Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НАУКА В РЕГИОНЫ

Механика II

Методические материалы
по физике
для учащихся 8 класса

Фонд развития Физтех-лицеев и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Говорун И. В., Извекова Ю. Н.

А23 Механика II: методические материалы по физике / И. В. Говорун, Ю. Н. Извекова. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — **??** с.

УДК ???
ББК ???

Первый абзац аннотации должен содержать указание на соответствие издания дисциплине (либо ее разделу, авторскому курсу и т. д.) или тематическому плану НИОКР (для научных изданий), включать краткую характеристику основной темы, проблемы рассматриваемого объекта, цель работы и ее результаты; для сборника – формулировку общей темы или общего принципа отбора материалов для издания.

Второй абзац содержит читательский адрес (точное указание, на какую читательскую аудиторию рассчитано данное издание, например, для студентов каких курсов, специальностей и факультетов предназначено данное издание)

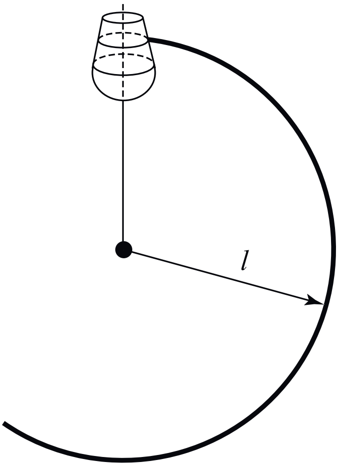
Говорун Игорь Викторович, аспирант МФТИ, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.
Извекова Юлия Николаевна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры общей физики МФТИ.

Содержание

Глава 8
Движение по окружности

Примеры

Пример:



(Козел, 1.101). С какой минимальной угловой скоростью надо вращать ведро в вертикальной плоскости, чтобы из него не вылилась вода? Расстояние от поверхности воды до центра вращения равно $l = 1$ м.

Решение:
Рассмотрим положение ведра с водой в верхней точке своей траектории. Вода не выливается, если сила реакции опоры $N \geqslant 0$. Минимальная угловая скорость, при которой вода не выливается из ведра, будет тогда, когда в верхней точке траектории $N = 0$. Так как никакие другие силы, кроме силы тяжести на ведро в этой точке не действуют, то по второму закону Ньютона:

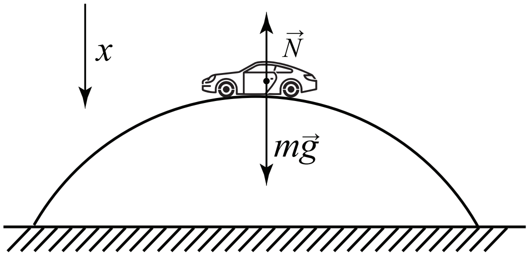
$$m\vec{g} = m\vec{a},$$

откуда $\vec{g} = \vec{a}$. Так как ведро двигается по окружности, то у него есть центростремительное ускорение a_c (направленное к центру окружности). В данном случае $a_\text{c} = g$, $a_\text{c} = \omega^2 l$.

Откуда получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 3{,}1 \text{ рад/с}.$$

Пример:
(Козел 1.103). Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, при условии, что давление автомобиля, движущегося со скоростью $\vartheta = 90$ км/ч, в верхней точке мостика уменьшилось вдвое.



Решение:
Рассмотрим движение автомобиля по мосту (в верхней точке моста). Напишем второй закон Ньютона для автомобиля:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Так как автомобиль движется по окружности (такая форма моста по условию), то у него есть центростремительное ускорение $a_{\text{с}}$, направленное к центру окружности. Когда автомобиль находится в верхней точке траектории, его центростремительное ускорение направлено вертикально вниз. Спроецируем векторную запись второго закона Ньютона на ось x:

$$mg - N = ma_{\text{с}},\ a_{\text{с}} = \frac{\vartheta^2}{R}.$$

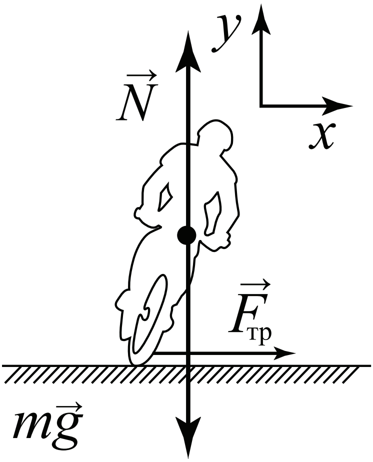
По условию вес автомобиля уменьшился вдвое, значит $N = \frac{mg}{2}$. После подстановки получаем: $\frac{mg}{2} = m\frac{\vartheta^2}{R}$, откуда $R = 2\frac{\vartheta^2}{g} = 125$ м

Пример:
С какой максимальной скоростью может двигаться автомобиль из предыдущей задачи, чтобы в верхней точке мостика не оторваться от поверхности?

Решение:
Условие отрыва автомобиля – сила реакции опоры становится равной нулю. В таком случае из второго закона Ньютона (в верхней точке моста) следует, что $m\vec{g} = m\vec{a}_{\text{с}}$ ($\vec{N} = 0$). После проецирования на вер-

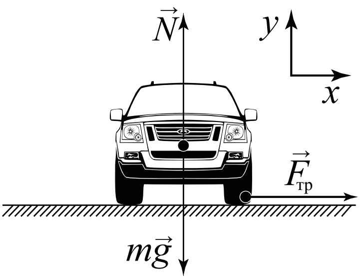
тикальную ось получаем: $a_c = g$. С другой стороны $a_c = \frac{\vartheta^2}{R}$, откуда находим $\vartheta = \sqrt{a_c \cdot R} = \sqrt{g \cdot R} \approx 35$ м/с ≈ 127 км/ч.

Пример:



С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиуса $R = 10$ м, если коэффициент трения резины о почву $\mu = 0{,}4$. Как изменится скорость, если вместо мотоциклиста будет автомобиль?

Решение:



Рассмотрим движение велосипедиста. При движении на велосипедиста действуют три силы – сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Обратим внимание на направление силы трения $\vec{F}_{тр}$ – она направлена в сторону центра окружности (расположенного справа), по которой движется велосипедист. Именно эта сила и вызывает движение по окружности. Запишем второй закон Ньютона для велосипедиста:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

В проекции на оси x и y получим:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = m\vec{a}_{\text{c}} \\ N = mg \\ F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

Откуда $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg = m\frac{\vartheta^2}{R}$, $\vartheta = \sqrt{\mu g R} \approx 6{,}3$ м/с.

Рассмотрим движение автомобиля. На автомобиль действуют также силы тяжести $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $F_{\text{тр}}$. По второму закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}.$$

В проекции на оси x и y:

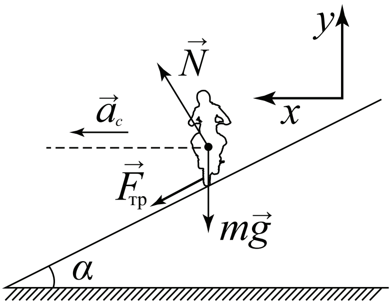
$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = m\vec{a}_{\text{c}} \\ N = mg \\ F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

Откуда максимальная скорость равна $\vartheta = \sqrt{\mu g R} \approx 6{,}3$ м/с.

Заметим, что ответы для автомобиля и велосипедиста одинаковые, несмотря на то, что велосипедисту для поворота пришлось наклониться в сторону поворота.

Пример:
Мотоциклист едет по треку, плоскость которого наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Траектория мотоциклиста – окружность радиуса $R = 90$ м, лежащая в горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения шин по трековой дорожке $\mu = 0{,}5$. Вычислите максимально допустимую скорость движения мотоциклиста.

Решение:



Для нахождения максимально допустимой скорости ϑ_{max} сделаем рисунок, на котором расставим силы, действующие на мотоциклиста. При движении с максимальной скоростью сила трения по величине равна $F_{тр} = \mu N$. По второму закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Переход к проекциям ускорения и сил на оси x и y приводит к уравнениям:

$$\begin{cases} N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = ma_c \\ N\cos\alpha - mg - F_{тр}\sin\alpha = 0 \\ F_{тр} = \mu N \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = m\frac{\vartheta^2}{R} \\ N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg \end{cases}$$

После деления получаем: $\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha} = \frac{tg\alpha+\mu}{1-\mu\cdot tg\alpha} = \frac{\vartheta^2}{gR}$, откуда находим $\vartheta = \sqrt{gR\frac{tg\alpha+\mu}{1-\mu\cdot tg\alpha}} \approx 37$ м/с.

Пример:
Найдите первую космическую скорость для Земли. Найдите высоту геостационарной орбиты.

Решение:
Первой космической скоростью называется скорость, с которой движется спутник Земли по орбите вблизи её поверхности.

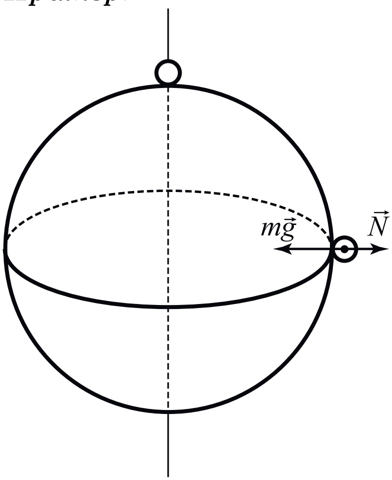
Рассмотрим движение спутника (около поверхности Земли) по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Земли $R_з = 6400$ км. Во время движения на спутник массы m со стороны Земли массой M действует только сила гравитационного притяжения $F = \gamma\frac{mM}{R_з^2}$, эта сила и вызывает движение по окружности. Согласно второму закону Ньютона $F = ma_c$, или $a_c = \frac{\vartheta_I^2}{R_з} = \gamma\frac{M}{R_з^2}$, откуда находим $\vartheta_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_з}}$. Ускорение свободного падения на Земле $g = \gamma\frac{M}{R_з^2}$. После подстановки получим $\vartheta_I = \sqrt{gR_з} \approx 8$ км/с.

Геостационарной орбитой называется такая орбита, что спутник, находящийся на этой орбите, постоянно находится над одной точкой Земли. Это означает, что период обращения спутника $t_{сп}$ вокруг Земли равен периоду поворота Земли вокруг своей оси, $t_{сп} = T_з = 24$ ч $= 86400$ с. Пусть высота (расстояние до поверхности Земли) данной орбиты равна h, тогда расстояние до центра Земли равно $R_з + h$. По второму закону Ньютона:

$$F = \gamma\frac{mM}{(R_з + h)^2} = ma_с = m\omega^2(R_з + h).$$

Откуда выражаем $(R_з+h)^3 = \gamma\frac{M}{\omega^2} = \gamma M\frac{T_з^2}{4\pi^2} = g\left(\frac{R_з T_з}{2\pi}\right)^2$, $h = \sqrt[3]{g\left(\frac{R_з T_з}{2\pi}\right)^2} - R_з \approx 36240$ км.

Пример:



Определите, во сколько раз отличается вес тела массой $m = 1$ кг на экваторе от веса тела на полюсе.

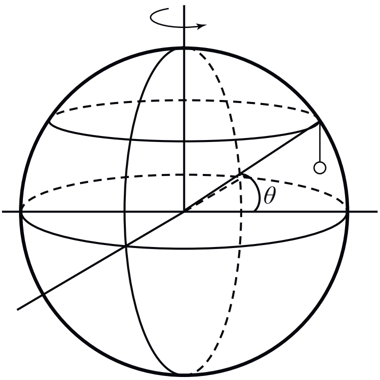
Решение:

Найдем вес тела на экваторе. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. При этом груз двигается по окружности радиуса $R_з$ с периодом, равным периодом обращения Земли. По второму закону Ньютона:

$$mg - N_{экв} = ma_с,\ a_с = \omega^2 R_з = \frac{4\pi^2}{T_з}R_з.$$

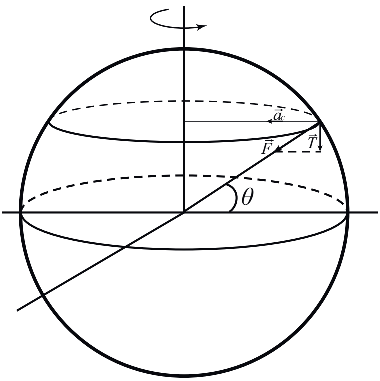
Откуда находим $N_{\text{экв}} = mg - \frac{4\pi^2}{T_з^2} R_з = 9{,}773$ Н (тут $g \approx 9{,}81$ м/с^2, $R_з \approx \approx 6400$ км). На полюсе вес тела $N_{\text{полюс}} = mg \approx 9{,}81$ Н (нет движения по окружности). Таким образом $\frac{N_{\text{экв}}}{N_{\text{полюс}}} \approx \frac{9{,}773}{9{,}81} \approx 0{,}9965$.

Пример:



Астронавты высадились на планету, масса которой равна M, а радиус равен R. Посадка произошла на широте Θ. Для определения направления на центр планеты астронавты решили воспользоваться отвесом. Однако оказалось, что линия отвеса параллельна оси вращения планеты. Определите угловую скорость вращения планеты.

Решение:



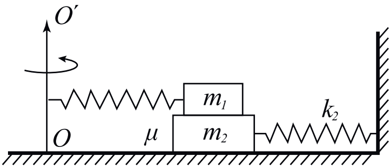
Рассмотрим силы, действующие на грузик массой m. На него действуют сила тяжести $\vec{T}$ и сила гравитационного притяжения $F = \gamma\frac{mM}{R^2}$. Грузик двигается по окружности радиуса $R\cos\Theta$ (на рисунке траектория движения грузика отмечена пунктиром). Согласно второму закону Ньютона $ma_\text{с} = F\cos\Theta$, $a_\text{с} = \omega^2 R\cos\Theta$. Откуда получаем:

$$m\omega^2 R\cos\Theta = \gamma\frac{mM}{R^2}\cos\Theta, \omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача:

(Область 1994). Система находится в равновесии. При этом растяже-

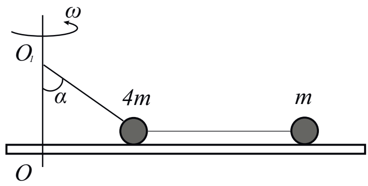


ние верхней и нижней пружин равно соответственно x_1 и x_2. Длина верхней пружины в свободном состоянии равна l. Система приводится во вращение вокруг вертикальной оси OO'. При какой максимальной постоянной угловой скорости ω тела, составляющие систему, еще будут оставаться неподвижными относительно друг друга? Масса тел равна m_1 и m_2, жесткость нижней пружины равна k_2, а коэффициент трения между грузами равен μ. Трение нижнего груза о горизонтальную поверхность отсутствует.

Задача:
(МФТИ 1993). Во сколько раз отличаются максимальные скорости движения спутников по круговым орбитам для Земли и Марса? Масса Марса составляет $\alpha = 0{,}11$ от массы Земли, а радиус $\beta = 0{,}53$ радиуса Земли.

Задача:
(МФТИ 1995). Спутник Фобос обращается вокруг Марса по круговой орбите радиуса $R = 9400$ км с периодом $T = 7$ ч 39 мин. Радиус Марса $R_0 = 3400$ км. Найти по этим данным ускорение свободного падения на поверхности Марса.

Задача:
(МФТИ 2003). Горизонтальная платформа и находящиеся на ней небольшие по размерам шарики с массами m и $4m$ вращаются с постоянной



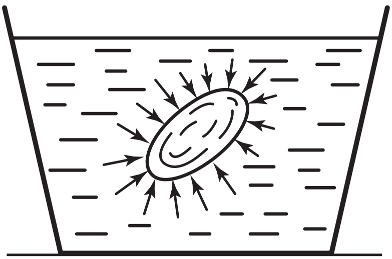
угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO_1. Нить, прикрепленная к шарику с массой $4m$ и оси OO_1, составляет с осью угол α и в два раза короче нити, связывающей шарики. Шарик с массой $4m$ давит на платформу с силой в два раза большей, чем другой шарик. Найдите силу натяжения между шариками. Трение между платформой и шариками пренебрежимо мало.

Задача:
Оцените массу Солнца. Считайте, что свет от Солнца до Земли идет 8 минут. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Задача:
(Область 1992). Определите минимально возможный период обращения системы двух одинаковых сверхплотных шаров, вращающихся друг относительно друга (система типа «двойная звезда»). Плотность каждого шара $\rho = 10^{17}$ кг/м^3, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с)^2.

Глава 9
Сила Архимеда

На поверхности твёрдого тела, погружённого в жидкость (газ), действуют силы давления. Эти силы увеличиваются с глубиной погружения, и на нижнюю часть тела будет действовать со стороны жидкости большая сила, чем на верхнюю. Равнодействующая всех сил давления, действующих на поверхность тела со стороны жидкости, называется выталкивающей силой. Другое название этой силы – сила Архимеда. Истинная причина появления выталкивающей силы – это наличие различного гидростатического давления в разных точках жидкости.



