = \frac{P_1 V_1}{R T_1}.$$

С другой стороны:

$$\nu = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}.$$

Учитывая, что $m_{N_2} + m_{O_2} = m$, получаем уравнение на массу азота:

$$\nu = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m - m_{N_2}}{\mu_{O_2}},$$

$$\nu - \frac{m}{\mu_{O_2}} = m_{N_2}\left(\frac{1}{\mu_{N_2}} - \frac{1}{\mu_{O_2}}\right),$$

$$m_{N_2} = \frac{\mu_{N_2}\mu_{O_2}}{\mu_{O_2} - \mu_{N_2}}\left(\nu - \frac{m}{\mu_{O_2}}\right) = 56 \text{ г}.$$

Давление во втором сосуде получим из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P_2 = \frac{m_{N_2} R T_2}{\mu_{N_2} V_2} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 35. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд разделён тонким подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится кислород (O_2), а слева — смесь гелия (He) и водорода (H_2). Масса кислорода $m_\text{к} = 32$ г. Поршень при этом находится в равновесии посередине сосуда. Материал поршня, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии четверти длины цилиндра от левой стенки. Определите массы гелия и водорода в смеси. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

Решение. В начальный момент кислород и смесь водорода с гелием занимают одинаковые объёмы. Температуры в обеих частях сосуда одинаковы, так как поршень хорошо проводит тепло. Процесс диффузии происходит гораздо медленнее, чем процесс выравнивания давлений. Поэтому в первый момент давления слева и справа от поршня также одинаковы (поршень находится в равновесии). Это позволяет сделать вывод о том, что в начальный момент число молей газа в обеих частях сосуда одинаковое. Справа от поршня находится 1 моль кислорода, следовательно, слева от поршня находится 1 моль смеси гелия и водорода ($\nu_{к} = m_{к}/M_{к}$, $M_{к} = 32$ г/моль).

После окончания процесса диффузии гелий займёт весь объём сосуда, так как перегородка для него проницаема. Подчеркнём, что гелий будет находиться в обеих частях сосуда, причём давление его слева $P_{г,л}$ и справа $P_{г,п}$ будет одинаковым: $P_{г,л} = P_{г,п}$. В новом положении равновесия давление смесей газов слева и справа от поршня будет одинаковым. При этом давление слева складывается из давления кислорода и гелия, а справа водорода и гелия:

$$P_{л} = P_{г,л} + P_{в} = P_{п} = P_{г,п} + P_{к}.$$

Следовательно, давления кислорода $P_{к}$ и водорода $P_{в}$ оказываются одинаковыми: $P_{к} = P_{в}$.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для кислорода и водорода имеем:

$$\frac{3}{4}P_{к}V = \frac{m_{к}}{M_{к}}RT, \quad \frac{1}{4}P_{в}V = \frac{m_{в}}{M_{в}}RT,$$

где $m_{в}$ — масса водорода, $M_{к} = 32$ г/моль и $M_{В} = 2$ г/моль — молярные массы кислорода и водорода. Отсюда находим массу водорода:

$$m_{в} = \frac{M_{в}m_{в}}{3M_{к}} = \frac{2}{3}\text{ г},$$

что соответствует числу молей водорода $\nu_{в} = 1/3$. Следовательно, число молей гелия $\nu_{г} = 2/3$, а масса гелия в смеси:

$$m_{Г} = \nu_{Г}M_{Г} = 8/3\text{г}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 36*. В баллоне ёмкостью 5 л при температуре 25 °C содержится смесь газов, состоящая из 4 молей гелия, 2 молей криптона и 1 моля молекулярного хлора (Cl_2). Найдите парциальные давления газов, давление смеси и молярную массу смеси.

Задача 37*. При нагревании азота (N_2) в замкнутом сосуде до температуры 3000 К его давление увеличилось в 15 раз, при этом половина имевшихся молекул распалась на атомы. Во сколько раз увеличилась температура азота?

Задача 38. В баллоне находится газ, состоящий из смеси гелия, неона и аргона. Парциальные давления: $P_{\mathrm{He}} = 4 \cdot 10^5$ Па, $P_{\mathrm{Ne}} = 2 \cdot 10^5$ Па, $P_{\mathrm{Ar}} = 1 \cdot 10^5$ Па. Температура газов $t = 27\,°\mathrm{C}$. Найти плотность этого газа и его молярную массу.

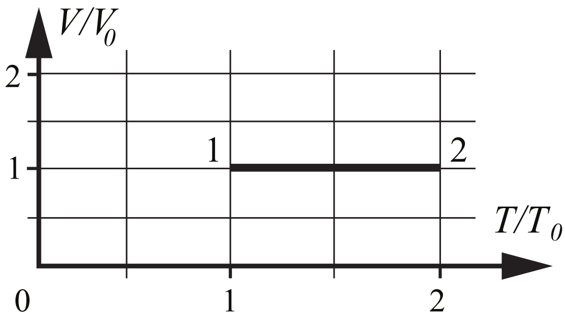
Задача 39[3]. При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует, превращаясь в двуокись азота: $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2$. В откачанный сосуд вместимостью 0,3 л вводится 0,92 г жидкости N_2O_4. При температуре 27 °C жидкость полностью испаряется и частично диссоциирует, при этом давление становится равным 128 кПа. Определить долю молекул N_2O_4, которые диссоциировали.

Диссоциация

Примеры решения задач

Задача 40[13]. Идеальный двухатомный газ, находящийся в герметичном сосуде объёмом V_0, нагревают от температуры T_0 до температуры $2T_0$, в результате чего он полностью диссоциирует на атомы. При этом степень диссоциации газа (доля распавшихся молекул) в указанном диапазоне прямо пропорциональна его температуре. Изобразите этот процесс в осях P, V, V, T и ν, P, где P, V, T и ν — давление, объём, температура и количество вещества, соответственно.

Решение. По условию объём сосуда не меняется, поэтому график в координатах V, T выглядит также, как для изохорного процесса (рисунок ниже). Отметим, что процесс не подчиняется закону Шарля, так как количество частиц в процессе меняется со временем.



