Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НР
НАУКА В РЕГИОНЫ

Механика

Методические материалы
по физике
для учащихся 9 класса

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Говорун И. В., Яворский В. А., Беседина А. Н.

А23 Механика: методические материалы по физике для учащихся 9 класса / Говорун И. В., Яворский В. А., Беседина А. Н.. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 141 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии дается обзор приемов и методов, использующихся при решении задач по физике, с примерами решения олимпиадных задач с муниципального и регионального этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Книга предназначается учащимся 9 класса школ с углубленным изучением физики и математики, учителям физики и математики, руководителям кружков и факультативов по физике, а также всем людям, увлекающимся физикой.

Говорун Игорь Викторович, аспирант МФТИ, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Яворский Владислав Антонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Беседина Алина Николаевна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры общей физики МФТИ.

Содержание

Кинематика поступательного движения **6**

Кинематика прямолинейного поступательного движения . . . 6

Кинематика прямолинейного неравномерного движения . . . 7

Движение тел в поле тяжести 9

Задачи с решениями 9

Задачи для самостоятельного решения 16

Динамика поступательного движения **18**

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета, законы Ньютона 18

Основные силы, встречающиеся в задачах 19

Задачи с решениями 20

Задачи для самостоятельного решения 40

Движение по окружности **44**

Кинематика движения по окружности 44

Равномерное движение по окружности 44

Неравномерное движение по окружности 45

Задачи с решениями 45

Задачи для самостоятельного решения 56

Гидродинамика **59**

Закон Бернулли. Уравнение неразрывности 59

Формула Торричелли 62

Задачи с решениями 62

Задачи для самостоятельного решения 70

Закон сохранения импульса 73

Формулировка второго закона Ньютона с использованием понятия импульса 73

Закон сохранения импульса 73

Центр масс 74

Формулировка закона сохранения импульса на основе понятия центра масс 74

Задачи с решениями 75

Задачи для самостоятельного решения 83

Работа и закон сохранения энергии 85

Энергия и её различные виды 85

Закон сохранения механической энергии 86

Общефизический закон сохранения энергии 86

Упругие и неупругие взаимодействия 87

Задачи с решениями 88

Задачи для самостоятельного решения 97

Представление о колебательных процессах 99

Гармонические колебания и их характеристики 99

Основные методы решения задач 101

Задачи с решениями 102

Задачи для самостоятельного решения 109

Статика 112

Сила. Эквивалентность сил. Равнодействующая. Сложение сил. Разложение силы . . . 113
Равновесие материальной точки . . . 115
Равновесие тела при отсутствии вращения . . . 117
Равновесие тела с закрепленной осью вращения в плоском случае. Момент силы . . . 118
Равновесие тела в общем случае . . . 121
Сложение параллельных сил . . . 122
Центр масс. Центр тяжести . . . 123
Задачи с решениями . . . 125
Задачи для самостоятельного решения . . . 139

Кинематика поступательного движения

Кинематика прямолинейного поступательного движения

Механически движением называется изменение положения тел или их частей в пространстве относительно друг друга с течением времени.

Траекторией тела называется линия, вдоль которой движется тело.

Путь, пройденный телом, — это длина его траектории. *Перемещением* $\Delta\vec{r}$ тела мы будем называть вектор, соединяющий начальную и конечную точки движения.

Средняя скорость (путевая) — это величина, равная отношению всего пути, пройденного телом, ко всему времени, которое понадобилось для прохождения этого пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{весь}}}{t_{\text{всё}}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость (или скорость в данной точке) характеризует движение тела в данный момент времени:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Если тело движется с постоянной скоростью v вдоль оси x, то такое движение называется равномерным, а зависимость координаты тела от времени определяется следующей формулой:

$$x(t) = x_0 + v_x t,$$

где x_0 — начальная координата тела (координата тела в момент времени $t = 0$), v_x — проекция скорости тела на ось x.

Графиком равномерного движения в осях $x(t)$ является наклонная прямая, притом угол наклона характеризует величину скорости — чем круче идет прямая, тем больше абсолютная величина скорости.