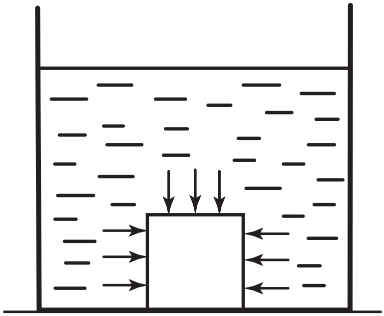
Закон Архимеда: выталкивающая сила, действующая на тело, погружённое в жидкость, равна по модулю весу вытесненной жидкости противоположно ему направлена.

Закон открыт величайшим механиком и математиком Древней Греции Архимедом (287 – 212 гг. до н. э.).

Приведённая формулировка закона Архимеда справедлива, если вся поверхность тела соприкасается с жидкостью или если тело плавает в жидкости, или если тело частично погружено в жидкость через свободную (не соприкасающуюся со стенками) поверхность жидкости.

Если же часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим! Иллюстрацией к сказанному служит опыт, когда ровную нижнюю поверхность деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда. Затем осторожно наливают воду. Кубик не всплывает, т. к. со стороны воды на него действует сила, прижимающая его ко дну, а не выталкивающая вверх. Известно, что это представляет опасность для подводной лодки, лёгшей на грунт.

Закон Архимеда применим и в случае погружения тела в газ.



Строго говоря, в законе Архимеда вес вытесненной жидкости надо брать в вакууме, а не в воздухе, так как вес жидкости в воздухе меньше веса этой жидкости в вакууме на величину веса воздуха, вытесненного этой жидкостью. Но это различие обычно мало, и им пренебрегают.

Если тело погружено в жидкость частично, то результирующая выталкивающая сила со стороны жидкости и воздуха равна сумме веса вытесненной жидкости и вытесненного этим телом воздуха. Здесь оба веса берутся в вакууме.

Пример:
Железный предмет, полностью погружённый в воду, весит меньше, чем в воздухе на $F = 100$ Н. Определить вес предмета в воздухе. Плотность железа $\rho = 7900$ кг/м^3.

Решение:
Выталкивающей силой в воздухе можно пренебречь. Пусть вес тела в воздухе Q. Тогда его вес в воде $Q - \rho_в V g$. Здесь V – объём тела, $\rho_в$ – плотность воды, $g = 9{,}8$ м/с^2. Разность этих весов равна F. Поэтому $Q - (Q - \rho_в V g) = F$. Отсюда $F = \dfrac{F}{\rho_в g}$. Вес тела в воздухе:

$$Q = \rho g V = \frac{F\rho}{\rho_в} = \frac{100\ \text{Н} \cdot 7900\ \text{кг/м}^3}{1000\ \text{кг/м}^3} = 790\ \text{Н}.$$

Плавание тел

Лодка из железа, спущенная на воду, плывёт, а эта же лодка, полностью погружённая в воду (затопленная), тонет. Из этого примера видно, что одно и тоже тело может плавать, а может и тонуть. Всё зависит от того, как тело приведено в контакт с жидкостью. Поэтому имеет смысл рассмотреть два случая взаимодействия тела с жидкостью.

1-й случай. Тело плавает в жидкости, т. е. находится в покое, частично погрузившись в жидкость. Это может быть любое тело, например, кусок дерева или катер. Важен сам факт плавания. При этом тело соприкасается только с жидкостью и воздухом, плавая предоставленным самому себе, свободно. На начальном этапе рассмотрения вопроса о плавании не будем учитывать вес вытесненного воздуха. На тело действует направленная вниз сила тяжести F_T и направленная вверх сила Архимеда F_A. Поскольку сила тяжести F_T равна весу тела (в вакууме), а сила Архимеда F_A – весу (в вакууме) вытесненной жидкости, то можно сказать, что вес тела равен весу вытесненной жидкости. При более строгом рассмотрении вопроса с учётом веса вытесненного воздуха можно показать, что вес тела в воздухе равен весу (тоже в воздухе) вытесненной жидкости.

Итак, *если тело плавает в жидкости, то вес тела в воздухе равен весу в воздухе вытесненной им жидкости.*

При решении задач, когда ситуация реальна, различием в весе в воздухе и вакууме обычно пренебрегают, приравнивая вес любого тела силе тяжести, действующей на тело.

Пример:
Кусок льда объёмом $V = 0{,}1$ м^3 плавает в воде. Найти объём V_1 надводной части льда. Плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_2 = 0{,}9$ г/см^3.

Решение:
Вес льдины $\rho_2 V g$, вес вытесненной воды $\rho_1(V - V_1)g$. По закону Архимеда $\rho_2 V g = \rho_1(V - V_1)g$. Отсюда:

$$V_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)V}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \cdot V = 0{,}01 \text{ м}^3.$$

2-й случай. Тело полностью погружено в жидкость и отпущено. Возьмём в руки какое-нибудь тело (кусочек дерева, стальной болт), погрузим его полностью в жидкость (например, воду) и будем удерживать неподвижно. На тело со стороны Земли действует вниз сила тяжести $F_T = \rho_T V g$, а со стороны жидкости – вверх выталкивающая сила по закону Архимеда $F_A = \rho_Ж V g$. Здесь V – объём тела, ρ_T и $\rho_Ж$ – плотность тела и жидкости. Отпустим тело. Если окажется, что $F_T > F_A$, то тело начнёт двигаться вниз, т. е. тонуть. Если будет $F_T < F_A$, то тело станет двигаться вверх, т. е. всплывать. После всплытия, когда тело будет плавать, объём погружённой в жидкость части тела окажется таким, что будет обеспечено равенство силы Архимеда (уже меньшей, чем величина F_A) и силы тяжести F_T. Итак, тело будет плавать, если $\rho_T V g < \rho_Ж V g$, т. е. $\rho_T < \rho$.

Мы получили **условие плавания тела**: *тело, предварительно полностью погружённое в жидкость, плавает в жидкости, если плотность тела меньше плотности жидкости.*

Если плотности тела и жидкости равны, то полностью погружённое в жидкость тело может находиться в равновесии (покое) в любом месте жидкости, т. е. тело плавает внутри жидкости. Реально такая ситуация трудно осуществима, так как добиться строгого равенства плотностей нелегко.

Условие плавания сформулировано для тела, предварительно полностью погружённого в жидкость. Предварительное полное погружение важно, так как, например, металлическая миска, не полностью погружённая в воду, может плавать, а полностью погружённая утонет.

Условие плавания сформулировано для однородного тела, т. е. тела, плотность которого одинакова во всех точках тела. Это условие плавания справедливо и для неоднородного тела, например, куска льда с полостью внутри или стеклянной бутылки, заполненной частично водой и закрытой пробкой. В таком случае под плотностью тела надо понимать его среднюю плотность, т. е. отношение массы тела к его объёму.

Воздухоплавание

На тело, удерживаемое неподвижно в воздухе, действует выталкивающая сила, равная по закону Архимеда весу вытесненного этим телом воздуха. Если вес тела (в вакууме) больше веса вытесненного телом воздуха, то отпущенное тело падает вниз. Если вес тела меньше веса вытесненного воздуха, то отпущенное тело поднимается вверх. Это и есть условие воздухоплавания.

Для осуществления воздухоплавания надо использовать газ, который легче воздуха. Это может быть нагретый воздух. Если суммарный вес оболочки воздушного шара, наполняющего его газа и полезного груза меньше веса вытесненного шаром воздуха, то шар будет подниматься.

Пример:
Какой груз может поднять воздушный шар объёмом $V = 10$ м^3, наполненный гелием? Плотность гелия $\rho_{He} = 0{,}18$ кг/м^3, плотность воздуха $\rho_{\text{В}} = 1{,}29$ кг/м^3. Масса оболочки шара $m_o = 2{,}1$ кг.

Решение:
Объёмом груза по сравнению с объёмом шара пренебрегаем. Вес вытесненного воздуха $\rho_{\text{В}}Vg$, вес гелия $\rho_{He}Vg$. Максимальная масса груза найдётся из условия: $m_og + \rho_{He}Vg + mg = \rho_{\text{В}}Vg$. Отсюда:

$$m = (\rho_{\text{В}} - \rho_{He})V - m_o = 9\,\text{кг}.$$

Примеры

Пример:
Самородок золота вместе с кварцем, в котором он заключён, весит в воздухе $P = 2{,}26$ Н. При полном погружении самородка в воду его вес уменьшается на $\Delta P = 0{,}2$ Н. Найдите массу золота в самородке. Плотность золота $\rho_з = 19{,}3$ г/см^3, плотность кварца $\rho_к = 3{,}3$ г/см^3

Решение:
Пусть масса кварца в самородке $m_к = \rho_к V_к$, а масса золота $m_з = \rho_з V_з$. Вес самородка в воздухе:

$$P = (m_к + m_з)g = (\rho_к V_к + \rho_з V_з)g.$$

.

В воде вес уменьшается на величину силы Архимеда:

$$\Delta P = \rho_в g(V_к + V_з).$$

Из последнего уравнения получим:

$$V_к = \frac{\Delta P}{\rho_в g} - V_з.$$

Подставим выражение для $V_к$ в выражение для P.

$$P = \frac{\rho_к}{\rho_в}\Delta P + (\rho_з - \rho_к)gV_з.$$

Выражая из последнего соотношения объём золота $V_з$, получаем, что масса золота равна:

$$m_з = \rho_з V_з = \frac{\rho_з}{(\rho_з - \rho_к)g}\left(P - \frac{\rho_к}{\rho_в}\Delta P\right) = 0{,}193 \text{ кг}.$$

Пример:
В ванне с водой плавает кораблик, на дне которого лежит небольшой камень. Изменится ли уровень воды в ванне, если камень вынуть из кораблика и опустить в воду?

Решение:
После того как из кораблика вынули камень, он стал легче, и, следовательно, объём вытесненной им воды уменьшился на величину:

$$V_1 = P/(\rho_1 g),$$

где P – вес камня, ρ_1 – плотность воды.

При погружении в воду камень вытеснит объём воды, равный своему объёму

$$V_2 = P/(\rho_2 g),$$

где ρ_2 – плотность вещества камня.

Так как $\rho_2 > \rho_1$, то $V_1 > V_2$. Следовательно, уровень воды в ванне понизится.

Пример:
В цилиндрическом сосуде с водой находится льдинка, полностью погруженная в воду и притянутая тонкой нитью ко дну. Когда льдинка растаяла, уровень воды понизился на $h = 1$ см. Какова была сила натяжения нити? Площадь дна сосуда $S = 100$ см^2.

Решение:
Сначала найдём объём льдинки. Так как плотность льда $\rho_л$ меньше плотности воды $\rho_в$, объём $V_в$ воды, получившейся при таянии льдинки, меньше объёма $V_л$ воды, который был изначально вытеснен льдинкой. Поэтому уровень воды понизился. Приравнивая массы льдинки и воды, которая получилась при её таянии, получим

$$V_л = \frac{\rho_в}{\rho_л} V_в.$$

С другой стороны, по условию задачи:

$$V_л - V_в = Sh.$$

Из этих двух уравнений следует:

$$V_л = \frac{Sh}{1 - \rho_л/\rho_в}.$$

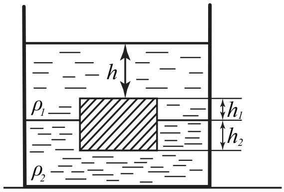
Теперь составим баланс сил, действующих на льдинку. Вниз действуют силы тяжести $F_g = \rho_л g V_л$ и сила натяжения нити T, вверх направлена сила Архимеда $F_A = \rho_в g V_л$. Таким образом,

$$T = F_A - F_g = \rho_в g V_л - \rho_л g V_л = (\rho_в - \rho_л) g V_л.$$

Подставляя сюда найденное выражение для $V_л$, получим:

$$T = \rho_в g S h \; = \; 1 \text{ Н}.$$

Пример:
Поверх жидкости плотностью ρ_1 налита жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$, причём жидкости не смешиваются. У границы раздела этих жидкостей плавает тело плотностью ρ ($\rho_2 < \rho < \rho_1$). Какая часть объёма тела $\Delta V/V$ будет погружена в более плотную жидкость?



Решение:

Пусть тело, плавающее между жидкостями, является кубиком с площадью грани S. Обозначим h – расстояние от свободной поверхности до верхней грани кубика, h_1 – расстояние от верхней грани кубика до границы раздела жидкостей, h_2 – расстояние от границы раздела жидкостей до нижней грани кубика. Искомая доля объёма тела будет равна:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Составим баланс сил, действующих на плавающее тело. Сила давления, действующая на нижнюю грань кубика, уравновешена силой давления на верхнюю грань и силой тяжести:

$$\rho_1 g h S + mg = \rho_1 g(h + h_1)S + \rho_2 g h_2 S,$$

где $m = \rho g(h_1 + h_2)S$ – масса кубика. Подставляя выражение для массы кубика в уравнение баланса сил, получим:

$$\rho(h_1 + h_2) = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2.$$

Разделим левую и правую части полученного выражения на $h_1 + h_2$:

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\frac{h_2}{h_1 + h_2},$$

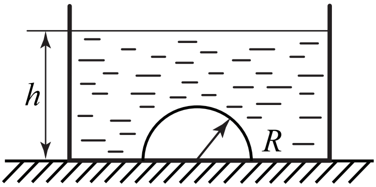
Отсюда окончательно получим:

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Пример:

На дне сосуда находится полусферическая выпуклость радиусом R.

В сосуд наливают жидкость плотностью ρ до уровня $h > R$. Найти полную силу давления F, которую оказывает жидкость на поверхность выпуклости. Указание: площадь круга $S = \pi R^2$, объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Решение:
Кажущаяся трудность задачи связана с тем, что на выпуклой поверхности давление в различных местах различно. Однако ответить на вопрос задачи можно и без интегрирования. Представим, что выпуклость – это не часть дна, а тело, лежащее на дне. Представим также, что между телом и дном есть тонкий зазор, куда подтекает вода. Тогда полная сила давления, действующая на такое тело, будет равна силе Архимеда (направлена вверх):

$$F_A = \rho g(V/2) = \frac{2}{3}\rho g \pi R^3.$$

Сила давления, действующая на нижнюю плоскую поверхность тела (направлена вверх), равна:

$$F_1 = \rho g h S = \rho g h \pi R^2.$$

Тогда искомая сила давления:

$$F = F_1 - F_A = \pi \rho g \left(h - \frac{2}{3}R\right) R^2.$$

Пример:
На пружинных весах уравновешен цилиндрический сосуд, на дне которого лежит металлические тело плотностью $\rho = 8000$ кг/м^3. Если тело подвесить на нити так, что оно остается целиком погруженным в воду, но не касается дна, то показания весов изменятся на 0,7 Н. Если тело из воды вытащить, то уровень воды в сосуде понизится на 10 см. Найти площадь сечения сосуда S.

Решение:
Показание весов P_1 в первом случае, когда тело лежит на дне сосуда, складывается из веса тела mg и веса воды $m_в g$: $P_1 = mg + m_в g$. После того, как тело подвесили, на воду со стороны подвешенного тела действует сила, по модулю равная силе Архимеда. Показания весов во втором случае составят $P_2 = \rho_в V g + m_в g$, где V – объём тела. Учитывая, что $m = \rho V$, получим

$$V = \frac{P_1 - P_2}{(\rho - \rho_в)g}.$$

После извлечения тела из сосуда уровень воды понизится на $h = V/S$. Отсюда найдём площадь сечения сосуда:

$$S = \frac{P_1 - P_2}{h(\rho - \rho_в)g} = 10 \text{ см}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача:
Шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной трети действующей на него силы тяжести. Найти плотность шара.

Указание:
Площадь круга $S = \pi R^2$, объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

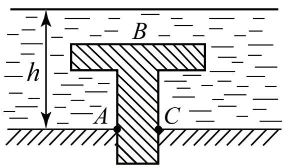
Задача:
Кусок пробки имеет в воздухе вес 1 Н, кусок некоторого металла – 10 Н. Если эти куски связать легкой ниткой и полностью погрузить

в керосин, то их общий вес будет 5 Н. Найдите плотность пробки. Плотность керосина 800 кг/м^3, плотность металла 4000 кг/м^3.

Задача:
Определите наименьшую площадь плоской однородной льдины толщиной 25 см, способной удержать на воде человек массой 75 кг. Плотность льда 900 кг/м^3.

Задача:
В цилиндрическом сосуде с водой плавает кусок льда, в который вморожен грузик из цинка массой $m = 35$ г. На сколько понизится уровень воды, когда лед растает? Плотность цинка $\rho = 7000$ кг/м^3. Площадь дна сосуда $S = 100$ см^2.