По условию задачи степень диссоциации $\alpha = k \cdot T$, где k — неизвестный коэффициент, который можно найти из граничных условий:

$$\alpha(T = 2T_0) = 1.$$

В результате получаем

$$\alpha = \frac{T}{2T_0}.$$

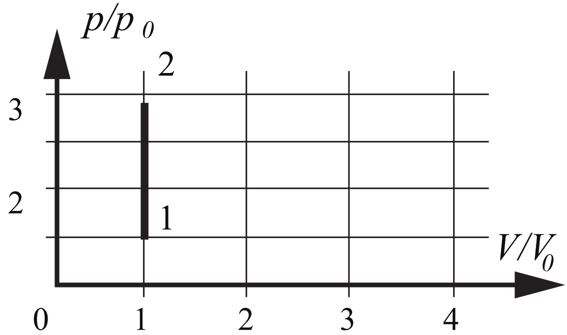
В процессе диссоциации ν_0 молей двухатомного газа образуется $2\alpha\nu_0$ молей атомарного газа, а $(1 - \alpha)\nu_0$ двухатомных молекул остаются нераспавшимися. Тогда полное количество вещества в смеси будет равно $\nu = (1 + \alpha)\nu_0$. Уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси будет иметь вид:

$$PV_0 = (1 + \alpha)\nu_0 RT.$$

Дважды записав это уравнение для начального и конечного состояний, получим:

$$P_0 V_0 = \frac{3}{2}\nu_0 RT_0, \quad P_{\text{к}} V_0 = 4\nu_0 RT_0.$$

Из этих уравнений находим $P_{\text{к}} = \dfrac{8}{3}P_0$, что позволяет построить график процесса в координатах P, V (рисунок ниже).



Для того, чтобы построить график в координатах ν, P, выразим T через ν:

$$T = 2T_0\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right),$$

и подставим полученное выражение в уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$PV_0 = \nu R \cdot 2T_0\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right).$$

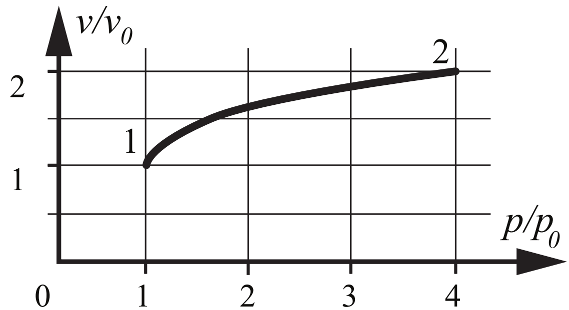
Разделим это уравнение на уравнение Менделеева–Клапейрона для начальной температуры:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{4}{3}\frac{\nu}{nu_0}\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right).$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$\frac{\nu}{nu_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3P}{P_0}}\right).$$

Соответствующий график изображён на рисунке ниже.



Задача 41[16]. Пробирку длиной $l = 35$ см, перевернули вверх дном и полностью погрузили в ртуть так, что дно пробирки касается поверхности жидкости (пробирка вертикальна). При этом жидкость заполнила часть пробирки длиной $h = 4$ см. Затем пробирку медленно подняли вверх так, что её нижний край оказался чуть ниже поверхности ртути (пробирку из ртути не вынимали). Считайте, что в процессе подъёма температура воздуха в пробирке не менялась и оставалась равной $T_0 = 300$ К. Затем температуру воздуха в пробирке изменили, и ртуть вновь заполнила часть пробирки длиной h. Найдите конечную температуру T воздуха в пробирке. Атмосферное давление $P_0 = 760$ мм рт. ст.

Решение. Проверим, не выходит ли часть воздуха из пробирки при её (почти полном) извлечении из ртути.

Обозначим площадь внутреннего сечения пробирки, перпендикулярного её оси, через S, а высоту столба ртути, соответствующую атмосферному давлению — $H = 760$ мм.

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для воздуха в пробирке в момент погружения и в момент, когда её (почти полностью) подняли из ртути:

$$\rho g(H + l - h)S(l - h) = \nu_0 RT_0,$$

$$\rho gHSl = \nu RT_0.$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{(H + l - h)(l - h)}{Hl} = \frac{(76 + 31) \cdot 31}{76 \cdot 35} = 1{,}23 > 1.$$

Следовательно, в процессе подъёма часть должна была выйти из пробирки. Таким образом, после подъёма в пробирке содержится ν молей воздуха при атмосферном давлении.

Для состояния после того, как температуру изменили, уравнение Менделеева—Клапейрона будет иметь вид:

$$\rho g(H - h)S(l - h) = \nu RT.$$

Подставляя в это уравнение ν, получаем

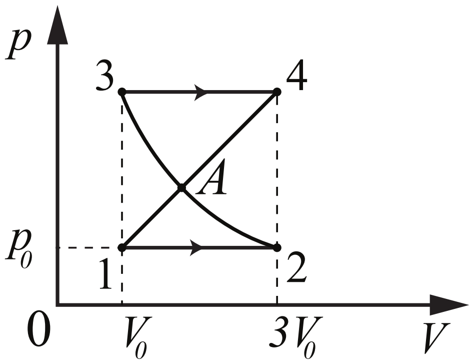
$$\frac{T}{T_0} = \frac{(H - h)(l - h)}{hl} \Rightarrow T = 252\ K.$$

Если не учитывать уменьшение количества воздуха в пробирке и вместо ν использовать ν_0, получается ответ

$$\frac{T}{T_0} = \frac{(H-h)(l-h)}{(H+l-h)(l-h)}, \Rightarrow T = 202\ K,$$

за который давали 3 балла из 10.

Задача 42[9]. Над воздухом проводят процесс, изображённый на рисунке ниже. Участки 1–2 и 3–4 представлены на графике горизонтальными прямыми линиями, участок 1–4 — наклонной прямой линией. На участке 2–3 температура воздуха постоянна. Объём воздуха в точке 3 совпадает с его объёмом в точке 1 и равен $V_0 = 1$ л, а объём в точке 4 совпадает с объёмом в точке 2 и равен $3V_0$. Минимальное давление в процессе $P_0 = 10^5$ Па. Найдите координаты точки A самопересечения на PV-диаграмме.