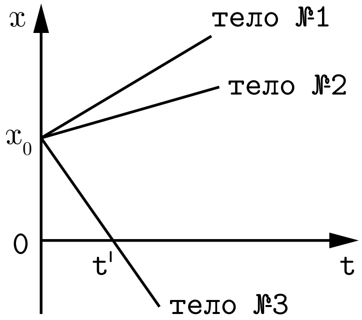


Рис. 1

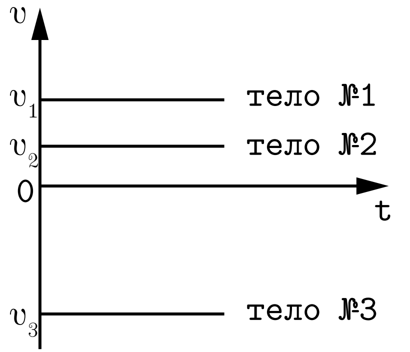


Рис. 2

Также если прямая возрастает, то тело движется в направлении оси x, если же прямая убывает — то против. Пусть три тела одновременно стартовали из точки с координатой x_0 с начальными скоростями v_1, v_2 и v_3. Из графика можно сделать вывод, что тела № 1 и № 2 начали двигаться вдоль оси x, притом скорость тела № 1 больше скорости тела № 2, $v_1 > v_2$ (прямая № 1 идет круче прямой № 2). Тело № 3 поехало против оси x, проекция $v_{3x} < 0$, но так как прямая № 3 идет круче прямой № 1 и № 2, то $v_3 > v_1 > v_2$. Также в момент времени t' тело № 3 пересекло начало координат.

График $v(t)$ будет выглядеть как горизонтальная прямая.

Кинематика прямолинейного неравномерного движения

Если в процессе движения скорость тела меняется, то говорят, что тело двигается с ускорением. Если за промежуток времени Δt скорость тела изменилась на Δv (разница конечной и начальной скоростей), то среднее ускорение за время Δt равно

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{кон}} - v_{\text{нач}}}{\Delta t} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение (или просто ускорение) в точке определяется по формуле, аналогичной мгновенной скорости в точке.

$$a_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Если тело движется с постоянным ускорением вдоль прямой, то такое движение называют прямолинейным равноускоренным (или равнозамедленным). Скорость тела от времени тогда будет следующий вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t,$$

или в проекции на ось x:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

Зависимость координаты от времени при равноускоренном движении имеет вид:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Графиком зависимости равноускоренного движения в осях $x(t)$ является парабола, в осях $v(t)$ — наклонная прямая (чем круче прямая — тем больше ускорение, рассуждения аналогично равномерному движению), а в осях $a(t)$ — горизонтальная прямая.

Пусть тело двигается по закону: $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$, Будем считать, что $x_0 > 0$, $v_{0x} < 0$, $a_x > 0$. Построим графики в осях $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$. Момент времени τ соответствует моменту, когда скорость становится равной нулю, $\tau = \dfrac{|v_{0x}|}{a_x}$.

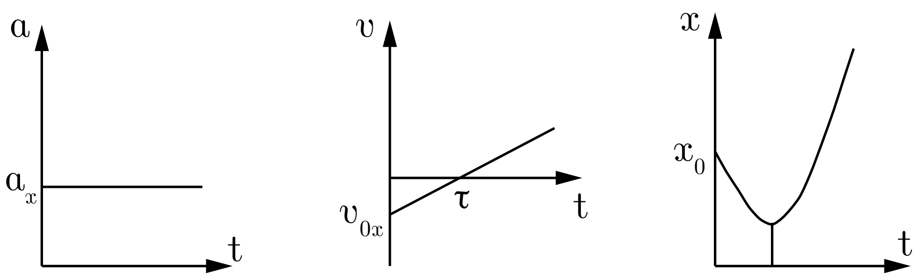


Рис. 3

Движение тел в поле тяжести

При движении тел в поле тяжести (в свободном полете) все тела двигаются с одинаковым ускорением, равным $g = 9{,}81$ м/с^2, направленным вертикально вниз.

Если бросить тело под неким углом к горизонту, то траекторией будет парабола.