Задача:
Подводная опора, забитая в глинистый грунт водоема глубиной $h = 3$ м, представляет собой два соосных цилиндра различного диаметра. Найти силу, действующую на опору со стороны воды в водоеме, если площадь сечения цилиндра меньшего диаметра, забитого в грунт, равна $S = 1$ м^2, объём части опоры ABC, находящейся в воде, $V = 4$ м^3, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Атмосферное давление не учитывать.



Задача:
Металлический брусок плавает в сосуде, в котором налита ртуть и поверх нее – вода. При этом в ртуть брусок погружен на 1/4 своей высоты, а в воду на 1/2. Определить плотность металла. Плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м^3.

Задача:
Полый алюминиевый шар объёмом $V = 1200$ см^3 плавает в воде,

погрузившись наполовину. Найти объём полости шара. Использовать табличные данные.

Задача:

Масса оболочки аэростата, корзины, полезного груза и балласта $m = 1110$ кг. Аэростат заполняют гелием. При каком объёме аэростата возможно воздухоплавание? Плотности гелия и воздуха: $\rho_{He} = 0{,}18$ кг/м^3, $\rho_{\text{В}} = 1{,}29$ кг/м^3.

Глава 10
Гидростатика

Задачи для самостоятельного решения

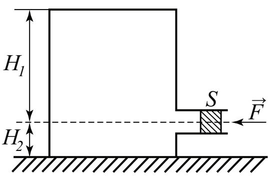
Задача:

Давление газов в конце сгорания в цилиндре дизельного двигателя трактора $P = 9$ МПа (90 атм). Диаметр цилиндра $d = 130$ мм. С какой силой газы давят на поршень в цилиндре?

Задача:

Площадь малого поршня гидравлического подъёмника $S_1 = 0{,}8$ см^2, а большого $S_2 = 40$ см^2. Какую силу надо приложить к малому поршню, чтобы поднять груз весом 7 кН?

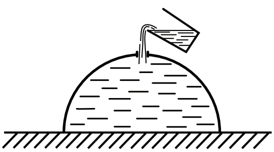
Задача:



Герметичный сосуд полностью заполнен водой и стоит на столе (рис.). На небольшой поршень площадью S давят рукой с силой F. Поршень может свободно перемещаться и находится ниже крышки сосуда на H_1 и выше дна на H_2. Плотность воды ρ, атмосферное давление P_A. Найти давления P_1 и P_2 в воде вблизи крышки и дна сосуда.

Примеры

Задача:



Полусферический колокол

В полусферический колокол, плотно лежащий на резиновом коврике на столе, наливают сверху через отверстие воду (см. рис.). Когда уровень воды доходит до отверстия, вода начинает вытекать снизу из-под колокола. Найти массу колокола M, если его внутренний радиус равен R, а плотность воды равна ρ.

Указание:
Площадь круга $S = \pi R^2$, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение:
Рассмотрим момент, когда вода начинает подтекать. Вода под колоколом как целое находится в равновесии, это значит, что сумма сил, действующих на нее, равна нулю. На воду действуют поверхностные силы со стороны стола (вверх) и колокола (вниз), а также сила тяжести (вниз). Давление в воде на уровне стола равно $p = \rho g R$. Значит, сила давления на стол (а значит, и со стороны стола на воду) равна $F_1 = \rho g R S = \rho g R(\pi R^2) = \pi R^3 \rho g$. С другой стороны, сила давления, действующая со стороны воды на колокол, равна весу колокола $F_2 = Mg$. Это очевидно, т.к. колокол также находится в равновесии. Сила тяжести, действующая на воду, равна $F_3 = \rho(V/2)g = \rho(\frac{2}{3}\pi R^3)g$.

Теперь составим баланс сил, действующих на воду:

$$F_1 = F_2 + F_3.$$

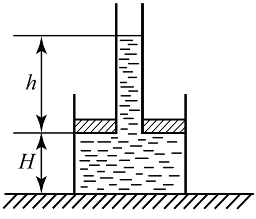
Подставляя значения этих сил, получим

$$\pi R^3 \rho g = Mg + \rho(\frac{2}{3}\pi R^3)g.$$

Отсюда масса колокола равна

$$M = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho.$$

Задача:



Поршень, вес которого $P = 30$ Н, представляет собой круглый диск радиуса $R = 4$ см с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиуса $r = 1$ см. Поршень может плотно и без трения входить в стакан и сначала лежит на дне стакана. На какую высоту H поднимается поршень, если влить в трубку $m = 700$ г воды?

Решение:
Давление на дне сосуда равно (рис.):

$$p = \rho g(H + h).$$

С другой стороны, так как система находится в равновесии, сила давления на дно сосуда равна сумме веса поршня и воды:

$$pS = P + mg,$$

где $S = \pi R^2$ площадь дна цилиндрического сосуда. Приравнивая давления, получим

$$P + mg = \rho g(H + h)S.$$

Отсюда

$$H = \frac{P + mg}{\rho g S} - h.$$

Осталось найти h. Масса воды известна, значит, можно найти объем воды V:

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

С другой стороны, объем воды равен

$$V = SH + sh,$$

где $s = \pi r^2$ – площадь сечения цилиндрической трубки. Тогда, приравнивая объемы, получим выражение для h.

$$h = (\frac{m}{\rho} - SH)\frac{1}{s} = (\frac{m}{\rho} - \pi R^2 H)\frac{1}{\pi r^2}.$$

Осталось подставить выражение для h и после несложных преобразований получить окончательный ответ.

$$H = \frac{1}{\pi \rho R^2}(m - \frac{P}{g}\frac{r^2}{(R^2 - r^2)}).$$

Подставим числа, получим

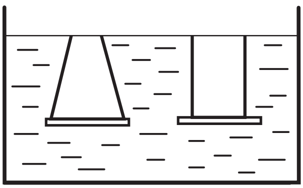
$$H = \frac{1}{3{,}14 \cdot 1 \cdot 16}(700 - (\frac{30}{10} \cdot 100)\frac{1}{(16 - 1)}) \approx 13{,}5 \text{ см}.$$

Замечание:
Величину h можно было найти другим способом – приравнивая силу давления, действующую на поршень со стороны воды, и силу тяжести равную весу поршня P.

$$\rho g h \cdot \pi(R^2 - r^2) = P.$$

Выражая h, и подставляя результат, снова приходим к ответу.

Задача:



Сосуды с приставным дном опущены в воду (см. рис.). Если в сосуды налить по 2 кг воды, дно отваливается. Отпадет ли дно, если на него

1. налить 2 кг масла?
2. поставить гирю 2 кг?
3. налить 2 кг ртути?

Решение:
Дно у сосудов отваливается, если сила давления на дно со стороны сосуда равна силе давления на дно со стороны окружающей воды. При наливании в сосуды воды это условие выполнится, когда уровень воды в сосудах достигнет уровня окружающей воды. Так как по условию масса воды при этом в обоих сосудах одинакова (2 кг), то объемы погруженных частей сосудов также одинаковы.

1. Нальем 2 кг масла сначала в сосуд постоянного сечения. Обозначим плотность масла ρ_1, а плотность воды ρ_0. Найдем уровень масла h_1 и сравним с уровнем воды h_0. Приравнивая массы воды и масла, для сосуда с вертикальными стенками получаем:

$$h_1 = h_0 \frac{\rho_0}{\rho_1} > h_0.$$

Теперь найдем силу давления, которую оказывает столб масла на дно. Площадь дна снизу и сверху одна и та же, значит, достаточно сравнить давления.

$$\rho_1 g h_1 = \rho_1 g h_0 \frac{\rho_0}{\rho_1} = \rho_0 g h_0.$$

Таким образом, сила давления масла на дно равна силе давления окружающей воды. Значит, дно в этом случае отпадет. Теперь нальем 2 кг масла в сосуд, суживающийся кверху. Очевидно, что уровень масла в этом случае $h_2 > h_1$. Это означает, что давление на дно будет больше, чем $\rho_0 g h_0$. Таким образом, дно и в этом случае отпадет.

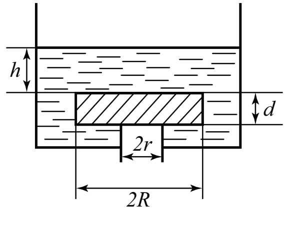
2. Если на дно любого из сосудов поставить гирю 2 кг, то сила, действующая на дно, будет равна силе давления окружающей воды. Значит, и в этом случае дно отпадет у обоих сосудов.

3. Теперь в сосуд с прямыми стенками нальем ртуть. Обозначим плотность ртути ρ_{Hg}. Разбирая этот случай аналогично случаю с маслом, получаем, что уровень ртути h_1:

$$h_1 = h_0 \frac{\rho_0}{\rho_{Hg}} < h_0.$$

При этом сила давления столба ртути на дно равна $\rho_0 g h_0$. Дно отпадет. Уровень ртути в сужающемся кверху сосуде будет $h_2 < < h_1$, так как очевидно, что объем суживающегося сосуда до уровня больше объема сосуда с прямыми стенками до того же уровня. Значит, давление $\rho_{Hg} g h_2 < \rho_0 g h_0$, то есть дно не отпадет.

Задача:



В дне сосуда имеется круглое отверстие радиуса r, на которое положен цилиндрический брусок радиуса R и толщины d (см. рис.). До какой высоты h над верхней гранью бруска следует налить воду в сосуд, чтобы брусок не всплывал? Масса бруска равна m, плотность воды ρ.

Решение:

В момент всплытия сила реакции, действующая на брусок со стороны опоры, становится равной нулю. Это значит, что равновесие бруска в этот момент обеспечивается только силой тяжести mg и силами давления, действующими на брусок со стороны воды.

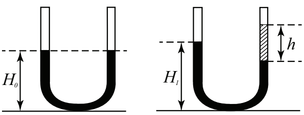
Сверху на брусок действует сила давления $F_1 = \pi R^2 \rho g h$ (направлена вниз), снизу действует сила давления $F_2 = \pi(R^2 - r^2)\rho g(h + d)$ (направлена вверх). Тогда из баланса сил справедливо уравнение

$$\pi(R^2 - r^2)\rho g(h + d) - \pi R^2 \rho g h - mg = 0.$$

Откуда получаем ответ:

$$\frac{\pi(R^2 - r^2)\rho d - m}{\pi r^2 \rho}.$$

Задача:



В U-образную трубку постоянного сечения налита жидкость плотностью ρ_1. При этом уровень ее поверхности в обоих коленах трубки находится на высоте H_0 (см. рис.). В одно колено налили столбик высотой h другой жидкости, плотность которой $\rho_2 < \rho_1$. Найти новый уровень H_1 первой жидкости в другом колене после установления равновесия.

Решение:

Сначала найдем высоту h_1 столба первой жидкости в левом колене над уровнем раздела жидкостей в правом колене. Очевидно, давления в обоих коленах на уровне раздела жидкостей одинаковы. Это значит:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h.$$

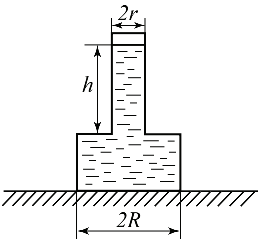
Отсюда

$$h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h.$$

Теперь разберемся, насколько поднялся уровень первой жидкости в левом колене относительно первоначального уровня. Очевидно, какой объем первой жидкости ушел из правого колена, такой объем пришел в левое колено. Так как трубка имеет постоянное сечение, то последнее утверждение означает, что насколько понизился уровень первой жидкости в правом колене, на столько же он повысился в левом. Значит, в левом колене уровень повысился на $h_1/2$, то есть $H_1 = H_0 + \frac{h_1}{2}$.

Задачи без решений

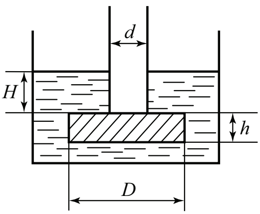
Задача:



Сосуд без дна, имеющий форму и размеры, изображенные на рисунке, стоит на столе. Вес сосуда равен P. В сосуд наливают жидкость. После того, как уровень достигает высоты h, сосуд под действием жидкости приподнимается. Определить плотность налитой жидкости.

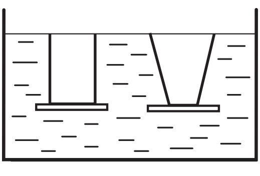
Задача:
Оценить массу атмосферы земли. Радиус Земли $R = 6370$ км, атмосферное давление принять $P_0 = 10^5$ Па.

Задача:



В бак с водой опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщины h и диаметром D (рис.). Плотность ρ материала диска больше плотности воды ρ_0. Трубку медленно поднимают вверх. Определить, на какой глубине H диск оторвется от трубки.

Задача:



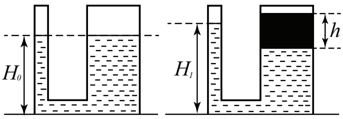
Сосуды с приставным дном опущены в воду (см. рис. 8). Если в сосуды налить по 2 кг воды, дно отваливается. Отпадет ли дно, если на него

1. налить 2 кг масла?

2. поставить гирю 2 кг?

3. налить 2 кг ртути?

Задача:



В U-образную трубку, показанную на рисунке, налита жидкость плотностью ρ_1. При этом уровень ее поверхности в обоих коленах трубки находится на высоте H_0. В широкое колено налили столбик высотой h другой жидкости, плотность которой $\rho_2 < \rho_1$. Найти новый уровень H_1 первой жидкости в другом колене после установления равновесия. Широкое колено представляет собой цилиндрическую трубу радиусом R, а узкое – цилиндрическую трубу радиусом r.

Глава 11
Закон сохранения импульса

Формулировка второго закона Ньютона с использованием понятия импульса

Импульсом тела называется произведение массы тела на его скорость в данной системе отсчета:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

В 5 главе второй закон Ньютона был сформулирован следующим образом:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Сформулируем этот же закон с использованием импульса. В инерциальной системе отсчета изменение импульса материальной точки пропорционально силе за единицу времени:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

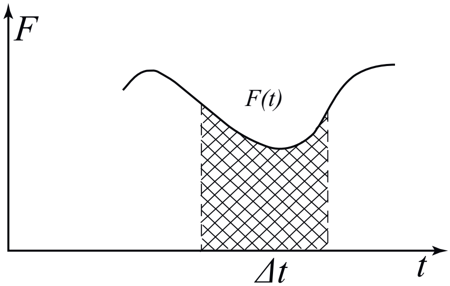
где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на тело, $\Delta p = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}}$ – изменение импульса тела (разница конечного и начального импульсов). В случае постоянной массы получаем:

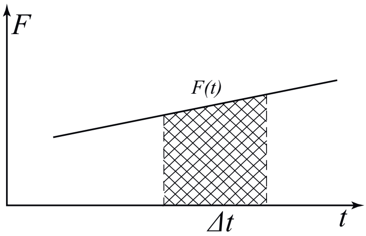
$$m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_{\text{кон}} - \vec{v}_{\text{нач}}) = \vec{F}\Delta t.$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ называется *импульсом силы.*

Импульс переменной силы

Если внешняя сила не постоянна, то поиск импульса силы не представляет особых трудностей. Рассмотрим случай, когда внешняя сила меняется от времени. Пусть зависимость внешней силы от времени представлена на графике.





Тогда импульс силы численно равен площади под графиком $F(t)$. В общем виде поиск площади под произвольным графиком является довольно сложной задачей. В задачах чаще всего $F(t)$ является линейной функцией. В этом случае площадь под графиком ищется как площадь трапеции (треугольника).

Закон сохранения импульса

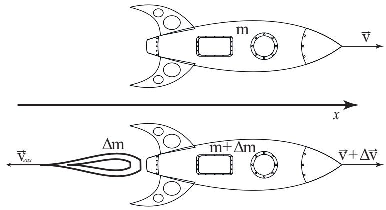
Если на систему не действуют внешние силы, то такая система называется замкнутой. В таком случае суммарный импульс системы сохраняется:

$$\sum \vec{p}_{\text{нач}} - \vec{p}_{\text{кон}}.$$

Другими словами, суммарный импульс всех тел в системе в начале некого процесса равен суммарному импульсу всех тел в системе в конце данного процесса. Этот закон называется *законом сохранения импульса*. Если на систему действуют внешние силы, то:

$$\sum \vec{p}_{\text{кон}} - \sum \vec{p}_{\text{нач}} = \vec{F}\Delta t.$$

Реактивное движение



Одним из примеров сохранения импульса является реактивное движение. Сложность данного движения состоит в том, что у одного из тел (ракета) постоянно уменьшается масса из-за сгорания топлива. Рассмотрим случай движения ракеты в замкнутой системе отсчета $\vec{F}_{\text{вн}} = 0$. Пусть ракета имеет массу m, движется со скоростью $\vec{v}$. Масса топлива, вылетающая из ракеты за время Δt равна Δm, скорость продуктов сгорания равна $\vec{v}_{\text{газ}}$.