Решение. Поскольку на участке 2–3 температура постоянна, давление на этом участке обратно пропорционально объёму, и произведение давления на объём в любой точке участка равно этому произведению в точке 2. Значит, уравнение процесса 2–3 имеет вид: $PV = P_0 \cdot 3V_0$.

В частности, в точке 3 (а значит и в точке 4) давление должно быть равно $3P_0$. Поэтому прямая 1–4 проходит через точки

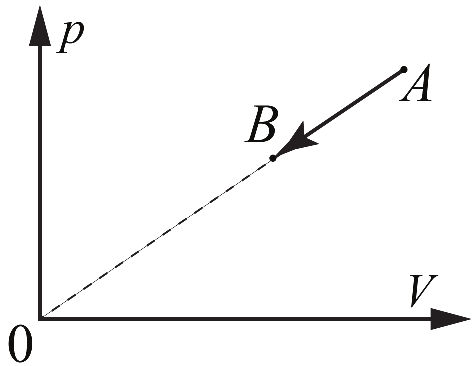
$$(P_0, V_0) \text{ и } (3P_0, 3V_0).$$

Её уравнение $P/P_0 = V/V_0$. Обозначая давление и объём в точке A через $P = xP_0$ и $V = xV_0$, из уравнения процесса 2–3 получим:

$$x^2 = 3 \text{ и } x = \sqrt{3} = 1{,}73.$$

Следовательно, давление в точке самопересечения составляет $1{,}73 \cdot 10^5$ Па, а объём — 1,73 л.

Задача 43[15]. При переводе идеального газа из состояния A в состояние B его давление уменьшалось прямо пропорционально объёму (рисунок ниже), а температура понизилась от 127 °C до 51 °C. На сколько процентов уменьшился объём газа?



Решение. По условию закон $P = \alpha V$, где α — постоянный коэффициент. Подставив это в уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$, получим

$$V^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T.$$

Запишем это уравнение для двух состояний газа:

$$V_A^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_A, \quad V_B^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_B.$$

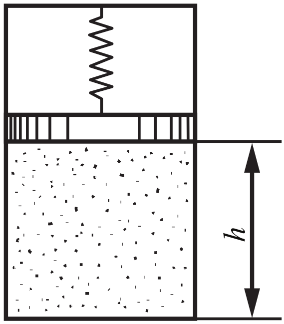
Поделив первое из этих уравнений на второе и извлекая квадратный корень из обеих частей, получим:

$$\frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{T_A}{T_B}} = \sqrt{\frac{273 + 127}{273 + 51}} = 0{,}9.$$

Тогда искомое изменение объёма:

$$\Delta V = (1 - V_A/V_B) \cdot 100\% = 10\%.$$

Задача 44[9]. В закрытом с обоих концов откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. В пространство под поршнем вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту h (на рисунке ниже). На какой высоте h_1 установится поршень, если этот газ нагреть от начальной температуры T до T_1? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.



Решение. Поршень всегда будет устанавливаться в таком положении, при котором сила давления газа равна силе сжатой пружины $F = kh$. Тогда уравнение Менделеева–Клапейрона будет иметь вид:

$$\frac{kh}{S} \cdot Sh = \nu RT, \quad h^2 = \frac{\nu R}{T},$$

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{T_1}{T}}.$$

Задача 45[7]. Открытую с обоих концов трубку длины $L = 2$ м погружают в вертикальном положении на половину её длины в сосуд с ртутью. В трубку вдвигают поршень. На каком расстоянии l от поверхности ртути в сосуде должен находиться поршень, чтобы из трубки вышла половина воздуха? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Атмосферное давление $P_0 = 0{,}1$ МПа.

Решение. При вдвигании поршня сначала воздух будет выдавливать ртуть из трубки. После того, как вся ртуть выдавится, из трубки начнёт выдавливаться воздух Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа в трубке в момент времени перед вставкой поршня и в момент, когда в трубке осталась половина воздуха.

$$P_0 V_0 = \nu RT,$$

$$\left(P_0 + \rho g \frac{L}{2}\right) V_1 = \frac{\nu}{2} RT.$$

Обозначим площадь внутреннего сечения пробирки, перпендикулярного её оси, через S, а высоту столба ртути, соответствующую атмосферному давлению — $H = 760$ мм. Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\rho g H S \frac{L}{2} = \nu RT,$$

$$\rho g \left(H + \frac{L}{2}\right) S(L - l) = \frac{\nu}{2} RT.$$

Делим второе уравнение на первое:

$$\frac{(H + \frac{L}{2})(\frac{L}{2} - l)}{H \frac{L}{2}} = \frac{1}{2}.$$

После преобразований получаем:

$$l = \frac{L}{2} - \frac{HL}{4(H + \frac{L}{2})} = 0{,}784 \text{ m}.$$

Задача 46[1]. Герметично закрытый бак высотой H заполнен жидкостью плотности ρ, причём на дне имеется пузырек воздуха. Давление на дно бака P_0. Каким станет давление на дно бака, если пузырёк всплывёт?

Решение. Давление воздуха в пузырьке равно давлению жидкости вблизи дна бака P_0 (это следует из условия равновесия тонкого слоя жидкости, окружающей пузырёк).

Поскольку объём бака постоянен, и жидкость практически несжимаема, объём пузырька при всплытии не изменится. Температуры внутри пузырька также можно считать постоянной. Тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что давление воздуха тоже не меняется. Таким образом, давление воздуха на поверхности жидкости равно P_0.

Тогда давление на дно бака равно $P = P_0 + \rho g H$.

Задача 47*. Органическое соединение массой $m = 716$ мг, имеющее формулу $(C_3H_6O)n$ при давлении $P = 10^5$ Па и температуре $t = 200\,°C$ занимает в газообразном состоянии объём $V = 243$ см^3. Найдите n.