Для решения подобных удобно выбрать две оси (чаще всего вертикально и горизонтально), и расписать движение по каждой оси отдельно (более подробно данный прием рассматривается в методическом пособии за 8 класс).

Задачи с решениями

Задача 1. Два одинаковых шарика брошены вертикально вверх из одной точки с одинаковыми начальными скоростями. Второй шарик был брошен через t с после первого шарика. Они встретились в воздухе через T с после броска первого шарика. Определите начальную скорость шариков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Для решения задачи выберем ось y, направив её вертикально вверх, и для данной оси запишем уравнения движения шариков. За начало отсчета выберем момент бросания первого шарика:

$$\begin{cases} t_1(\tau) = v_0\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}, \\ y_2(\tau) = v_0(\tau - t) - \dfrac{g(\tau - t)^2}{2}. \end{cases}$$

В момент времени $\tau = T$ шарики встретились, значит $y_1(T) = y_2(T)$:

$$v_0 T - \frac{gT^2}{2} = v_0(T - t) - \frac{g(T - t)^2}{2}.$$

После группировки получим:

$$v_0 t = \frac{g}{2}(2Tt - t^2),$$

$$v_0 = g\left(T - \frac{t}{2}\right).$$

Ответ: $v_0 = g\left(T - \dfrac{t}{2}\right)$.

Задача 2. Пользуясь графиком зависимости проекции скорости точки от времени (рис. 4), постройте график зависимости её ускорения от времени.

Решение. Заметим, что график состоит из двух наклонных и одной горизонтальной прямой. Так как $a_x = \dfrac{v_{x2} - v_{x1}}{\Delta t}$, то на первом участке проекция ускорения равна $a_1 = \dfrac{-2-2}{2} = -2$ м/с.

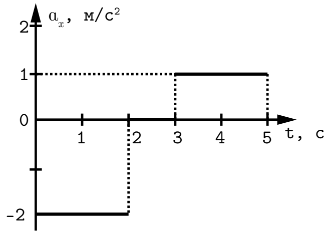


Рис. 4

На втором участке проекция скорости не менялась, значит проекция ускорения равна нулю, $a_2 = 0$. На третьем участке проекция ускорения равна $a_3 = \dfrac{0-(-2)}{2} = 1$ м/с^2.

Зная величину ускорения в каждый момент времени, мы можем построить зависимость $a_x(t)$.

Задача 3[?]. Завод, на котором работает инженер, находится за городом. Каждый раз к приходу поезда на станцию приезжает заводская машина, которая доставляет инженера на место работы. Однажды инженер приехал на станцию на час раньше обычно и, не дожидаясь машины, пошел на завод пешком. По дороге он встретил автомашину и приехал на завод на 10 минут раньше обычного. Сколько времени шел инженер до встречи с заводской автомашиной?

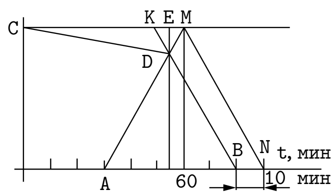


Рис. 5

Решение. Решим задачу графически. Для этого построим графики движения автомашины и инженера в двух случаях. AMN — график обычного движения автомашины (когда она забирает инженера от станции), CD — график движения инженера до встречи с машиной в точке D, DB — график движения машины после встречи инженера.

Так как скорость автомобиля одинакова в обоих случаях, то ΔKDM — равнобедренный, DE — высота, значит $KE = EM = \frac{1}{2}KM = \frac{1}{2}BN =$ $= 5$ мин. Откуда время движения инженера до встречи с автомобилем равно $CE = CM = EM = 55$ мин.

Ответ: 55 мин.

Задача 4[3]. По графику зависимости координаты от времени постройте график зависимости скорости от времени.