Пусть Δv – приращение скорости ракеты. Тогда по закону сохранения импульса в проекции на ось x:

$$mv = (m - \Delta m)(v + \delta v) - \Delta m v_{\text{газ}}.$$

После раскрытия скобок получаем:

$$\Delta m(v + v_{\text{газ}}) = m\Delta v + \Delta m v.$$

В силу малости $\Delta m \Delta v \to 0$. Величина $v + v_{\text{газ}} = v_{\text{отн}}$ есть скорость газов относительно ракеты. После деления левой и правой части уравнения на Δt получим:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} v_{\text{отн}} m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

При наличии внешней силы уравнение принимает вид

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} v_{\text{отн}} + F_{\text{вн}} = m\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Получившееся уравнение называется уравнением движения тела с переменной массой или же уравнением Мещерского.

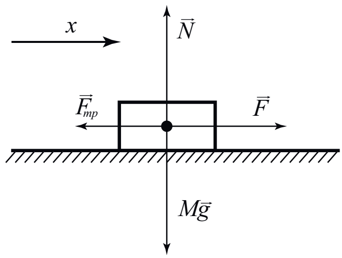
Примеры

Пример:

К телу, первоначально покоившемуся на шероховатой горизонтальной поверхности, прикладывают в течение времени $t_1 = 10$ с горизонтальную силу величиной $F = 5$ Н. После прекращения действия силы тело движется до остановки $t_2 = 40$ с. Определите величину $F_{\text{тр}}$ силы трения скольжения, считая её постоянной.

Решение:

Обозначим на рисунке силы, действующие на тело в процессе разгона. По второму закону Ньютона:



$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}.$$

Переходя к проекциям на горизонтальную ось, находим элементарные приращения импульса в процессе разгона:

$$\Delta p_x = (F - F_{\text{тр}})\Delta t.$$

и в процессе торможения. $F = 0$:

$$\Delta p_x = -F_{\text{тр}}\Delta t.$$

Просуммируем все приращения импульса тела от старта до остановки:

$$\sum \Delta p_x = \sum_{0 \leqslant t \leqslant t_1} (F - F_{\text{тр}})\Delta T + \sum_{t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2} (-F_{\text{тр}})\Delta t.$$

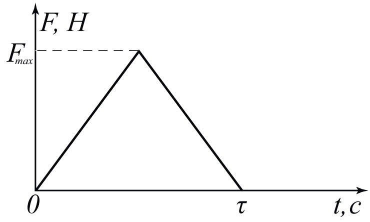
Напомним, что для любой физической величины сумма приращений равна разности конечного и начального значений. Тогда:

$$p_{x_{\text{кон}}} - p_{x_{\text{нач}}} = (F - F_{\text{тр}}) \cdot t_1 + (-F_{\text{тр}}) \cdot t_2.$$

С учетом равенств $p_{x_{\text{кон}}} = 0$, $p_{x_{\text{нач}}} = 0$ и независимости сил от времени приходим к ответу на вопрос задачи:

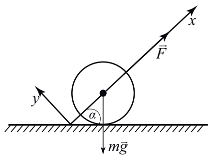
$$F_{\text{тр}} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} F = 1 \text{ Н}.$$

Пример:



На какое максимальное расстояние L_{max} улетит мяч, если в процессе удара футболист действует на мяч с постоянной по направлению силой, величина которой изменяется по закону, представленному на рисунке. Длительность удара $\tau = 8 \cdot 10^{-3}$ с, максимальная сила $F_{max} = 3{,}5 \cdot 10^3$ Н, масса мяча $m = 0.5$ кг. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение:



В процессе удара на мяч действуют две силы: сила тяжести $mg = 5$ Н и сила $\vec{F}$, с которой футболист действует на мяч, $F \leqslant F_{max} = 3{,}5 \cdot 10^3$ Н. Так как $mg \ll F_{max}$, то действием силы тяжести можно пренебречь. Из кинематики известно, что максимальная дальность полета наблюдается при старте под углом $\alpha = 45°$. Процесс удара показан на рисунке.

По второму закону Ньютона *приращение импульса равно импульсу силы.* $\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$. После проецирования на ось x, получаем:

$$\Delta p_x = mv - 0 = \sum_{0 \leqslant t \leqslant \tau} F \cdot \Delta t.$$

Импульс силы $\sum_{0 \leqslant t \leqslant \tau} F(t) \cdot \Delta t$ за время удара численно равен площади под графиком зависимости этой силы от времени (каждое слагаемое $F(t) \cdot \Delta t$ в импульсе силы можно интерпретировать как площадь элементарного прямоугольника со сторонами $F(t)$ и Δt на графике зависимости $F(t)$). Тогда импульс силы F за время удара равен:

$$\sum_{0 \leqslant t \leqslant \tau} F \cdot \Delta t = \frac{F_{max} t}{2}$$

и в рассматриваемом случае не зависит от того, в какой именно момент времени сила достигает максимального значения (площадь треугольника равен половине произведения основания на высоту). Далее находим импульс мяча в момент окончания действия силы:

$$mv = \frac{1}{2} F_{max} \cdot \tau.$$

Отсюда находим начальную скорость полёта мяча:

$$v = \frac{F_{max} \cdot \tau}{2m} = 28\ \text{м/с}.$$

Замечание:
В рассматриваемом модельном примере получен несколько завышенный по сравнению с наблюдениями результат.

Пример:
Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности земли под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 10$ м/с, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на $\delta = 30\%$ меньшую, чем при бросании. Найдите время полета мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости.

Решение:
Согласно второму закону Ньютона *приращение импульса пропорционально силе и происходит по направлению силы:*

$$m \cdot \Delta\vec{v} = (m\vec{g} - k\vec{v}) \cdot \Delta t.$$

Переходя к проекциям сил и приращения скорости на вертикальную ось, получаем:

$$m \cdot \Delta v_y = -mg\Delta t - kv_y \cdot \Delta t.$$

Заметим, что элементарное перемещение мяча по вертикали равно $\Delta y = v_y \cdot \Delta t$, и перепишем последнее соотношение в виде:

$$m \cdot \Delta v_y = -mg \cdot \left(\sum \Delta t\right) - k \cdot \left(\sum \Delta y\right).$$

Переходя к конечным приращениям, получаем:

$$m(v_y(T) - v_y(0)) = -mg(T - 0) - k(y(T) - y(0)).$$

Точка старта и финиша находятся в одной горизонтальной плоскости, поэтому перемещение мяча по вертикали за время нулевое:

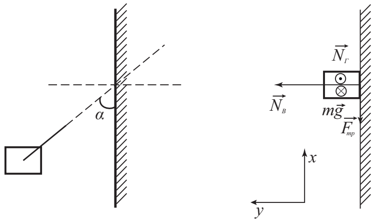
$$y(T) - y(0) = 0.$$

Тогда $-(1-\delta)mv_0\sin\alpha - mv_0\sin\alpha = -mgT$. Отсюда находим продолжительность полета мяча:

$$T = \frac{v_0\sin\alpha}{g}(2-\delta) \approx 1{,}5\ \text{с}.$$

Пример:

Кубик, движущийся поступательно со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности, испытывает соударение с шероховатой вертикальной стенкой. Коэффициент трения μ скольжения кубика по стенке и угол α известны. Одна из граней кубика параллельна стенке. Под каким углом β кубик отскочит от стенки? Считайте, что перпендикулярная стенке составляющая скорости кубика в результате соударения не изменяется по величине.



Решение:

Силы, действующие на кубик в процессе соударения, показаны на рисунке. По второму закону Ньютона:

$$\Delta\vec{p} = \left(m\vec{g} + \vec{N}_{\text{г}} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{V}_{\text{в}}\right)\cdot\Delta t.$$

Переходя к проекциям на горизонтальные оси Ox и Oy , получаем:

$$\begin{cases}\Delta p_x = -F_{\text{тр}}\Delta t\\ \Delta p_y = N_{\text{в}}\Delta t\end{cases}$$

Просуммируем приращения $\Delta p_y = N_{\text{в}}\Delta t$ по всему времени τ соударения, получим:

$$\sum \Delta p_y = p_y(\tau) - p_y(0) = mv\sin\alpha - (-mv\sin\alpha) = \sum_{0\leqslant t\leqslant\tau} N_{\text{в}}\Delta t.$$

В процессе удара в любой момент времени $F_{\text{тр}} = \mu N_{\text{в}}$, следовательно, во столько же раз отличаются импульсы этих сил за время соударения:

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant\tau} F_{\text{тр}}\Delta t = \mu \sum_{0\leqslant t\leqslant\tau} N_{\text{в}}\Delta t = 2\mu m v\sin\alpha.$$

Тогда вычислим проекцию $v_x(t)$ скорости кубика после соударения. Для этого просуммируем приращения:

$$\Delta p_x = -F_{\text{тр}}\Delta t = -\mu N_{\text{в}}\Delta t$$

по всему времени τ соударения, получим:

$$\sum \Delta p_x = p_x(\tau) - p_x(0) = m v_x(\tau) - m v\cos\alpha = -\sum_{0\leqslant t\leqslant\tau} F_{\text{тр}}\Delta t = -2\mu m v\sin\alpha.$$

Отсюда $v_x(\tau) = v(\cos\alpha = 2\mu\sin\alpha)$. Далее, считая $v_x(\tau) > 0$, получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha}.$$

Пример:
(Белолипецкий, Еркович, 1.216). Один конец каната удерживают на высоте h от земли. Второй его конец касается земли. В момент времени $t = 0$ канат отпускают (без толчка). Он начинает свободно падать на землю. С какой зависимостью силы от времени $F(t)$ канат будет давить на землю? Масса единицы длины каната равна ρ.

Решение:
Пусть после начала движения прошел промежуток времени τ. За это время на землю упала часть каната длиной $l(\tau) = \dfrac{g\tau^2}{2}$ и массой $m(\tau) = \rho\cdot l(\tau) = \dfrac{\rho g\tau^2}{2}$. Эта упавшая часть каната давит на землю с силой $F_1(\tau) = m(\tau)\cdot g = \dfrac{\rho g^2\tau^2}{2}$. Полное же давление складывается из давления уже упавшей части каната и давления той части каната, которая падает. Найдем это второе давление $F_2(\tau)$. Рассмотрим небольшой участок длиной Δx и массой $\Delta m = \rho\cdot\Delta x$. Пусть этот кусочек каната полностью падает за время Δt, которое находится из кинематических соображений:

$$\Delta x = v\cdot\Delta t + \frac{g\cdot(\Delta t)^2}{2},$$

где v – скорость данного участка перед падением, которая равна $v = g\tau$. Из закона сохранения импульса следует, что $F_2(\tau) \cdot \Delta t = \delta m \cdot v$. После подстановки получаем:

$$F_2(\tau) = \frac{\Delta m}{\Delta t} v = \frac{\Delta x}{\Delta t}\rho v = \left(v(\tau) + \frac{g}{2}\Delta t\right) \cdot \rho \cdot v(\tau).$$

Членом $\frac{g}{2}\Delta t$ можно пренебречь в силу его малости, $\dfrac{g}{2}\Delta t \ll v(\tau)$, откуда получаем:

$$F_2(\tau) = \rho v^2(\tau) = \rho(g\tau)^2 = \rho g^2 \tau^2.$$

Таким образом, полное давление:

$$F(t) = F_1(t) + f_2(t) = \frac{\rho g^2 t^2}{2} + \rho g^2 t^2 = \frac{3}{2}\rho g^2 t^2.$$

После падения всего каната на пол (через время $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$) давление станет равным $F = mg = \rho g h$.

Пример:
(Савченко 2.2.36). Ракета массы m зависла над поверхностью Земли. Сколько топлива в единицу времени μ она должна расходовать при этом, если скорость истечения газа u? Как изменится результат, если ракета поднимается с ускорением a?

Решение:
Запишем уравнение Мещерского для ракеты:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} v_{\text{отн}} + F_{\text{вн}} = m\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Так как ракета покоится, то $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $v_{\text{отн}} = u$, $F_{\text{вн}} = mg$. Откуда получаем $\mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{mg}{u}$.

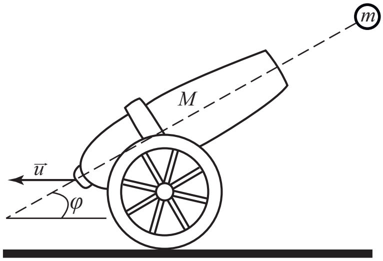
Во втором случае ракета двигается с ускорением a, уравнение примет вид:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}u = mg + ma.$$

Откуда расход топлива $\mu' = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{m(g+a)}{u}$.

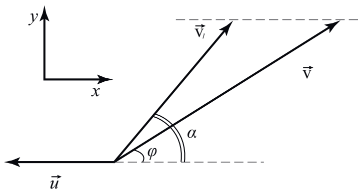
Пример:

(МФТИ, 2002). Игрушечная пушка может скользить по рельсам, укрепленным на горизонтальном полу. Ствол пушки наклонен под углом φ к горизонту. Масса пушки без снаряда M, масса снаряда m. Из покоившейся пушки произведен выстрел. В результате пушка, не отрывавшаяся от рельсов, получила скорость u. На каком расстоянии от места выстрела снаряд упал на пол?



Решение:

Рассмотрим движение снаряда сразу после вылета из пушки. Пусть его скорость относительно пушки равна v, данная скорость будет направлена под углом φ к горизонту. В неподвижной же системе отсчета снаряд вылетает со скоростью v_1 и под углом α.



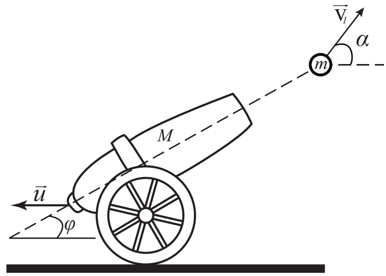
Скорости $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{u}$ связаны соотношением:

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{v}_1.$$

После проецирования на оси x и y получим:

$$\begin{cases} v_1\cos\alpha + u = v\cos\varphi \\ v_1\sin\alpha = v\sin\varphi \end{cases}$$

В момент выстрела внешние силы по горизонтали не действуют, следовательно, импульс системы (вдоль горизонтальной плоскости) сохраняется. Так как начальный импульс был равен нулю (пушка покоилась), то суммарный конечный импульс тоже равен нулю, откуда



$$Mu = mv_1 \cos\alpha.$$

Замечание:
Так как закон сохранения импульса мы пишем в неподвижной системе отчета, то и величина скорости снаряда должна быть записана в неподвижной системе отсчета, в нашем случае это $\vec{v}_1$.

Выражаем $v_1 \cos\alpha = \dfrac{M}{m}u$. После подстановки получаем $\dfrac{M}{m}u + u = \dfrac{M+m}{m}u = v\cos\varphi$, откуда

$$v = \frac{M+m}{m\cdot\cos\varphi}u,\ v_1\sin\alpha = \frac{(M+m)\cdot u}{m\cdot\cos\varphi}\cdot\sin\varphi = \frac{(M+m)\cdot u}{m}\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

Максимальная дальность полета $L = \dfrac{v_1^2\sin(2\alpha)}{g} = \dfrac{2\cdot(v_1\cos\alpha)\cdot(v_1\sin\alpha)}{g}$. После подстановки получаем

$$L = \frac{2\cdot\left(\dfrac{M}{m}\cdot u\right)\cdot\left(\dfrac{M+m}{m}\cdot u\cdot\operatorname{tg}\phi\right)}{g} = 2\frac{M(M+m)u^2}{m^2 g}\operatorname{tg}\varphi.$$

Пример:
(Савченко, 2.2.38). Водометный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления движения катера $F = kv^2$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера u. Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды S, плотность воды ρ.