Решение. Для молярной массы M этого соединения имеем:

$$M = 3n \cdot M_C + 6n \cdot M_H + n \cdot M_O, \tag{7}$$

где $M_C = 12$ г/моль, $M_H = 1$ г/моль и $M_O = 16$ г/моль молярные массы углерода C, водорода H и кислорода O, соответственно. Подставляя выражение для M в уравнение состояния идеального газа, для n находим:

$$n = \frac{mRT}{pV(3M_C + 6M_H + M_O} =$$

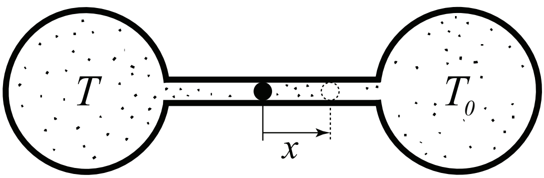
$$= \frac{0{,}716 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot 8{,}31\,\text{Дж}/(\text{моль}{\cdot}\text{К}) \cdot 473\ \text{К}}{10^5\ \text{Па} \cdot 0{,}243 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 \cdot 58 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}/\text{моль}} = 2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 48[3]. Найти формулу некоторого соединения углерода с кислородом, если известно, что это вещество массой $m = 1$ г в газообразном состоянии в объёме $V = 1$ л при температуре $t = 27\,°C$ создаёт давление $P = 5{,}6 \cdot 10^4$ Па.

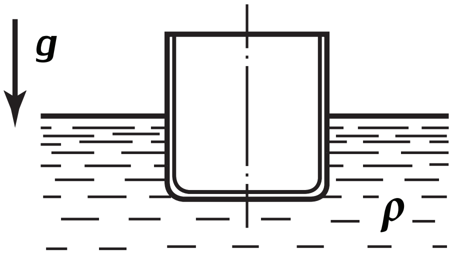
Задача 49[2]. Герметично закрытый бак высотой 3 м заполнен водой так, что на дне имеются 2 одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака равно 0,15 МПа. Каким станет давление на дно бака, если всплывёт один пузырёк? Два пузырька?

Задача 50[2]. Газовый термометр (на рисунке ниже) состоит из двух одинаковых сосудов вместимости V_0 каждый, соединённых трубкой длины l и сечения S. Трубку перекрывает капля ртути. Сосуды наполнены газом.



Если температура газа в сосудах одинакова, ртуть находится посередине трубки. Один сосуд помещён в термостат с температурой T_0. Проградуируйте термометр, найдя зависимость температуры газа во втором сосуде — T от смещения ртути из положения равновесия — x.

Задача 51[2]. На поверхности жидкости плотности ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погружённый в жидкость (на рисунке ниже). На сколько погрузится стакан в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? На какую глубину нужно погрузить перевёрнутый вверх дном стакан, чтобы он вместе с заключённым в нём воздухом начал тонуть?



Задача 52[3]. Аквалангист затратил время $\tau_1 = 10$ мин на осмотр повреждения подводной части корабля. За это время давление в баллоне аквалангиста, первоначально равное $P_1 = 150$ атм ($1{,}5 \cdot 10^7$ Па), упало на 20 %. После этого аквалангист приступил к ремонтным работам, и расход воздуха возрос в полтора раза. Через какое время τ после погружения аквалангист должен закончить работы, если давление не должно упасть ниже $P_2 = 30$ атм ($0{,}3 \cdot 10^7$ Па)?

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Модель идеального газа в МКТ

Законы идеальных газов, найденные опытным путём, находят довольно простое объяснение в молекулярно-кинетической теории (МКТ). Она исходит при этом из упрощённых представлений о строении газа.

Это обусловлено рядом причин, в частности, неточным знанием сил взаимодействия между молекулами. Однако, как оказывается, даже такая упрощённая модель газа позволяет найти уравнение состояния, правильно описывающее его поведение.

В молекулярно-кинетической теории принимается следующая идеализированная модель газа — *идеальный газ.* Молекулы газа считаются твёрдыми, абсолютно упругими шариками, причём размеры молекул малы по сравнению со средним расстоянием между ними. Это означает, что собственный суммарный объём молекул значительно меньше объёма сосуда, в котором находится газ. Взаимодействие между молекулами проявляется только при непосредственном столкновении их друг с другом. Между столкновениями молекулы движутся по инерции. Движение молекул подчиняется законам механики Ньютона.

Для нахождения уравнения состояния газа необходимо сделать ещё важное упрощающее предположение, а именно, считать движение любой молекулы газа *беспорядочным, хаотичным.*

Аккуратный вывод основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа требует принимать во внимание ряд моментов, например, наличие в газе молекул, движущихся с разными по величине скоростями, столкновения молекул между собой, характер столкновения отдельной молекулы со стенкой сосуда (упругий или неупругий).

Давление идеального газа

Давление, которое оказывает газ на стенку сосуда, есть результат *ударов молекул* газа о стенку. Если бы в сосуде содержалось всего несколько молекул, то их удары следовали бы друг за другом редко и беспорядочно. Поэтому нельзя было бы говорить ни о какой регулярной силе давления, действующей на стенку. Стенка подвергалась бы отдельным практически мгновенным бесконечно малым толчкам. Если же число молекул в сосуде очень велико, то велико и число ударов их о стенку сосуда. Одновременно о стенку сосуда ударяется громадное количество молекул. Очень слабые силы отдельных ударов складываются при этом в значительную по величине и почти постоянную силу, действующую на стенку. Среднее по времени значение этой силы, отнесённое к единичной площадке, и есть давление газа, с которым имеет дело термодинамика.

Пусть в сосуде объёма V находятся N одинаковых молекул идеального газа, а m_0 — масса одной молекулы. В рамках молекулярно-кинетической теории показывается, что давление p газа определяется выражением

$$p = m_0 n \overline{V^2}/3,$$

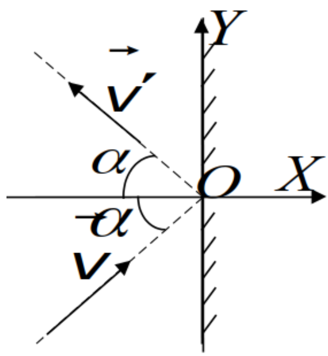
где $n = N/V$ — концентрация молекул газа, $\overline{V^2}$ — среднее значение квадрата скорости молекулы. Это выражение называют *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа.*

Заметим, что величина $m_0\overline{V^2}/2$ есть средняя кинетическая энергия $\overline{E}$ поступательного движения молекулы. Поэтому полученную формулу можно представить в другом виде:

$$p = 2n\overline{E}/3. \tag{8}$$

Ниже приводится один из способов вывода основного уравнения МКТ идеального газа. Данный раздел при первом прочтении можно пропустить.