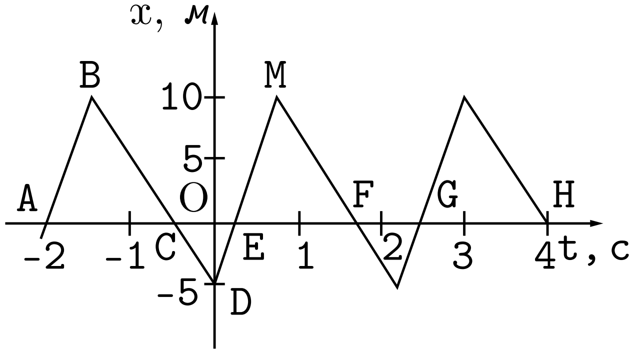


Рис. 6

Решение. Для начала обратим внимание на тот факт, что по рисунку нельзя точно определить, где именно график пересекает ось времени. Но график — периодическая функция. На участке от -2 до 4 секунд график состоит из трех больших треугольников (выше оси t) и двух маленьких (ниже оси t), притом треугольники ΔABC и ΔCDE подобны с коэффициентом подобия 2 (высоты равны 10 и 5 метров, соответственно). Пусть $CD = \tau$, тогда $AC = 2\tau$. Откуда получаем:

$$AH = AC + CE + EF + FG + GH = 8\tau = \text{ с},$$

$$\tau = \frac{3}{4} \text{ с}.$$

Так все участки — наклонные прямые в координатах $x(t)$, а прямые попарно параллельны $AB||DM$, $BD||MF$, и т. д.), то на всех участках $AB, DM, \ldots$ у тела некая скорость v_1, а на участках $BD, MF, \ldots$ — некая скорость v_2.

Так как $AC = 2\tau = 1{,}5$ с, то $CO = 0{,}5$ с.

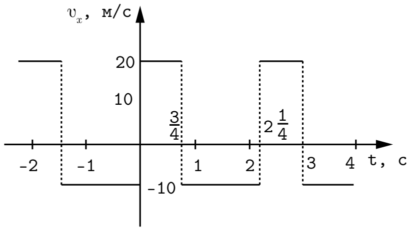


Рис. 7

На участке CD тело прошло путь 5 метров за 0,5 секунды, значит скорость $v_2 = 10$ м/с, а проекция на ось x отрицательна и равна $v_{2x} = -10$ м/с. На участке DE тело также прошло путь 5 метров за $OE = CE - CO = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$ (с), откуда находим $v_1 = 20$ м/с и проекция на ось x положительна и равна $v_{1x} = 20$ м/с.

Зная проекции скоростей, нарисуем график $v(t)$ (рис. 7).

Задача 5[3]. Тело в течение времени t_0 движется с постоянной скоростью v_0. Затем скорость его линейно нарастает со временем так, что в момент времени $2t_0$ она равна $2v_0$. Определите путь, пройденный телом за время $t > t_0$.

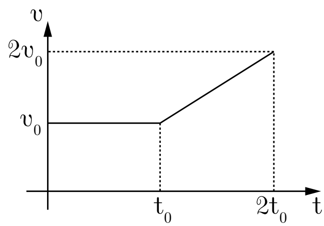


Рис. 8

Решение. Так как пройденный путь равен, то для нахождения необходимо найти площадь под данным участком (площадь заштрихованной фигуры). Из условия ясно, что наклонный участок проходит через центр, значит зависимость скорости от времени носит линейный характер, $v(t) = \alpha t$.

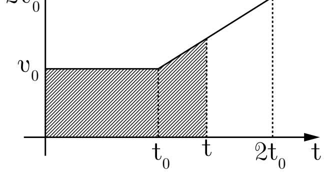


Рис. 9

После подстановки получаем $\alpha = \dfrac{v_0}{t_0}$, $v(t) = \dfrac{v_0}{t_0}t$. Площадь заштрихованной фигуры найдем как площадь прямоугольника и трапеции. Площадь прямоугольника $S_1 = v_0 \cdot t_0$, площадь трапеции $S_2 = \dfrac{v_0 + v(t)}{2}(t - t_0)$. После подстановки получаем:

$$S = S_1 + S_2 = v_0 \cdot t_0 + \frac{v_0 + \frac{v_0}{t_0} t}{2}(t - t_0),$$

$$S = v_0 t_0 + \frac{v_0(t^2 - t_0^2)}{2t_0}.$$

Ответ: $S = v_0 t_0 + \dfrac{v_0(t^2 - t_0^2)}{2t_0}$.