Решение:
Пусть v – скорость движения катера. Так как его скорость постоянна, то скорость выбрасываемой воды в неподвижной системе отсчета равна $u - v$. Очевидным является тот факт, что катер не имеет резервуара для накапливания воды, значит вся вода, захватываемая двигателем катера, полностью выбрасывается из водометной пушки. Рассмотрим небольшой промежуток времени Δt. За этот промежуток катер прошел расстояние $\Delta x = v \cdot \Delta t$. За этот промежуток времени катер забрал порцию воды объемом $\Delta V = S \cdot \Delta x$, масса этой воды $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho S v \Delta t$. За тот же промежуток времени водяная пушка выбросила такую же массу воды Δm со скоростью $u - v$. Так как скорость катера не меняется, то изменение импульса катера равно импульсу силы сопротивления за данный участок времени Δt:

$$\Delta m(u - v) = F \cdot \Delta t.$$

Откуда получаем, что:

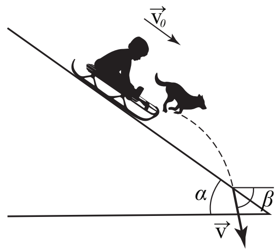
$$\rho S v \delta t(u - v) = kv^2 \Delta t,$$

$$kv = \rho S(u - v),$$

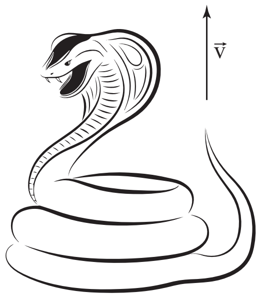
$$v = \frac{\rho S u}{k + \rho S}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача:
(МФТИ, 1991). Сани с седоком и собакой общей массой M съезжают с постоянной скоростью v_0 с горы, имеющей уклон α ($\cos\alpha = 6/7$). Собака массой m спрыгивает с саней по ходу их движения и приземляется, имея скорость v, направленную под углом β ($\cos\beta = 3/7$) к горизонту. Сани после этого продолжают двигаться по горе вниз. Найти скорость саней с седоком после прыжка собаки?



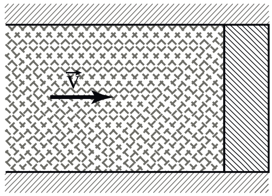
Задача:
Змея, массой m и длиной l лежит на земле. В некоторый момент времени она начинает вставать с постоянной скоростью v, направленной вертикально вверх. С какой силой она давит на землю во время своего подъема? Считайте, что змея однородна по всей своей длине.



Задача:
Лодку массой $m = 100$ кг тянут за веревку по поверхности озера с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с. В некоторый момент вёревка обрывается. Какой путь L пройдет после этого лодка к тому моменту, когда её скорость уменьшится в два раза? Считайте, что скорость сопротивления зависит только от скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ лодки по закону $\vec{F} = -(\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{a})$, где $\alpha = 10$ Н $\cdot$ с/м, $\beta = 50$ Н $\cdot$ с^2/м.

Задача:
(Савченко 2.2.13). Артиллерист стреляет из пушки ядром массой m так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее из пушки ядро садится барон Мюнхгаузен, масса которого равна $5m$. Какую часть пути до неприятельского лагеря ему придется идти пешком?

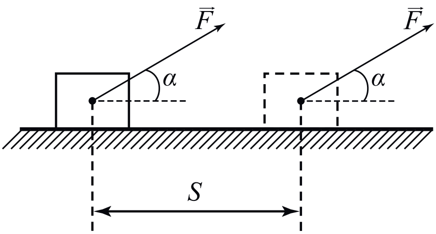
Задача:
(ВОШ, 1995). По реке со скоростью v плывут мелкие льдинки, которые равномерно распределяются по поверхности воды, покрывая её n-ю часть. В некотором месте реки образовался затор. В заторе льдины полностью покрывают поверхность воды, не нагромождаясь друг на друга. С какой скоростью растет граница сплошного льда? Какая сила действует на 1 м ледяной границы между водой и сплошным льдом в заторе со стороны останавливающихся льдин? Плотность льда $\rho = 0{,}91$ г/см^3, толщина $h = 20$ см, скорость реки $v = 0{,}72$ м/с, плывущие льдинки покрывают $n = 0{,}1$ часть воды.



Задача:
(Буховцев, Кривченков №119). В начальный момент ракета массы M имела скорость v_0. В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция газа массой m. Скорость порции газа отличается от скорости ракеты до сгорания этой порции газа на постоянную величину u, т.е. скорость истечения газа постоянна. Пренебрегая действием силы тяжести, определить скорость ракеты через n секунд.

Глава 12
Закон сохранения импульса. Работа

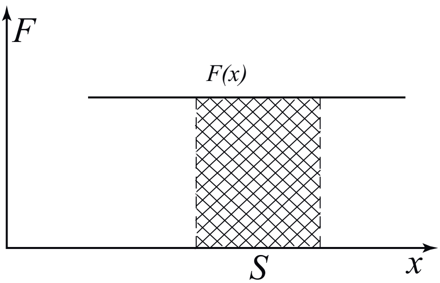
Работа постоянной силы



Работой постоянной силы F, составляющей угол α с направлением прямолинейного движения, называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора перемещения на косинус угла между векторами:

$$A_F = F \cdot S \cdot \cos(\alpha).$$

Если угол $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то и работа положительна, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то и работа отрицательна, если же $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (сила перпендикулярна перемещению), то $\cos\alpha = 0$ и работа равна нулю, и сила работы не совершает.



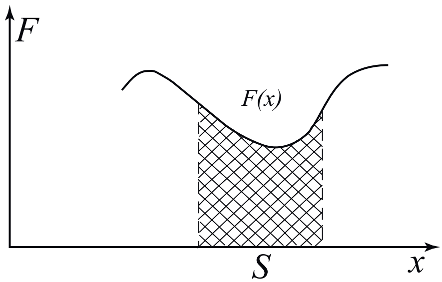
Если на тело действуют несколько сил, то полная работа всех сил равна алгебраической сумме работ всех этим сил (с учетом знаков):

$$A_{\text{всех сил}} = \sum_k A_{F_k},$$

т.е. работа определена как аддитивная величина.

Работу силы можно найти и геометрически. Если у нас дан график зависимости силы от координаты, то работа численно равна площади под графиком (площадь заштрихованного прямоугольника).

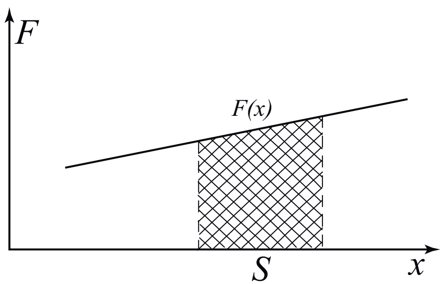
Расчёт работы переменной силы



Рассмотрим случай, когда сила, действующая на тело, переменна. Для того, чтобы вычислить работу силы, надо построить график проекции силы $F(x)$ на направление перемещения. Тогда работа силы на участке S будет численно равна площади под графиком (площадь криволинейной трапеции).

Замечание:
Если в задаче возникает необходимость подсчитать такую работу, то можно воспользоваться интегралом (более подробно данная тема будет изучаться в 10-11 классах). Но также можно оценить площадь, подсчитав количество полных и неполных клеток, занимаемых данной трапецией. Важно понимать, что это оценка, а не точное вычисление.

Если же в задаче (простой случай) сила линейно зависит от координаты, то работа численно равна площади трапеции (или треугольника).



Замечание:
Наглядный способ нахождения работы силы как площади под графиком требует осторожности. Работа численно равна площади с точностью до знака (площадь фигуры положительна). Нужно иметь в виду, что на некоторых участках работы силы может быть положительна, а на других – отрицательна.

Примеры

Пример:
Шкаф массой 100 кг передвинули по горизонтальному полу на 2 м. Чему равна работа силы тяжести при таком перемещении?

Решение:
Работа силы тяжести в данном случае равна нулю, т. к. угол между направлением действия силы тяжести и перемещением (горизонтальным направлением) равен 90°, косинус которого равен нулю.

Пример:
Лифт массой 1 т начинает подниматься с постоянным ускорением 0,2 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1. Чему равна работа силы натяжения троса, с помощью которого поднимают лифт за первые 4 с движения?
2. Чему равна работа силы натяжения троса за 4-ю секунду движения?

Решение:
За первые четыре секунды лифт прошел расстояние, равное $S = \frac{at^2}{2}$.

Так как в нашем случае сила тяжести троса и перемещение лифта направлены в одном направлении (вверх), то угол между этими векторами равен нулю, а косинус данного угла равен единице. Работу силы F натяжения троса ищем по формуле:

$$A_1 = F \cdot S = F \cdot \frac{at^2}{2}.$$

Величину силы F найдем из второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{a}$, или, после проецирования на вертикальную ось $F = m(g + a)$. Таким образом, за первые четыре секунды работа равна:

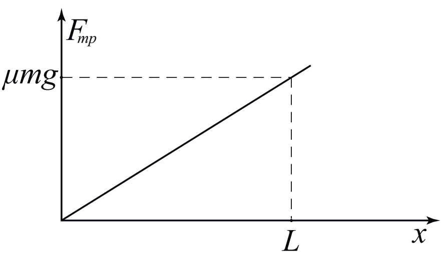
$$A(t = 4) = m(g + a)\frac{at^2}{2} = 16 \text{ кДж}.$$

Для нахождения работы за 4-ую секунду можно поступить аналогично – найти, какое расстояние тело прошло за 4-ую секунду, и, умножив силу на данное расстояние, найти работу. А можно пойти другим путем – воспользоваться тем фактом, что полная работа на всем участке равна сумме работ на его частях. Для этого надо найти работу, совершенную данной силой за 3 секунды. $A(t=3) = m(g+a)\frac{at^2}{2} = 9$ кДж. Работа, совершенная за 4 секунду равна разности

$$A(t=4) - A(t=3) = 7 \text{ кДж}.$$

Пример:
Доску массой $m = 5$ кг и длиной $L = 1$ м вытягивают со льда на асфальт параллельно длине доски. Коэффициент трения между доской и асфальтом $\mu = 0{,}5$. Трение доски о лед пренебрежимо мало. Какую работу совершит сила трения к моменту, когда доска полностью окажется на асфальте? Дорога горизонтальна, доску вытягивают горизонтально направленной силой. Считать, что доска давит на асфальт только той частью, которая находится на асфальте.

Решение:



Пусть доска продвинулась по асфальту на расстояние x. Сила нормальной реакции со стороны асфальта составляет долю, равную $\frac{x}{L}$ от полной силы реакции N, причем для горизонтальной дороги и горизонтальной тянущей силы $N = mg$. Сила трения приложена лишь к той части доски, которая уже находится на асфальте и будет равна:

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{x}{L} mg.$$

Построим график зависимости силы трения от расстояния x.

Работу силы трения будем искать как площадь под графиком (площадь треугольника). Учитывая тот факт, что работа отрицательна (сила трения направлена против перемещения), получаем:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}F_{\text{тр}}L = -\frac{\mu mgL}{2} \approx -12{,}5 \text{ Дж}.$$

Пример:
(МФТИ, 1994). По доске, наклоненной к горизонту под углом α ($\sin\alpha = \frac{1}{3}$), можно передвигать вверх и вниз грузы, прикладывая силу вдоль доски. Чтобы передвинуть ящик вниз массой $m = 30$ кг на расстояние $L = 3$ м надо совершить минимальную работу $A_1 = 100$ Дж. Какую минимальную работу потребуется совершить, чтобы вернуть по доске этот ящик назад?

Решение:
При перемещении ящика вниз нужно приложить минимальную силу, равную $F_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$, в таком случае $A_1 = F_1L = (mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)L$. Так как для перемещения груза вниз необходимо прикладывать силу, направленную вдоль наклонной плоскости, то сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$ больше проекции силы тяжести $mg\cos\alpha$ на ось.

Для того, чтобы затащить груз вверх по наклонной плоскости, нужно приложить силу, равную $F_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$, значит работа равна $A_2 = F_2L = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)L$.

$$\begin{cases} A_1 = (mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)L \\ A_2 = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)L \end{cases}$$

После вычитания получаем $A_2 - A_1 = 2mgL\sin\alpha$, откуда находим $A_2 = A_1 + 2mgL\sin\alpha \approx 690$ Дж.

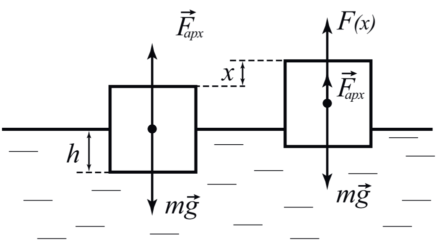
Пример:
(Козел, 70). Чему была равна средняя сила сопротивления воды движению парохода, если он в течение трех суток при средней скорости 10 км/ч потребил $m = 6{,}5$ т угля? Коэффициент полезного дей-

ствия судового двигателя $\eta = 0{,}1$. Теплотворная способность угля $q \approx 8 \cdot 10^3$ ккал/кг $\approx 33{,}5 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Решение:
За все время в топках котлов парохода было сожжено 6,5 тонн угля, при сжигании выделилось $Q = mq = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Дж тепловой энергии. Притом только 10% данной энергии пошло на совершение полезной работы, остальная часть тепла рассеялась, $A_{\text{полезная}} = Q\eta = 2{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж. Эта работа пошла на преодоление сил сопротивления воды. За трое суток пароход прошел путь $L = vt = 10$ км/ч $\cdot 3 \cdot 24$ ч$=720$ км. Таким образом, $A_{\text{полезная}} = F_{\text{сопр.}} L$, откуда находим $F_{\text{сопр.}} = \frac{A_{\text{полезная}}}{L} = \frac{\eta m q}{L} \approx 30$ кН.

Пример:
Какую работу надо совершить, чтобы вытащить из воды деревянный кубик, плавающий в озере? Сторона кубика a, плотность материала кубика ρ, плотность воды ρ_0.

Решение:

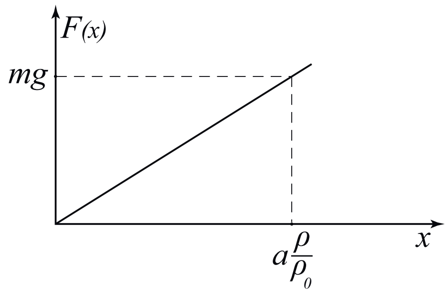


Рассмотрим силы, которые действуют на плавающий брусок. В нашем случае на него действуют сила тяжести mg, направленная вертикально вниз и сила Архимеда $F_{\text{Арх.}}$ равная $F_{\text{Арх.}} = \rho_0 g V_{\text{погр.}}$ и направленная вертикально вверх, где $V_{\text{погр.}}$ – объем погруженной части кубика. По второму закону Ньютона $mg = F_{\text{Арх.}}$. Пусть вначале кубик погружен на глубину h. Так как $V = a^3$, $V_{\text{погр.}} = ha^2$, то $\rho a^3 g = \rho_0 h a^2 g$, откуда находим $h = a\frac{\rho}{\rho_0}$.

Пусть кубик частично вытащили из воды, переместив его на высоту x. Тогда глубина погружения также уменьшится на величину x. А так как $F_{\text{Арх.}} = \rho_0 g a^3 (h - x)$, то $F(x) = mg - F_{\text{Арх.}} = \rho a^3 g - \rho_0 a^2 g (h - x)$.

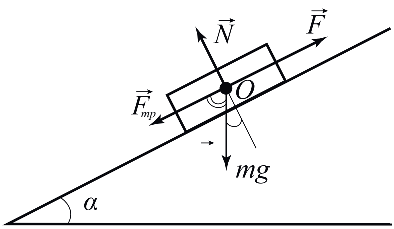
Откуда после преобразования получим $F(x) = \rho_0 g a^2 x$, притом величина x меняется в диапазоне от нуля до $h = a\frac{\rho}{\rho_0}$.

Из этого следует, что сила $F(x)$ меняется от нуля до mg (что и так является очевидным фактом). Для нахождения работы построим график зависимости $F(x)$. Тогда работа будет численно равна площади под графиком, $A = \frac{mga}{2}\frac{\rho}{\rho_0}$.



Замечание:
В данной задаче мы не учитывали изменение уровня жидкости, считая его незначительным. Если же размеры сосуда сопоставимы с размером тела, то придется учитывать повышение или понижения уровня жидкости при погружении или вытаскивании тела.

Пример:



(Савченко 2.4.30). При медленном подъеме груза по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения μ затрачена работа A. Груз тянут вдоль наклонной плоскости. Определите, какая часть работы пошла на увеличение внутренней энергии груза и наклонной плоскости.

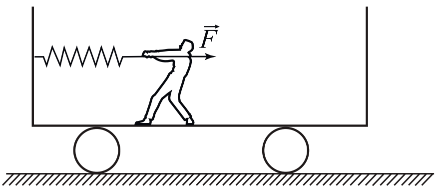
Решение:
Рассмотрим, какие силы действуют на груз в процессе подъема. Пусть масса груза m, груз переместили на расстояние l. По условию затратили работу $A = Fl$, при этом работа силы трения равна $A_{тр} = -F_{тр}l =$

$= -\mu mgl\cos\alpha$, а работа силы тяжести $A_{\text{тяж.}} = -mgl\cos\alpha$. Таким образом $A + A_{\text{тр}} + A_{\text{тяж.}} = 0$, откуда: $A = \mu mgl\cos\alpha + mgl\sin\alpha$.

Работа силы трения, в конечном счете, переходит в тепловую энергию, увеличивая внутреннюю энергию груза и наклонной плоскости. Выразив величину $mgl = \frac{A}{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}$, находим модуль работы силы трения: $A_{\text{тр}} = A\frac{\mu\cos\alpha}{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}$. Тогда в тепло выделилась часть тепла, равная: $\frac{A_{\text{тр}}}{A} = \frac{\mu\cos\alpha}{\mu\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{\mu}{\mu+\operatorname{tg}\alpha}$.