Вывод основного уравнения МКТ идеального газа



Вычислим среднее давление газа на стенку сосуда. Для простоты будем считать, что удар молекулы о стенку происходит абсолютно упруго, а сама стенка идеально гладкая и молекула после удара отражается от неё под тем же углом, под каким она падала на стенку (на рисунке выше), или, как говорят, зеркально (однако ясно, что никаких гладких стенок не существует: ведь сама стенка состоит из молекул).

Введём систему координат, направив ось OX перпендикулярно стенке, а ось OY — вдоль стенки. Пронумеруем все молекулы от $i = 1$ до $i = N$ Пусть $v_{i,x} > 0$ — проекция скорости i-ой молекулы на ось OX до удара. При абсолютно упругом ударе о стенку проекция скорости на ось OX изменяет знак: $v'_{i,x} = -v_{i,x}$ Изменение проекции импульса молекулы на ось OX при столкновении молекулы со стенкой равно

$$\Delta p_{i,x} = m_0 v'_{i,x} - m_0 v_{i,x} = -2m_0 v_{i,x},$$

а передаваемый стенке импульс равен

$$\Delta p_{i,x,\text{стен}} = -\Delta p_{i,x} = 2m_0 v_{i,x}.$$

Так как давление газа не зависит от формы сосуда, возьмём для простоты сосуд в форме куба с ребром l. Тогда промежуток времени между двумя последовательными столкновениями молекулы с одной и той же стенкой составит $\tau_i = 2l/v_{i,x}$, а за большой интервал времени она столкнётся со стенкой $N_{\text{столкн},i} = t/\tau_i$ раз. Переданный стенке одной молекулой за это время импульс равен

$$2m_0 v_{i,x} \cdot N_{\text{столкн},i} = 2m_0 v_{i,x} \cdot \frac{v_{i,x} t}{2l} = m_0 v_{i,x}^2 \frac{t}{l}.$$

Так как в сосуде находятся N молекул, то полный переданный стенке импульс всех молекул равен

$$\Delta p_{x,\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta p_{i,x,\text{стен}} = \frac{m_0 t}{l} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2.$$

Среднюю силу давления на стенку можно получить, разделив полный передаваемый стенке импульс на время t:

$$F_{x,\text{ср}} = \frac{\Delta p_{x,\Sigma}}{t} = \frac{m_0}{l} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2,$$

а давление p — разделив эту силу на площадь стенки $S = l^2$:

$$p = \frac{F_{x,\text{ср}}}{S} = \frac{m_0}{l^3}\sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2 = \frac{m_0}{V}\sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2.$$

Здесь учтено, что объём сосуда $V = l^3$. Если ввести среднее значение квадрата проекции скорости одной молекулы

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} v_{i,x}^2,$$

то для давления p получаем

$$p = \frac{m_0 N}{V}\overline{v_x^2}.$$

Входящую в это выражение величину $\overline{v_x^2}$ можно выразить через среднее значение квадрата скорости молекулы. Из соотношения

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

для средних значений имеем:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}.$$

Так как движение молекул беспорядочное, то все направления движения равновероятны и средние значения квадратов проекций на любое направление должны быть равны $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Отсюда получаем: $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$, что позволяет записать выражение для давления в виде

$$p = \frac{1}{3}\frac{m_0 N}{V}\overline{v^2}, \text{ или } p = \frac{1}{3}m_0 n\overline{v^2},$$

где $n = N/V$ — концентрация молекул газа.

Молекулярно-кинетический смысл температуры

Найдём связь между средней кинетической энергией $\overline{E}$ поступательного движения молекулы газа и его температурой T. Учитывая соотношение $n = N/V$, перепишем уравнение (8) в виде:

$$pV = 2N\overline{E}/3.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением Менделеева–Клапейрона

$$pV = \nu RT = NRT/N_A,$$

получаем для средней кинетической энергии $\overline{E}$:

$$\overline{E} = \frac{m_0\overline{V^2}}{2} = \frac{3R}{2N_A}T = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана. С учётом этого соотношения выражение (8) для давления можно записать в виде:

$$p = nkT.$$

В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия поступательного движения любых молекул имеет одно и то же значение, т. е. средняя кинетическая энергия молекул обладает основным свойством температуры — в состоянии теплового равновесия она одинакова для всех молекул газов, находящихся в тепловом контакте, а также для различных молекул газовой смеси. Величину $\overline{E}$ можно принять поэтому за меру температуры газа. В этом и состоит физический смысл температуры с молекулярно-кинетической точки зрения.

Скорость хаотического (теплового) движения молекул характеризуется *средней квадратичной скоростью*

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Дополнительно хочется отметить, что

$$\overline{E}_{\text{полн}} \sim kT,$$

где в $\overline{E}_{\text{полн}}$ входит средняя кинетическая энергия поступательного, вращательного, колебательного и других движений молекулы. Более того в классической термодинамике эта пропорциональность справедлива не только для газообразных, но и для жидких и твёрдых тел и сред.

Таким образом, ещё раз напоминаем, температура есть *мера средней кинетической энергии молекул*. В этом и состоит молекулярно-кинетический смысл температуры. В частности, при температуре $T = 0$ К прекращается всякое тепловое движение молекул.

Законы сохранения энергии в тепловых процессах

Примеры решения задач

Задача 53[14]. В вертикальном цилиндрическом сосуде находится вода массы $m = 1$ г. К поверхности воды прилегает поршень площадью $S = 100$ см^2. Воду в цилиндре стали нагревать. В момент времени τ_0, когда её температура достигла $t_0 = 100\,°\mathrm{C}$, вода закипела и стала медленно испаряться. Начиная с этого момента времени τ_0 система поддерживалась при температуре t_0.

(а) Какое количество теплоты нужно подвести к воде, чтобы она полностью испарилась?

(б) На какую высоту H при этом поднимется поршень?