Пример:
(Буховцев, Кривченков №172). В вагоне равномерно движущегося поезда стоит человек, растягивающий пружину с силой F. Поезд прошел путь L. Какую работу совершит человек в системе отсчета, связанной с Землей.

Решение:

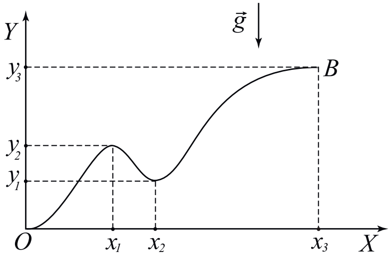


Человек, действуя на пружину с силой F, совершает работу $A_1 = -FL$. Одновременно на пол вагона со стороны человека действует сила трения F. Работа этой силы равна $A_2 = FL$.

Следовательно, полная работа, совершенная человеком в системе координат, связанной с Землей, равна нулю, так же как и в системе, связанной с поездом.

Задачи для самостоятельного решения

Задача:



(Московские физические олимпиады 1.163). Какую работу необходимо совершить, чтобы достаточно медленно переместить небольшой ящик массой m из точки O в точку B по горке, действуя на него с силой, направленной по касательной к траектории его движения?

Профиль горки показан на рисунке, коэффициент трения ящика о горку равен μ, ускорение свободного падения равно g. Указанные на рисунке значения координат считайте известными.

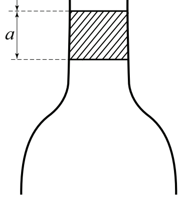
Задача:

Поперек шоссе лежит бревно массой m и длиной L. Чтобы освободить дорогу, бревно пытаются перетащить на траву, прикладывая силу вдоль бревна. Бревно перетащили лишь наполовину длины. Какую минимальную работу при этом совершили? Коэффициенты трения бревна об асфальт и о траву равны μ_1 и μ_2 соответственно.

Задача:

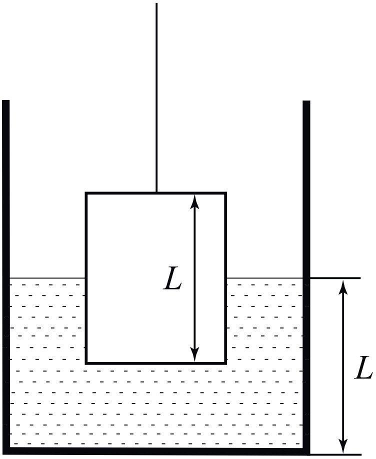
(Козел, 1.134). Какую минимальную работу надо совершить, чтобы втащить сани с грузом (общей массой $m = 30$ кг) на гору высотой $H = 10$ м? Угол наклона горы $\alpha = 30^o$. Коэффициент трения между санями и горой линейно убывает вдоль пути от $\mu_1 = 0{,}5$ у подножия до $\mu_2 = 0{,}1$ у вершины.

Задача:



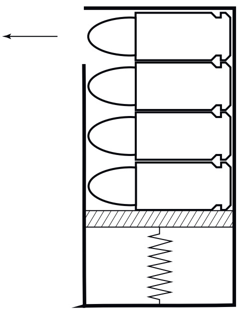
Какую работу необходимо затратить, чтобы вытащить пробку из горлышка бутылки? Пробка находится от края горлышка на расстоянии a, длина пробки также a. Сила трения между пробкой и бутылкой F.

Задача:



(Козел 79). В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высоты L и сечения S_1. При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом была совершена? Сечение стакана $S_2 = 2S_1$, начальная высота воды в стакане тоже L, плотность материала бруска $\rho = 0{,}5\rho_в$, где $\rho_в$ – плотность воды.

Задача:



(Московские городские олимпиады, 1.165). Магазин пистолета представляет собой металлический пенал, внутри которого имеется легкий поршень, подпираемый пружиной. Когда магазин пуст, поршень касается его крышки. Магазин устроен таким образом, что из него можно вынимать только находящийся у крышки патрон – через небольшое отверстие в боковой стенке. После вынимания патрона поршень под давлением пружины перемещается и передвигает все оставшиеся в магазине патроны к крышке.

В магазин вставили N одинаковых патронов массой m и длиной L, после чего вынули по очереди все патроны, держа магазин крышкой вверх. Коэффициенты трения между патронами, а также между патроном и крышкой и между патроном и поршнем одинаковы и равны μ. На сколько работа против сил трения при опустошении магазина будет больше, если при вынимании патронов держать его крышкой вниз? Трением между боковыми стенками магазина и патронами, а также массой пружины пренебречь.

Глава 13
Работа и закон сохранения энергии

Разбор типовых ошибок домашнего задания

Энергия и её различные виды (кинетическая, потенциальная, потенциальная энергия деформации, тепловая)

Энергией называется общая количественная мера движения и взаимодействия всех видом материи. В этой главе мы рассмотрим основные виды энергии – механическую и внутреннюю. Механическая энергия, в свою очередь, подразделяется на кинетическую (энергию движения) и потенциальную (её еще часто называют энергией покоя). Внутренняя энергия – энергия суммарная кинетическая энергия движения всех молекул и потенциальная энергия их взаимодействия. Следует отметить, что данные разделения весьма условны, так как внутренняя энергия, например, по факту является кинетической и потенциальной энергией для молекул. Рассмотрим каждый тип энергии отдельно.

Кинетической энергией материальной точки массой m, двигающейся со скоростью V, называется неотрицательная скалярная величина $E_k = \frac{mV^2}{2}$. Также часто энергию обозначают буквами K, T, W. В данном пособии для обозначения кинетической энергии мы будем использовать букву K. Единицей измерения энергии в Международной системе единиц (СИ) является Джоуль (Дж).

Если система состоит из N материальных точек, то полная кинетическая энергия системы равна алгебраической сумме кинетических энергий каждого из тел системы:

$$K_{sist} = K_1 + K_2 + \ldots + K_N,$$

где $K_i = \frac{m_i V_i^2}{2}$.

Потенциальной энергией называется энергия, которой обладает тело, расположенное на определенной высоте в гравитационном поле. Потенциальная энергия равна произведению массы тела m, ускорения свободного падения g и высоты h:

$$E_{pot} = mgh.$$

Также потенциальную энергию обозначают П, W_p. В данном пособии для обозначения потенциальной энергии мы будем использовать букву П. Следует отметить, что высота h отсчитывается относительно произвольного уровня (уровень нулевой потенциальной энергии). Так как высота есть величина относительная, то имеет смысл не сама энергия, а её изменение $\Delta\Pi = mg\Delta h$ при смещении тела на высоту Δh в поле тяжести Земли.

Потенциальную энергию деформации пружины определяют формулой:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

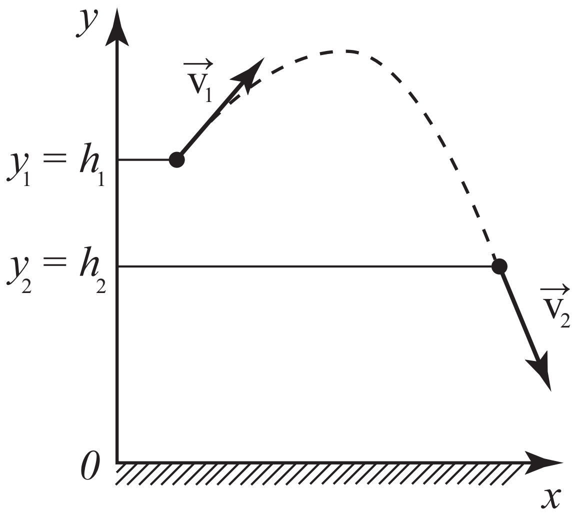
Как и потенциальная энергия силы тяжести, потенциальная энергия деформированной пружины определена не однозначно (с точностью до константы). Чаще всего константу выбирают так, что в недеформированном состоянии потенциальная энергия пружины равна нулю. Тогда величина x принимает смысл удлинения пружины относительно нерастянутого состояния.

Природа возникновения тепловой энергии выходит за рамки данной главы, и мы её рассматривать не будем. При решении задач мы будем использовать факт, что при нагреве тел в результате соударения тепловая энергия Q выделяется ($Q > 0$).

Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести. Будем считать, что никакие другие силы (кроме силы тяжести) на тело не действуют. В таком случае выполняется закон сохранения механической энергии – сумма кинетической и потенциальной энергии остается неизменной:

$$\frac{mV^2}{2} + mgh = const.$$



Зная скорости и высоты в начале и в конце движения, закон сохранения механической энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{mV_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mV_2^2}{2} + mgh_2.$$

Данный закон можно сформулировать и так – изменение кинетической энергии равно изменению потенциальной энергии.

Общефизический закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии – один из наиболее фундаментальных законов физики. Суть его заключается в следующем – энергия системы сохраняется, она никуда не исчезает и ниоткуда не появляется, а переходит из одного состояния в другое.

Ранее мы рассматривали движение точки при условии, что внешние силы отсутствуют. Если же это не так, то механическая (кинетическая и потенциальная) энергия не сохраняется. Следовательно, изменение механической энергии равно работе внешних сил, действующих на данную систему. В виде формул этот закон формулируется следующим образом:

$$K_1 + \Pi_1 + A_{out} = K_2 + \Pi_2 + Q,$$

где K_1 – суммарная кинетическая энергия всех тел в начале процесса, Π_1 – суммарная потенциальная энергия всех тел в начале процесса, A_{out} – суммарная работа всех внешних сил, действующих на систему, K_2 – суммарная кинетическая энергия всех тел в конце процесса, Π_2 – суммарная потенциальная энергия всех тел в конце процесса, Q – полная тепловая энергия, выделяемая в процессе.

Упругие и неупругие центральные взаимодействия

Часто в задачах рассматриваются два и более тел, взаимодействующих друг с другом. При кратковременных взаимодействиях (соударениях, столкновениях, ударах) возникают ударные силы, вычисление которых часто представляет большую трудность. Это не позволяет использовать законы Ньютона. Применение же законов сохранения энергии и импульса позволяет определить значения скоростей до и после соударений, исключая промежуточные значения. Соударения бывают нескольких типов.

При абсолютно неупругих соударениях тела «слипаются», двигаются как единое целое с одинаковыми скоростями. При абсолютно неупругих соударениях не сохраняется механическая энергия и выделяется тепло. Примерами абсолютно неупругих соударений являются шарик, попадающий с тележку с песком; столкновение кусков пластилина, застревающая в бруске пуля и прочие.

При абсолютно упругих соударениях сохраняется механическая энергия, тепло не выделяется. Хорошей моделью абсолютно упругого соударения являются удары бильярдных шаров.

Иногда в задачах встречаются соударения, не являющиеся ни упругими, ни неупругими. При таких соударениях выделяется тепло, но тела после соударения не слипаются, а двигаются независимо друг от друга. Строго говоря, в природе абсолютно упругие соударения встречаются крайне редко, при любом ударе часть энергии переходит в тепло. Часто этой долей энергии пренебрегают в силу её малости.

Центральное соударение – соударение, при котором центры тел движутся вдоль одной прямой. При таких соударениях движение до и после отскока происходит вдоль одной прямой. В противном случае после отскока тела начинают двигаться под некоторыми углами относительно начального направления движения.

Примеры

Пример:
Автомобиль, движущийся со скоростью $V = 60$ км/ч по мокрому асфальту горизонтальной дороги, резко тормозит и до полной остановки едет юзом (колеса не вращаются). Коэффициент трения между покрышками автомобиля и дорогой равен $\mu = 0{,}4$. Вычислите тормозной путь автомобиля. Торможение осуществляется одновременно передними и задними колёсами. Автомобиль рассматривать как брусок с равномерно распределенной массой.

Решение:
Работа силы тяжести и работа нормальной силы реакции опоры со стороны дороги равны нулю, т.к. обе эти силы перпендикулярны вектору перемещения, и соответственно косинусы в выражениях для работ в обоих случаях равны нулю. Изменение кинетической энергии автомобиля в нашем случае связано лишь с действием силы трения покрышек колес автомобиля об асфальт:

$$\Delta K = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A.$$

В нашем случае $V_2 = 0$ (полная остановка автомобиля), $V_1 = V_0 = \frac{60}{3{,}6}$ м/с. Работа силы трения $A = -F \cdot S$. В нашем случае (при езде юзом) угол между силой трения и перемещением равен $180°$, косинус которого равен -1. Модуль силы трения скольжения (автомобиль движется как санки) $F = \mu N = \mu mg$, сила реакции опоры $N = mg$ (дорога горизонтальная). После подстановки получаем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \mu mgS,$$

$$S = \frac{V_0^2}{2\mu g} \approx 35 \text{ м.}$$

Пример:
Как изменится результат предыдущей задачи, если торможение будет осуществляться только задними (или только передними) колёсами?

Решение:
В этом случае модуль силы трения скольжения $F = \mu N = \frac{\mu m g}{2}$ (считая, что нагрузка равномерно распределена на передние и задние колеса). В результате чего получаем:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -\mu\frac{mg}{2}S \text{ и } S = \frac{V_0^2}{\mu g} \approx 70 \text{ м.}$$

Пример:
Пуля, летящая со скоростью V_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если её скорость после прохождения первой доски равна $V_1 = 0{,}83V_0$?

Решение:
Считаем, что при движении между досками сопротивление движению пули со стороны воздуха значительно меньше силы сопротивления со стороны древесины, и будем им пренебрегать. Кроме того, будем пренебрегать размерами пули; это позволит считать силу сопротивления со стороны древесины F постоянной: пренебрегаем тем, что пуля в какие-то моменты лишь частично находится в доске, в другие моменты располагается полностью в доске (если размеры пули меньше толщины доски). Пусть l – длина одной доски, а L – суммарный путь, который пройдет пуля во всех досках до момента остановки. Запишем закон сохранения энергии в случае прохождения пулей одной доски:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Fl.$$

С учетом того, что $V_1 = 0{,}83V_0$, получаем:

$$\frac{mV_0^2}{2}(1 - 0{,}83^2) = Fl.$$

По закону сохранения энергии для движения пули от начала первой доски до момента, когда она остановится:

$$\frac{mV_0^2}{2} = FL.$$

Деля уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{1 - 0{,}83^2} \approx 3{,}2.$$

То есть $3l < L < 4l$: пуля пробьет 3-ю доску, но застрянет в 4-й.

Пример:
Пуля массой $m = 5$ г попадает в покоящийся деревянный шар массой $M = 2$ кг и застревает в его центре. Найдите долю кинетической энергии пули, перешедшей в тепло.

Решение:
Пусть v – скорость пули до того, как она врезалась в шар, u – скорость шара вместе с пулей после того, как в нём застряла пуля. Так как скорости шара и пули теперь одинаковы, то по закону сохранения импульса имеем:

$$mv = (M + m)u.$$

Откуда находим $u = \frac{mv}{M+m}$. По закону сохранения энергии количество энергии, перешедшее в тепло, равно разности начальной и конечной кинетических энергий системы:

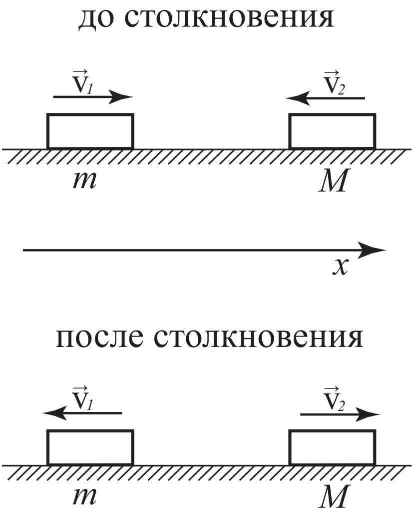
$$Q = K_1 - K_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)(\frac{mv}{M+m})^2}{2} = \frac{M}{M+m}\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда искомая доля кинетической энергии, перешедшей в тепло:

$$\frac{Q}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{M}{M+m} = \frac{2000}{2005} \approx 0{,}998.$$

(99,8% – почти вся энергия пули!)

Пример:



Две тележки массами m и M двигаются со скоростями V_1 и V_2 навстречу друг другу. Найти скорости тележек после абсолютно упругого удара.

Решение:

Пусть u_1 и u_2 – скорости тележек после соударения. Предположим, что после удара тележки разъедутся, правая тележка массой M поедет направо, а тележка массой m – налево. Так как внешние силы не действуют, то полный импульс системы сохраняется:

$$mV_1 + MV_2 = mu_1 + Mu_2.$$

Удар абсолютно упругий, это означает, что тепло не выделяется; движение происходит в горизонтальной плоскости, значит, нет изменения потенциальной энергии, значит, суммарная кинетическая энергия сохраняется (по закону сохранения энергии):

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

После проецирования векторного уравнения закона сохранения импульса на ось x получим:

$$\begin{cases} mV_1 - MV_2 = -mu_1 + Mu_2 \\ \frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} \end{cases}$$

Преобразуем данную систему следующим образом — все члены, содержащие m перенесем в одну сторону от знака «=», содержащие M – в другую:

$$\begin{cases} m(V_1 + u_1) = M(u_2 + V_2) \\ m(V_1^2 - u_1^2) = M(u_2^2 - V_2^2) \end{cases}$$

После чего поделим (решим систему уравнений методом деления, в данном случае это наиболее простой способ):

$$\frac{m(V_1^2 - u_1^2)}{m(v_1 + u_1)} = \frac{M(u_2^2 - V_2^2)}{M(u_2 + V_2)}.$$

После сокращения (в числителе стоит разность квадратов) получим

$$V_1 - u_1 = u_2 - V_2,$$

откуда

$$u_2 = V_1 + V_2 - u_1.$$

Подставим данное соотношение в уравнение закона сохранения импульса:

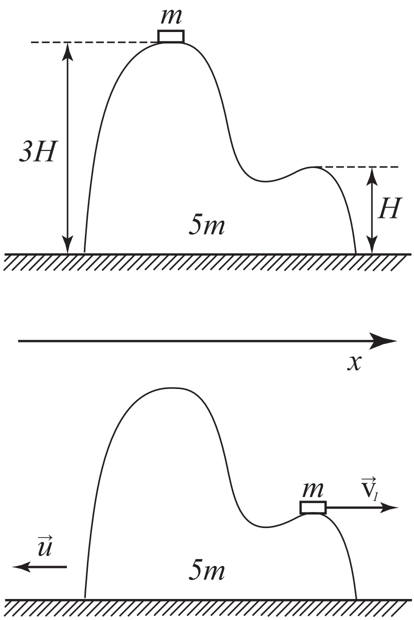
$$mV_1 - MV_2 = -mu_1 + M(V_1 + V_2 - u_1).$$

После преобразования находим:

$$u_1 = \frac{M(2V_2 + V_1) - mV_1}{M + m},\ u_2 = \frac{m(2V_1 + V_2) - MV_2}{M + m}.$$

Пример:

На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя



вершинами, высоты которых равны H и $3H$. На левой вершине горки находится шайба массой m. Масса горки $5m$, её поверхность гладкая. От незначительного толчка вправо шайба приходит в движение. Найти скорость шайбы на правой вершине, если:

1. горка закреплена на столе;

2. горка не закреплена.

Считать, что при движении шайба не отрывается от поверхности горки, а поступательно движущаяся горка – от стола.

Решение:
В случае закрепленной горки достаточно записать закон сохранения механической энергии для шайбы:

$$3mgH = mgH + \frac{mV^2}{2}.$$

Откуда находим скорость шайбы в первом случае $V = \sqrt{4gH}$.

Во втором случае кроме шайбы в движение придет горка. Так как внешние силы на систему «шайба+горка» по горизонтали не действуют, то импульс системы сохраняется. Пусть скорость шайбы на правой вершине равна V_1, скорость горки в этот момент равна u. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$0 = mV_1 - 5mu.$$

Откуда находим $u = \frac{V_1}{5}$. Запишем закон сохранения механической энергии:

$$3mgH = mgH + \frac{mV_1^2}{2} + \frac{5mu^2}{2},$$

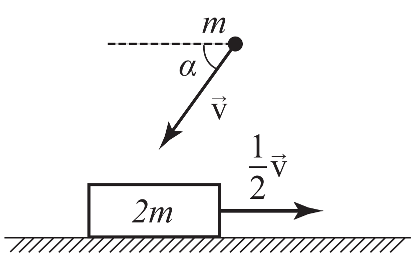
$$2mgH = \frac{3}{5}mV_1^2,$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{10}{3}gH}.$$

Очевидно, что скорость шайбы во втором случае будет меньше скорости в первом случае, так как часть потенциальной энергии пошла на разгон горки.

Пример:

Кусок пластилина массой $m = 200$ г попадает в брусок массой $2m$, двигающийся по гладкой горизонтальной поверхности стола, и прилипает к нему. Перед ударом скорость куска пластилина $V = 6$ м/с и направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, а скорость бруска равна $V/2$ и лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластилина.

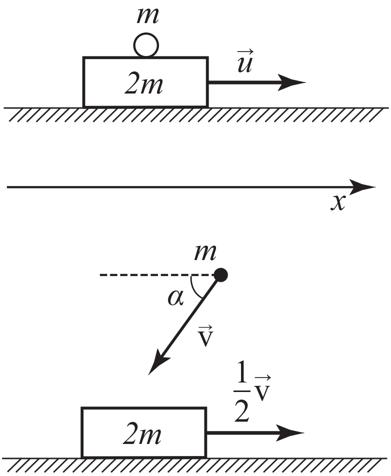


1. Определить скорость бруска с пластилином после удара.

2. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластилина и окружающих тел?

Решение:

Так как в задаче говорится про соударение бруска с куском пластилина, то подразумевается абсолютно неупругое соударение.



Система «брусок-пластилин» не является замкнутой – в процессе соударения меняется сила реакции опоры (см. задачу про встающую змею №2 из 11 главы). Но по горизонтали никакие силы не действуют, значит, импульс сохраняется только вдоль горизонтальной плоскости. Пусть u – скорость бруска с пластилином после соударения. Запишем закон сохранения в проекции на ось x:

$$-mV\cos\alpha + 2m\frac{1}{2}V = (m+2m)u.$$

Так как $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, то $u = \frac{mV(1-\cos\alpha)}{2m} = \frac{V}{6} = 1$ м/с.

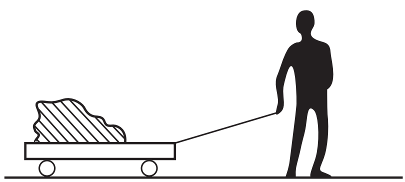
Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{2m(\frac{1}{2}V)^2}{2} = \frac{(m+2m)u^2}{2} + Q,$$

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{4} = \frac{mV^2}{24} + Q.$$

Откуда находим $Q = \frac{17}{24}mV^2 = 5{,}1$ Дж.

Пример:



На прямолинейном горизонтальном участке железной дороги стоит вагонетка с ценным грузом. Ночью к ней подкрался похититель. В качестве вспомогательного орудия злоумышленник решил применить невесомый упругий шнур; привязав один конец этого шнура к вагонетке и взяв в руки другой, он побежал вдоль железнодорожного полотна с постоянной скоростью V_0.

Через некоторое время похититель очнулся, лежа на вагонетке, которая двигалась со скоростью $V_1 = 1{,}8V_0$. Чему равна масса вагонетки с грузом, если масса похитителя $m = 80$ кг. Трением качения можно пренебречь, а трение между ботинками и землей достаточно велико.

Решение:
Рассмотрим движение вагонетки в системе отсчета, связанной с бегущим человеком: благодаря наличию упругого шнура движение описывается уравнением для гармонического колебания, и скорость вагонетки возрастает от $-V_0$ до V_0. В неподвижной системе отсчета скорость вагонетки возрастает от 0 до $2V_0$, вплоть до неупругого столкновения с похитителем. В результате этого столкновения похититель оказывается на вагонетке (и теряет сознание). Из закона сохранения импульса при столкновении:

$$2MV_0 + mV_0 = 1{,}8(m + M)V_0.$$

Откуда находим $M = 4m = 320$ кг.

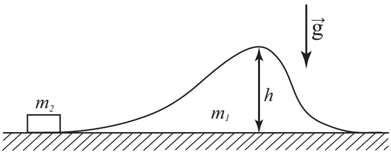
Задачи для самостоятельного решения

Задача:
Пуля летит горизонтально со скоростью V_0, пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола коробку и вылетает в том же направлении со скоростью втрое меньшей. Масса коробки в пять раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ.

1. Найти скорость коробки сразу после вылета из неё пули.

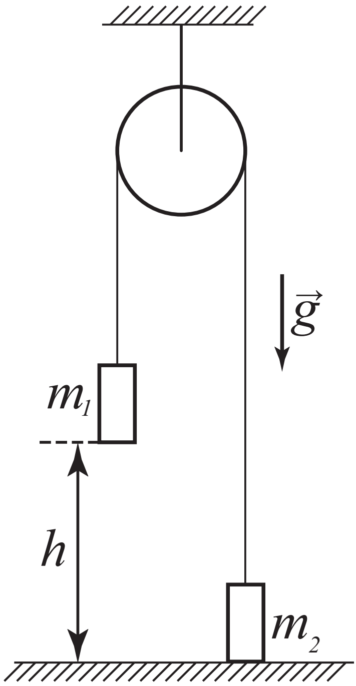
2. На какое расстояние передвинется коробка?

Задача:
По горизонтальной плоскости может скользить без трения гладкая



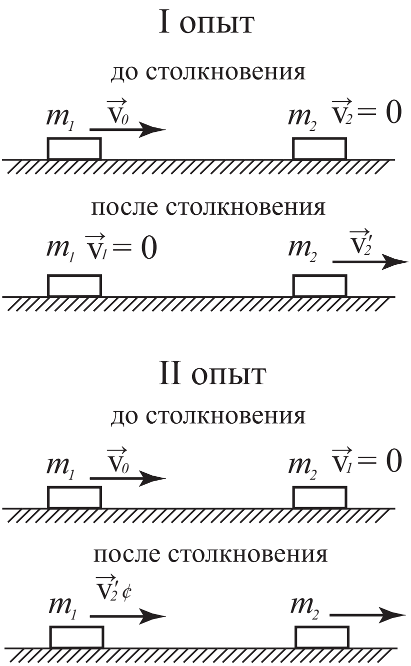
«горка» высоты h и массы m_1. Горка плавно переходит в плоскость. При какой наименьшей скорости горки небольшое тело массы m_2, неподвижно лежащее вначале на её пути, перевалит через вершину?

Задача:



В машине Атвуда массы грузов равны m_1 и m_2, блок и нити невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжелый груз m_1 удерживают на высоте h над горизонтальной плоскостью, а груз m_2 стоит на этой плоскости, причем отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз m_1 после абсолютно неупругого удара о плоскость, ели нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g, блок находится достаточно далеко от грузов.

Задача:

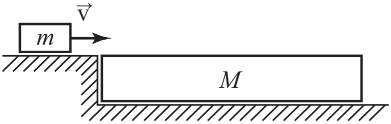


На рисунке показаны два опыта с шайбами. Поверхность стола горизонтальная и абсолютно гладкая. Измерения показали, что $V_2' = V_2''$. Найдите отношение масс шайб.

Задача:
Шарик для игры в настольный теннис радиусом $r = 15$ мм и массой $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ см. Какая энергия перешла в теплоту вследствие трения шарика о воду?

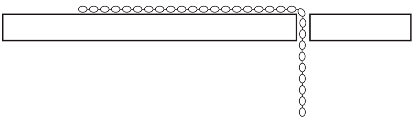
Задача:
Пуля массы m, имеющая начальную скорость V, пробивает подвешенный на нити груз той же массы m и застревает во втором таком же. Найдите выделившееся в первом грузе количество теплоты Q_1, если во втором грузе выделилось количество теплоты Q_2. Временем взаимодействия пули с грузом пренебречь.

Задача:
На горизонтальной гладкой поверхности стола покоится доска массой



M. На доску со скоростью V въезжает шайба массы m. Какой должна быть длина доски, чтобы шайба не соскользнула с неё? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской μ, размер шайбы мал по сравнению с доской.

Задача:

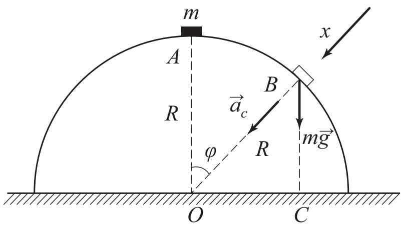


Однородная цепочка длины $2l$ и массы m лежит на абсолютно гладкой доске. Небольшая часть цепочки пропущена в отверстие, сделанное в доске. Лежащий на доске конец цепочки придерживают, а затем в некоторый начальный момент времени отпускают, и цепочка начинает соскальзывать с доски под действием силы тяжести, действующей на свешивающийся конец. Определить скорость движения цепочки в тот момент, когда длина её свешивающейся части будет равна x $(x < l)$.

Глава 14
Разбор типовых ошибок домашнего задания

Примеры

Пример:



С верхней точки закрепленной полусферы соскальзывает без начальной скорости и трения небольшая шайба. В какой точке сферы шайба оторвется от поверхности полусферы?

Решение:

Пусть R – радиус полусферы, m – масса шайбы, а точка B – место отрыва шайбы от поверхности полусферы. Обозначим $\angle AOB$ как φ. Так как трения нет, то выполняется закон сохранения механической энергии (для точек A и B):

$$mgR = mgh + \frac{mV^2}{2},$$

где $AO = R$, $BC = h$, V – скорость шайбы в точке B. Из геометрических соображений следует, что $\angle AOB = \angle OBC = \varphi$, откуда $h = BC = R\cos\varphi$. После подстановки получим:

$$gR(1 - \cos\varphi) = \frac{V^2}{2}.$$

Условие отрыва шайбы от поверхности – равенство нулю силы нормальной реакции опоры. Таким образом, в точке B на шайбу действует только сила тяжести mg. Так как в точке B тело все еще движется по окружности (после данной точки движение по окружности переходит в движение по параболе), то на тело действует центростремительное ускорение, равное $a_c = \frac{V^2}{R}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x, направленную к центру полусферы:

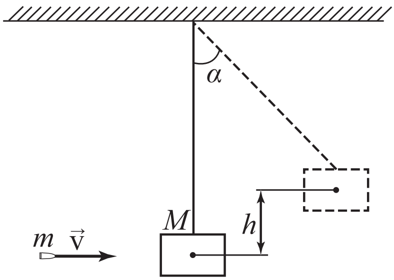
$$mg\cos\varphi = ma_c = m\frac{V^2}{R}.$$

Откуда находим $V^2 = gR\cos\varphi$.

$$\begin{cases} V^2 = gR\cos\varphi \\ \frac{V^2}{2} = gR(1-\cos\varphi) \end{cases}$$

Решая данную систему находим $\cos\varphi = \frac{2}{3}$.

Пример:



Одним из способов определения скорости движения пули является баллистический маятник. Данный маятник представляет собой массивное тело массой M, висящее на нити длиной L, в котором застревает пуля после выстрела. В результате данный маятник отклоняется от вертикали на некоторый угол α.
Пусть масса пули m. Найдите начальную скорость пули V, считая M, m, L и α известными.

Решение:
Пусть u – скорость маятника сразу после того, как пуля врезалась в него. Так как система «пуля-маятник» замкнутая, то полный импульс системы сохраняется:

$$m\vec{V} = (m+M)\vec{u}.$$

После проецирования на горизонтальную ось получаем:

$$u = \frac{mV}{m+M}.$$

После этого запишем закон сохранения механической энергии для маятника:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (M+m)gh,$$

где h – высота, на которую поднялся маятник. Из геометрии находим $h = L(1-\cos\alpha)$. После подстановки получим:

$$\frac{(M+m)(\frac{mV}{M+m})^2}{2} = (M+m)gL(1-\cos\alpha),$$

$$(mV)^2 = 2(M+m)^2 gL(1-\cos\alpha),$$

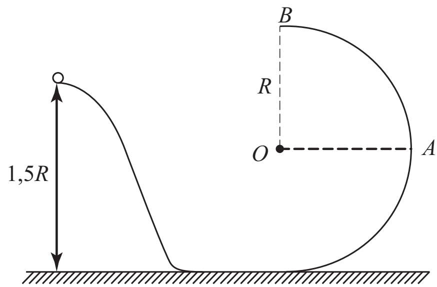
$$V = (\frac{M}{m}+1)\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$

В случае $M \gg m$ ответ можно упростить: $V \approx \frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-cos\alpha)}$.

Замечание:

Так как удар неупругий, то в процессе взаимодействия пули с маятником выделяется тепловая энергия. Поэтому полная механическая энергия не сохраняется, $\frac{mV^2}{2} \neq (M+m)gL(1-\cos\alpha)$, а конечная энергия отличается от начальной на величину выделившегося тепла.

Пример:



С высоты 1,5R отпускают небольшой шарик, сообщив ему начальную скорость V_0. Горизонтальный участок желоба плавно переходит в полуокружность радиуса R. При каком значении скорости V_0 шарик оторвется от желоба в верхней точке желоба? С какой силой он будет давить на желоб в точке A, такой, что отрезок OA параллелен земле?