Если теперь на поршень, находящийся на высоте H от дна, положить небольшой груз массы 1 г, то

(в) на какое расстояние ΔH сместится поршень?

(г) Какая работа над газом в сосуде будет совершена при этом?

Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Трением между стенками цилиндра и поршнем пренебречь.

Решение. (а) Минимальное, необходимое для того, чтобы испарить всю воду под поршнем, количество теплоты равно

$$Q = \lambda m = 2{,}3 \cdot 10^6\ \text{Дж/кг} \cdot 10^{-3}\ \text{кг} = 2300\ \text{Дж}.$$

(б) Когда вода полностью испарится и займёт объём $V = HS$ (объём цилиндра), её состояние будет описываться уравнением Менделеева–Клапейрона при температуре $T = 100\,°\mathrm{C} = 373$ К, где давление равно атмосферному $p = 10^5$ Па (будем считать поршень невесомым, а в равновесии внешнее давление равно давлению газа), молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$. Отсюда выражаем высоту

$$H = \frac{mRT}{\mu p S} = 17{,}2\ \text{см}.$$

(в) Если же поршень нельзя считать невесомым, либо на невесомый поршень положен дополнительный груз, то к атмосферному давлению необходимо добавить вес, делённый на площадь поршня, $\dfrac{m_\text{г} g}{S}$. Новая высота

$$H_1 = \frac{mRT}{\mu(p + m_\text{г} g/S)S} =$$

$$= \frac{1\ \text{г} \cdot 8{,}31\,\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 373\ \text{К}}{18\ \text{г}/\text{моль} \cdot (10^5 + 10^{-3} \cdot 10/10^{-2})\ \text{Па} \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2} =$$

$$= 0{,}172\ \text{м} = 17{,}2\ \text{см}.$$

Как видим, столь незначительный груз не дал никакого заметного уменьшения высоты поднятия поршня, то есть $\Delta H = 0$.

(г) Так как вода испаряется медленно, можно считать, что весь процесс происходит при постоянном давлении, то есть является изобарным. Работа в изобарном процессе выражается формулой $A = p\Delta V$. Пренебрегая объёмом жидкости по сравнению с паром, получим $\Delta V = SH$, поэтому

$$A = pSH = 10^5\ \text{Па} \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2 \cdot 0{,}172\ \text{м} = 172\ \text{Дж}.$$

Ответ: (а) 2300 Дж; (б) 17,2 см; (в) 0; (г) 172 Дж.

Задача 54[11]. В калориметр поместили 100 г льда и налили 25 г воды. После установления теплового равновесия оказалось, что масса льда не изменилась. Какие значения начальной температуры могли быть у льда в таком эксперименте? Удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг · °C). Удельная теплота плавления льда 33 кДж/кг. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Решение. По условию, масса льда, а следовательно и масса воды не изменилась. Значит, в процессе установления теплового равновесия не было ни кристаллизации льда, ни его плавления. Так как в тепловом равновесии находятся одновременно и лёд, и вода, то конечной температурой является 0 °C. Так как в калориметр наливали воду, её начальная температура не могла превышать 100 °C, следовательно,

$$0\ ^\circ\text{C} \leqslant \Delta t_\text{воды} \leqslant 100\ ^\circ\text{C}.$$

Уравнение теплового баланса в калориметре имеет вид

$$c_{\text{льда}} m_{\text{льда}} \Delta t_{\text{льда}} = c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} \Delta t_{\text{воды}},$$

откуда

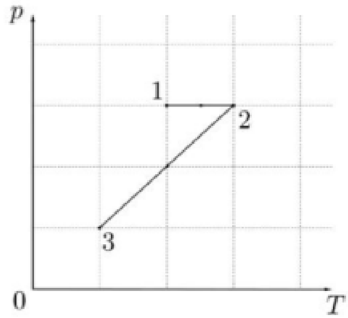
$$\Delta t_{\text{льда}} = \frac{c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} \Delta t_{\text{воды}}}{c_{\text{льда}} m_{\text{льда}}} = \frac{4200 \cdot 25}{2100 \cdot 100} \Delta t_{\text{воды}} = 0{,}5 \Delta t_{\text{воды}}.$$

С учётом возможных изменений температуры воды получаем

$$0\,^\circ\text{C} \leqslant \Delta t_{\text{льда}} \leqslant 50^\circ\text{C}.$$

Ответ: от 0°C до 50°C.

Задача 55[12]. На диаграмме зависимости давления p от температуры T приведён процесс нагрева 1–2 одного моля идеального газа, а затем охлаждения 2–3 его до некоторой температуры (рисунок справа). Найти работу, совершённую газом в процессе 1–2–3, если известно, что в состоянии с наименьшим объёмом температура газа равна $T = 200$ К. Газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).



Решение. Для начала разберёмся, в какой точке процесса газ находится в состоянии с наименьшим объёмом. Из уравнения состояния одного моля идеального газа $pV = RT$ следует, что зависимость p от T при заданном объёме (эта зависимость называется изохорой) имеет на диаграмме p, T вид прямой, проходящей через начало координат. Причём, чем больше объём газа, тем меньше наклон этой прямой, то есть тем ниже на диаграмме проходит изохора.

Так как мы считаем диаграмму в условии задачи выполненной точно, то процесс 2–3 является изохорой. Нетрудно заметить, что изохора, проходящая через точку 1 лежит выше 2–3, а это значит, что наименьший объём моль нашего газа имеет именно в точке 1. По условию задачи $T_1 = 200$ К. Из диаграммы видно, что $T_2 = 300$ К, а $T_3 = 100$ К.

Так как 2–3 процесс изохорный, в нём газ не совершает работы. Значит, вся работа совершается в изобарном процессе 1–2:

$$A = p(V_2 - V_1) = pV_2 = pV_1 = RT_2 - RT_1 = 8{,}31 \cdot (300 - 200) = 831 \text{ Дж}.$$

Ответ: 831 Дж.