Решение:

Пусть скорости шарика в точках A и B равны V_A и V_B соответственно. Для нахождения данных скоростей воспользуемся законом сохранения энергии, высоту будем отсчитывать от горизонтального участка.

$$1{,}5mgR + \frac{mV_0^2}{2} = 2mgR + \frac{mV_B^2}{2}.$$

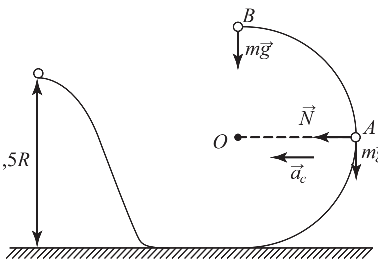
Условие отрыва в точке B – равенство нулю силы реакции опоры. В этой точке на тело действует только сила тяжести mg, а так точки O и B находятся на одной вертикали, то центростремительное ускорение a_c также вертикально. По второму закону Ньютона:

$$mg = ma_c,\ a_c = \frac{V_B^2}{R}.$$

Откуда получаем:

$$1{,}5mgR + \frac{mV_0^2}{2} = 2mgR + \frac{mgR}{2},$$

$$V_0 = \sqrt{2gR}.$$



Теперь, зная начальную скорость V_0, найдем из закона сохранения энергии скорость в точке A:

$$1{,}5mgR + \frac{mV_0^2}{2} = mgR + \frac{mV_A^2}{2},$$

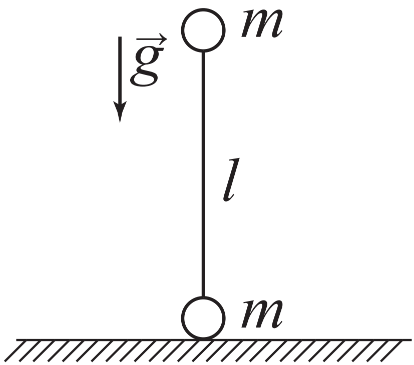
$$V_A = \sqrt{3gR}.$$

Центростремительное ускорение в этой точке направлено горизонтально влево, значит по второму закону Ньютона:

$$ma_c = N, \; a_c = \frac{V_A^2}{R}.$$

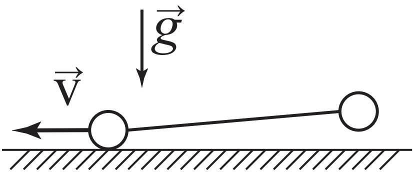
Откуда находим $N = 3mg$.

Пример:



Два одинаковых маленьких шарика массами m, соединенные легким жестким стержнем, расположены вертикально на гладком горизонтальном столе. В результате незначительного толчка система приходит в движение (без начальной скорости). Найти скорости шариков в момент, когда верхний шарик коснется стола. Нижний шарик во время движения не отрывается от стола.

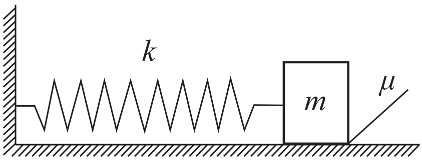
Решение:



Пусть в процессе падения нижний шарик начал смещаться влево. Так как на систему внешние силы не действуют, то суммарный импульс системы сохраняется (и равен нулю). Пусть нижний шарик перед падением верхнего имел скорость V, направленную влево.
Так как они связаны нерастяжимым стержнем, то и скорость второго (в проекции на горизонтальную ось) должна быть равна V.
Но это будет означать, что оба груза одновременно двигаются влево, значит, импульс не сохраняется. Это будет только в случае, когда левый (он же нижний) шарик будет покоиться в момент удара правого (верхнего) о стол, $V = 0$. Это означает, что вся потенциальная энергия системы $\Pi = mgl$ перейдет в кинетическую энергию правого шарика, $mgl = \frac{mu^2}{2}$, откуда находим $u = \sqrt{2gl}$.

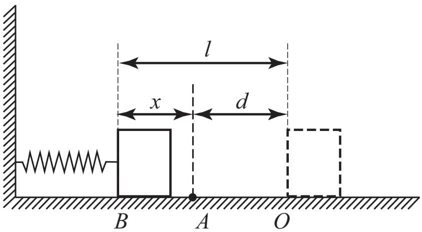
Замечание:
Движение верхнего шарика можно представить как поступательное движение со скоростью $\vec{V}$ нижнего шарика горизонтально и движение по окружности в системе отсчета, связанной с нижним. В момент удара поступательная скорость становится равной нулю, и остается только вращательная, которую мы и нашли в задаче. Также следует отметить, что центр масс – точка, расположенная на середине стержня, будет двигаться вертикально вниз.

Пример:
К одному концу легкой пружины жесткостью $k = 100$ Н/м прикреплен массивный груз, лежащий на горизонтальной плоскости, другой



конец пружины закреплен неподвижно. Коэффициент трения груза по плоскости $\mu = 0{,}2$. Груз смещают по горизонтали, растягивая пружину, затем отпускают с начальной скоростью, равной нулю. Груз движется в одном направлении и затем останавливается в положении, в котором пружина уже сжата. Максимальное растяжение, при котором груз движется таким образом, равно $d = 15$ см. Найдите массу груза.

Решение:
Так как между грузом и плоскостью есть коэффициент трения, отличный от нуля, то на протяжении всего движения на груз действует сила трения F, равная $F = \mu N = \mu mg$ (плоскость горизонтальная). В условии сказано, что груз остановился в положении, в котором пружина уже сжата. Это означает, что сила упругости, возникающая в сжатой



пружине, равна силе трения скольжения. Пусть точка A соответствует положению, в котором пружина не растянута. Тогда величина сжатия пружины в точке B равна x, и

$$\mu mg = kx.$$

За все время движения груз прошел путь l, равный $l = d + x$. Так как в конце пути (в точке B) его скорость равна нулю, то, по закону сохранения энергии, потенциальная энергия растянутой пружины в точке O перешла в работу силы трения и энергию пружины в точке B:

$$\frac{kd^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \mu mg(d + x).$$

Решим данное уравнение, учитывая что $x = \frac{\mu mg}{k}$.

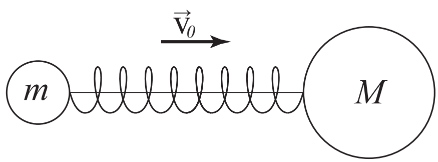
$$\frac{kd^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \mu mg(d + x).$$

$$k(d - x)(d + x) = 2\mu mg(d + x).$$

$$kd - \mu mg = 2\mu mg.$$

$$m = \frac{kd}{3\mu g} = 2{,}5 \text{ кг.}$$

Пример:



Между шариками массой m и M, связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью k, сжатая на некоторую величину. Система шариков движется со скоростью V_0 вдоль прямой, проходящей через центры шариков. Нить пережигают и один из шариков останавливается. Найти начальную величину сжатия пружины A.

Решение:

Для начала определим, какой из шариков остановился. Так как пружина вначале была сжата, то после пережигания нити пружина начнет распрямляться, толкая груз массой m влево (против скорости), а груз массой M – вправо (в направлении скорости). Отсюда становится очевидным тот факт, что остановиться может только груз массой m. Пусть u – установившаяся скорость груза массой M после пережигания нити. Так как система является замкнутой (сила упругости является внутренней силой), то выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$\begin{cases} (m + M)V_0 = Mu \\ \frac{(m+M)V_0^2}{2} + \frac{kA^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} \end{cases}$$

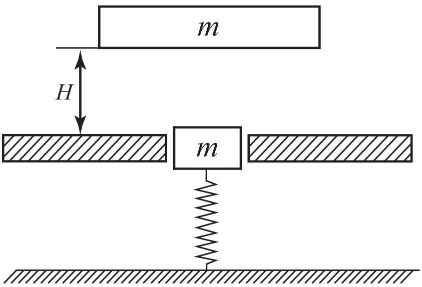
Из первого уравнения находим $u = \frac{(m+M)V_0}{M}$ и подставляем во второе:

$$\frac{(m+M)V_0^2}{2} + \frac{kA^2}{2} = \frac{M(\frac{(m+M)V_0}{M})^2}{2},$$

$$kA^2 = \frac{m(m+M)}{M}V_0^2,$$

$$A = V_0\sqrt{\frac{m(m+M)}{kM}}.$$

Пример:



Брусок массы m покоится на закрепленной снизу пружине жесткостью k. Верхняя поверхность бруска незначительно возвышается над неподвижными массивными боковыми ограничителями. С высоты H на брусок без начальной скорости падает доска массы m. Удары между доской, бруском и ограничителями абсолютно неупругие, но поверхности тел не слипаются. На какую максимальную высоту H над ограничителями сможет подняться доска при последующем движении? Считайте, что $kH \gg mg$.

Решение:

Пусть V – скорость доски перед соударением. Из закона сохранения энергии следует, что $V = \sqrt{2gH}$. Обозначим через u скорость, с которой будут двигаться «брусок+доска» после неупругого соударения. Запишем закон сохранения импульса:

$$mV = 2mu,$$

$$u = \frac{1}{2}V.$$

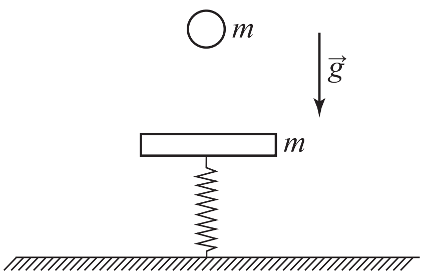
После этого брусок начинает двигаться вниз со скоростью u, а доска, неупруго ударившись о неподвижные упоры, остается лежать на них. Из закона сохранения энергии следует, что брусок, вернувшись в исходное положение, будет иметь такую же скорость u. Обозначим через V' скорость, с которой будут двигаться «брусок+доска» наверх после неупругого удара. Запишем закон сохранения импульса:

$$mu = 2mV',$$

$$V'' = \frac{1}{2}u = \frac{1}{4}V.$$

Поскольку $kH \gg mg$, то можно считать, что после повторного удара доска отрывается от бруска почти сразу. Другими словами, брусок и доска после неупругого удара не слипаются, а,обменявшись скоростями, двигаются независимо – брусок будет совершать колебания на пружине, а доска – двигаться в поле тяжести. Из закона сохранения энергии находим высоту $H' = \frac{V'^2}{2g} = \frac{2gH}{2g{\cdot}16} = \frac{H}{16}$.

Пример:



Легкая пружина жесткостью $k = 2$ Н/м прикреплена одним концом к полу, а другим к бруску массой $m = 0{,}1$ кг . В начальный момент времени пружина не деформирована, а брусок удерживается в таком положении внешними силами. С высоты $h = 0{,}75$ м на брусок падает шар такой же массы m. В момент удара внешние силы, удерживающие брусок, исчезают. Найдите максимальную деформацию пружины после одного абсолютно упругого удара шара о брусок, $g = 10$ м/с^2.

Решение:

К моменту удара о брусок шар будет иметь скорость

$$V = \sqrt{2gh}.$$

После абсолютно упругого удара шара о брусок они, согласно законам сохранения энергии и импульса, обменяются скоростями. Деформация пружины будет максимальной тогда, когда вся кинетическая энергия бруска перейдет в потенциальную энергию сжатой пружины. Пусть A – максимальная деформация пружины. А так как внешние силы не действуют, то груз также опустился на высоту A (потенциальная энергия в поле тяжести уменьшилась). По закону сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{kA^2}{2} - mgA,$$

$$kA^2 - 2mgA - mV^2 = 0,$$

$$kA^2 - 2mgA - 2mgh = 0.$$

Решая данное квадратное уравнение, находим корни:

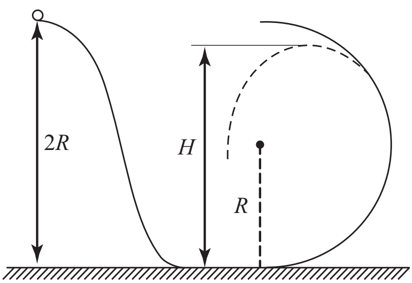
$$A_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k}}.$$

Знак «+» соответствует наинизшему положению бруска при возникших в результате удара колебаниях, знак "−"соответствует его наивысшему положению.

$$A_{1,2} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k}} = 1{,}5 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

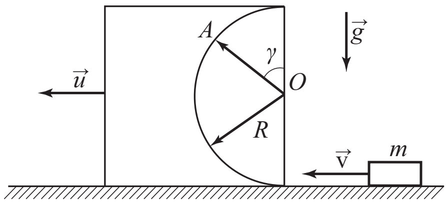
Задача:



Небольшой шарик без начальной скорости соскальзывает с высоты $2R$, двигаясь без трения по желобу, расположенному в вертикальной плоскости. Горизонтальный участок желоба плавно переходит в полуокружность радиуса R = 81 см. Какой максимальной высоты H достигнет шарик после отрыва от желоба?

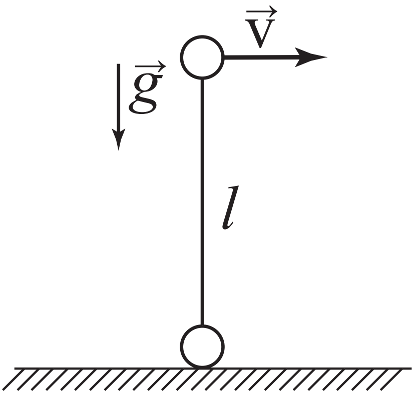
Задача:

По гладкой горизонтальной поверхности стола движется со скоростью u брусок с выемкой в форме полуцилиндра радиусом R. Небольшая по сравнению с размерами бруска монета массой m скользит по столу со скоростью V, догоняет брусок, скользит без трения по поверхности выемки, не отрываясь от неё, и оказывается в точке A, продолжая скользить вверх по выемке. Радиус OA составляет угол $\gamma = 60°$ с вертикалью. Масса бруска намного больше массы монеты.



1. Найдите скорость монеты относительно бруска в точке A.
2. Найдите силу давления монеты на брусок в точке A.

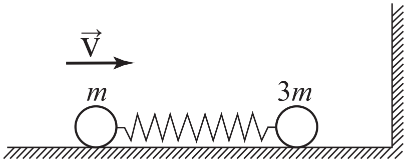
Задача:



На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах. Верхнему шарику ударом сообщили скорость V в горизонтальном направлении. При какой минимальной длине гантельки l нижний шарик сразу оторвется от стола?

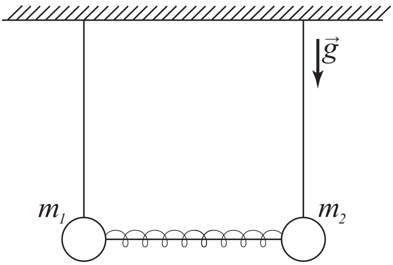
Задача:

Два шарика с известными массами m и $3m$, соединенные невесомой



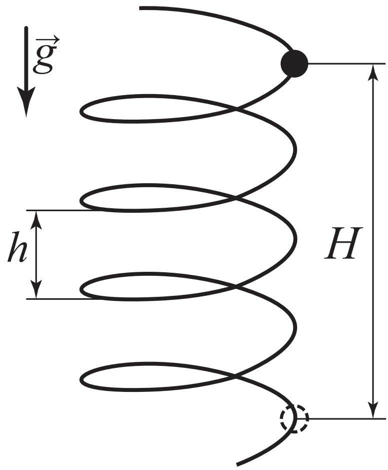
пружиной, движутся со скоростью V по горизонтальной гладкой поверхности к абсолютно упругой стенке; вектор скорости направлен вдоль пружинки. Какого максимального значения достигает потенциальная энергия пружинки после отражения системы от стенки?

Задача:



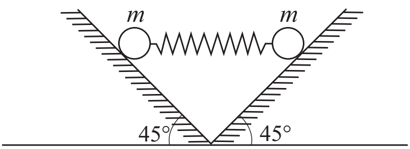
Два шарика массы m_1 и m_2 висят на длинных одинаковых нитях. Между ними находится сжатая пружина, которая удерживается в сжатом состоянии связывающей её нитью. Потенциальная энергия деформации пружины U. Нить, связывающую пружину, пережигают. Найдите максимальную высоту, на которую поднимутся шарики.

Задача:



По вертикально стоящей гладкой спирали скользит бусинка массы m. Радиус петли спирали равен R, шаг спирали (расстояние по вертикали между соседними витками) равен h. С какой силой бусинка действует на спираль в момент, когда она спустилась по вертикали на расстояние H? Начальная скорость бусинки равна нулю.

Задача:



Два груза массы m каждый соединены пружиной жесткости k и находятся на двух клиньях с углами при основаниях $45°$. Клинья зафиксированы на основании; пружина в начальный момент расположена горизонтально и имеет длину $l_0/2$, где l_0 – её длина в свободном состоянии. Известно, что если к пружине подвесить груз массой $8m$, то она растянется вдвое. На какую максимальную высоту подпрыгнет пружина с грузами до первого удара об опору?