Задача 56[13]. В калориметр, частично заполненный водой при температуре $t_0 = 10\,^\circ\mathrm{C}$, опустили кубик №1, имеющий начальную температуру t, и после прекращения теплообмена температура содержимого калориметра достигла $t_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$. Если бы вместо кубика №1 в калориметр опустили кубик №2, нагретый до такой же температуры t, то после прекращения теплообмена температура содержимого калориметра достигла бы $t_2 = 35\,^\circ\mathrm{C}$. До какой температуры t_3 увеличится температура содержимого калориметра, если в него опустить сразу оба кубика, нагретые до температуры t? Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Вода из калориметра не выливается.

Решение. Обозначим полную теплоёмкость калориметра (воды в калориметре) C. А полные теплоёмкости кубиков C_1 и C_2 соответственно. Обратите внимание, что мы ведём речь о полных теплоёмкостях, то есть количествах теплоты, необходимых для того, чтобы нагреть на один градус **всё** вещество, а не единицу его массы. В этих обозначениях все три тепловых баланса, фигурирующих в условии задачи, имеют вид:

$$C(t_1 - t_0) = C_1(t - t_1) \text{ — опускаем кубик №1;}$$

$$C(t_2 - t_0) = C_1(t - t_2) \text{ — опускаем кубик №2;}$$

$$C(t_3 - t_0) = C_1(t - t_3) + C_2(t - t_3) \text{ — опускаем оба кубика одновременно.}$$

Из последнего уравнения выразим

$$t_3 = \frac{Ct_0 + (C - 1 + c_2)t}{C_1 + C_2 + C}.$$

Выразим теплоёмкости кубиков из соответствующих им первого и второго уравнения:

$$C_1 = \frac{t_1 - t_0}{t - t_1}C = \frac{C}{3}, \quad C_2 = \frac{t_2 - t_0}{t - t_2}C = \frac{25}{35}C = \frac{5}{7}C.$$

Подставим полученные выражения в формулу для искомой температуры

$$t_3 = \frac{10C + \left(\frac{1}{3}C + \frac{5}{7}C\right) \cdot 70}{\frac{1}{3}C + \frac{5}{7}C + C} = \frac{10 + \frac{1}{3} \cdot 70 + 50}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7} + 1} =$$

$$= \frac{30 + 70 + 150}{1 + \frac{15}{7} + 3} = \frac{7 \cdot 250}{43} = 40{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 40,7 °C.

Задача 57[10]. Определите наибольшее возможное давление одного моля идеального газа в процессе, происходящем по закону:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right),$$

где T_0 и V_0 — известные положительные постоянные, V — текущее значение объёма газа. В течение всего процесса $V > V_0$.

Решение. Подставим в уравнение состояния одного моля идеального газа $pV = RT$ выражение для температуры из условиях задачи. Получим

$$pV = RT_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right).$$

Выразим отсюда зависимость давления от объёма в процессе из условия задачи

$$p = RT_0 \left(\frac{1}{V} - \frac{V_0}{V^2}\right).$$

Задача свелась к поиску максимального значения p, выраженного как функция от V. Преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{RT_0}{V_0} \left(\frac{V_0}{V} - \frac{V_0^2}{V^2}\right).$$

Заменим переменную на $x = V_0/V$, получим $p = \dfrac{RT_0}{V_0}\left(x - x^2\right)$. Нетрудно заметить, что у нас получилась парабола «ветви вниз», поэтому максимальное значение p соответствует вершине параболы, достигаемого при $x_{\max} = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$p_{\max} = \frac{RT_0}{V_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{RT_0}{4V_0}.$$

Ответ: $\dfrac{RT_0}{4V_0}$.

Задача 58[18]. Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна $m_1 = 100$ г. Если эту льдинку охладить до температуры t_1 и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему имеющей температуру t_0, то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на неё необходимо будет положить груз минимальной массы $m_2 = 110$ г. Определите температуру t_1. Удельная теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг · °C), а удельная теплота плавления воды $\lambda = 340$ кДж/кг.

Решение. Рассмотрим, что происходит с льдинкой, когда её охлаждают, а затем снова погружают в воду. На льдинке начнёт намерзать ещё лёд, а выделяющееся в процессе кристаллизации тепло пойдёт на нагрев всего льда до температуры $0\,°\mathrm{C}$. Объём льдинки увеличится, а так как плотность льда ниже плотности воды (это редкое свойство воды, так как почти все вещества в твёрдом состоянии имеют более высокую плотность, чем в жидком), то для погружения новой льдинки придётся нагрузить её большей массой, как и написано в условии задачи.

Обозначим исходную массу льдинки M_0, а новую массу M. Мы можем записать уравнение теплового баланса

$$CM_0(t_0 - t_1) = \lambda(M - M_0),$$

для нагрева льды мы взяли исходную массу, так как считаем, что намерзающий лёд уже имеет температуру t_0. Также запишем два условия плавания льдинки из закона Архимеда:

$$(M_0 + m_1)g = \rho_в g V_{льда1} \quad \text{и} \quad (M + m_2)g = \rho g V_{льда2}.$$

Так как $V_{льда} = \dfrac{M_{льда}}{\rho_л}$, то условия плавания принимают вид

$$\frac{M_0 + m_1}{M_0} = \frac{\rho_в}{\rho_л} \quad \text{и} \quad \frac{M + m_2}{M} = \frac{\rho_в}{\rho_л}$$

соответственно. Из теплового баланса

$$t_1 = -\frac{\lambda(M - M_0)}{c_л M_0} = -\frac{\lambda}{c_л}\left(\frac{M}{M_0} - 1\right).$$

Из первого условия плавания

$$M_0 = \frac{m_1}{(\rho_в/\rho_л) - 1},$$

а из второго

$$M = \frac{m_2}{(\rho_в/\rho_л) - 1}.$$

Подставляем в выражение для t_1 и получаем

$$t_1 = -\frac{\lambda}{c_л}\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) = \frac{340000}{2100}\left(\frac{110}{100} - 1\right) = 16{,}2\,^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 16,2 °C.

Задача 59[7]. В теплоизолированном сосуде лежит кусок льда при температуре 0 °C. В сосуд небольшими порциями начинают впускать пар при $t = 100\,^\circ$C. до тех пор, пока в нём не окажется 100 г воды при $t = 100\,^\circ$C. Какое количество теплоты пар передаст содержимому сосуда?

Решение. Тепловой баланс состоит из выделяющейся при конденсации пара теплоты, которая расходуется на плавление льда при $t_0 = 0\,^\circ$C и последующий нагрев образовавшейся воды до равновесной температуры 100 °C. Обозначим массу льда $m_л$, а массу использованного пара $m_п$. Тогда тепловой баланс имеет вид:

$$\lambda m_л + c_л m_л (t - t_0) = L m_п.$$

При этом масса обнаружившейся в сосуде воды $m_0 = m_п + m_л$, следовательно $m_л = m_0 + m_п$. Подставляем в уравнение теплового баланса и получаем

$$\lambda(m_0 - m_п)(t - t_0 = L m_п).$$

Отсюда масса пара

$$m_{\text{п}} = \frac{m_0(\lambda + {}_{\text{л}}(t - t_0))}{\lambda + c_{\text{л}}(t - t_0) + L} = \frac{100 \cdot (340000 + 2100 \cdot 100)}{340000 + 2100 \cdot 100 + 2260000} \text{ г}.$$

Количество переданной теплоты

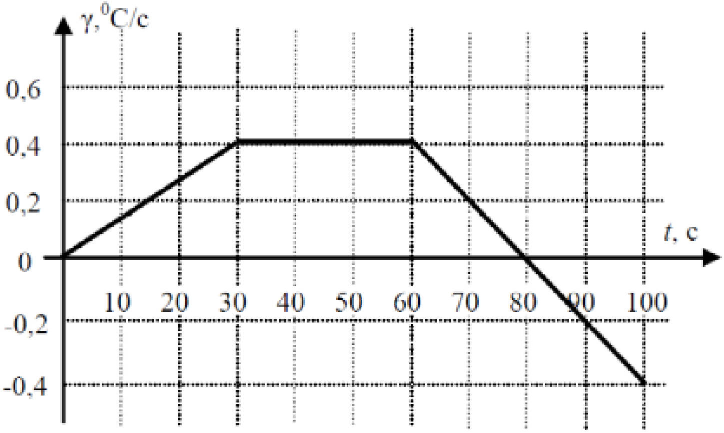
$$Q = Lm_{\text{п}} = 2260000 \cdot 19{,}6 \cdot 10^{-3} = 44{,}2 \text{ кДж}.$$

Ответ: 44,2 кДж.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 60[12]. В пустой фарфоровый чайник, имеющий комнатную температуру $t_0 = 20\,^{\circ}\text{C}$, налили $m = 500$ г горячей воды при температуре $t_1 = 80\,^{\circ}\text{C}$. В результате теплообмена температура чайника и его содержимого стала равной $t_2 = 70\,^{\circ}\text{C}$. Затем чайник включили в сеть и через $\tau = 2$ минуты вода в нём закипела. Определите мощность P нагревателя чайника. Тепловыми потерями в окружающую среду пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C).

Задача 61[11]. В теплоизолированную установку, которая может работать как в режиме нагревателя, так и в режиме холодильника переменной мощности, помещают $m = 1$ кг воды при температуре 20 °C. Зависимость скорости изменения температуры воды γ от времени после включения установки приведена на графике.



Определите:

1) максимальную мощность нагревателя в процессе эксперимента;

2) максимальную температуру, до которой нагрелась вода;

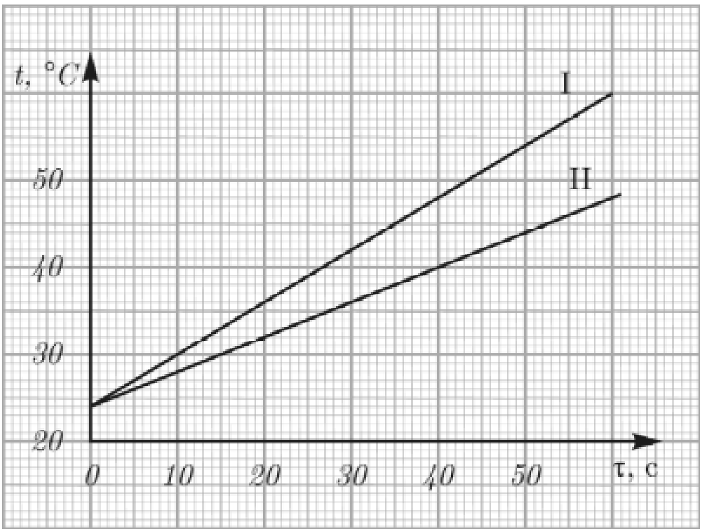
3) конечную температуру воды;

4) количество теплоты, отведённое от воды за время, когда установка работала в режиме холодильника.

Задача 62[10]. В закрытом сосуде находится идеальный одноатомный газ, плотность которого $\rho = 1{,}8$ кг/м^3. Среднеквадратичная скорость молекул газа $v_{\text{ср. кв}} = 500$ м/с. Вычислите давление газа.

Задача 63[9]. Определите наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α — положительные постоянные, V — объём одного моля газа.

Задача 64[7]. Экспериментатор Глюк исследовал тепловые свойства жидкостей. Он налил 100 г глицерина в калориметр с подогревом и включил прибор в сеть. Результаты эксперимента приведены на графике I. Вечером к нему пришёл теоретик Баг. Он долил в калориметр некоторое количество глицерина и повторил измерения (график II). Сколько граммов глицерина долил Баг?



Список литературы

1. *Гринченко Б. И.* Как решать задачи по физике. — Санкт-Петербург, НПО «Мир и семья 95», 1998. — 784 стр.
2. *И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.* Задачи по физике: Учеб. пособие / Под ред. О. Я. Савченко. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с.
3. Баканина, Белонучкин, Козел
4. Билеты письменных вступительных экзаменов в МФТИ, 2000 г.
5. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2009–2010 гг.
6. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2010–2011 гг.
7. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2011–2012 гг.
8. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2012–2013 гг.
9. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2013–2014 гг.
10. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2014–2015 гг.
11. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2015–2016 гг.
12. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2016–2017 гг.
13. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2017–2018 гг.
14. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2000–2001 гг.

15. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2009–2010 гг.

16. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2015–2016 гг.

17. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2016–2017 гг.

18. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2017–2018 гг.