Задача 6[3]. Две частицы в момент времени $t = 0$ вышли из одной точки. По графикам скорости от времени определите координаты и время новой встречи частиц.

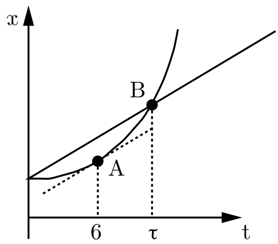


Рис. 10

Решение. Данную задачу можно решить графически — для этого надо построить графики зависимости координаты тел от времени (это будет парабола и прямая) и найти координату пересечения графиков (точка B). В точке A скорости совпадают (момент времени $t = 6$ с), Равенство скоростей определяется как параллельность касательных к графикам в координатах $x(t)$.

Но мы рассмотрим аналитическое решение данной задачи. Для этого запишем основное уравнение кинематики — зависимость координаты тела от времени. Для условности будем считать что тела начали движение из одной точки с координатой $x_0 = 0$. Тогда уравнение движения для первого тела примет вид (для тела, двигающегося с постоянной скоростью $v_0 = 2$ м/с):

$$x_1(t) = x_0 + v_0 t = 2t.$$

Для составления уравнения движения другого тела, сначала, найдем ускорение:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2 \text{ м/с}}{6 \text{ с}} = \frac{1}{3} \text{ м/с}^2.$$

Тогда уравнение движения примет вид:

$$x_2(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{t^2}{6}.$$

Так как по условию задачи тела встретились в момент времени τ, то:

$$x_1(\tau) = x_2(\tau),$$

$$2\tau = \frac{\tau^2}{6},$$

$$\left[\begin{array}{l}\tau = 0\text{ с},\\ \tau = 12\text{с}.\end{array}\right.$$

Откуда получаем время встречи $\tau = 12$ с, координата в момент встречи $x_1(\tau) = x_2(\tau) = 24$ м.

Ответ: $\tau = 12$ с, $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ м.

Задача 7. Из трех труб, расположенных на земле, с одинаковой скоростью бьют струи воды под углами 60°, 45° и 30° к горизонту. Найти отношение высот подъема струи воды, вытекающих из труб, и отношение дальностей падения воды на землю.

Решение. Для максимальной высоты подъема воды воспользуемся формулой максимальной высоты подъема тела, брошенного под углом к горизонту:

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Так как

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то

$$H_{max}(\alpha = 30^\circ) = \frac{v_0^2}{8g}, \quad H_{max}(\alpha = 45^\circ) = \frac{v_0^2}{4g}, \quad H_{max}(\alpha = 60^\circ) = \frac{3v_0^2}{8g},$$

а отношение максимальных высот подъема равно

$$H_{max}(\alpha = 60^\circ) : H_{max}(\alpha = 45^\circ) : H_{max}(\alpha = 30^\circ) = 3 : 2 : 1.$$

Максимальную дальность полета мы будем искать по формуле

$$L_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Так как

$$\sin(2\cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin(2\cdot 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1,$$

$$\sin(2\cdot 60^\circ) = \sin(120^\circ) = \sqrt{\sqrt{3}2},$$

то

$$L_{max}(\alpha = 60^\circ) : L_{max}(\alpha = 45^\circ) : L_{max}(\alpha = 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 8[1]. Космический корабль начинает двигаться прямолинейно с ускорением a, изменяющимся по времени так, как показано на рисунке 11. Через какое время корабль удалится от исходной точки в положительном направлении на максимальное расстояние? Начальная скорость корабля равна нулю.

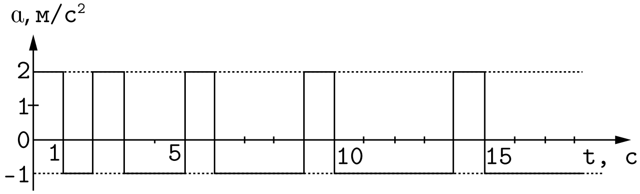


Рис. 11

Решение. По графику зависимости ускорения от времени $a = a(t)$ строим график зависимости скорости от времени $v = v(t)$, площадь под которым численно равна перемещению. Из построенного графика (см. рис. 12) видно, что корабль удалился на максимальное расстояние через 12 секунд после начала движения.

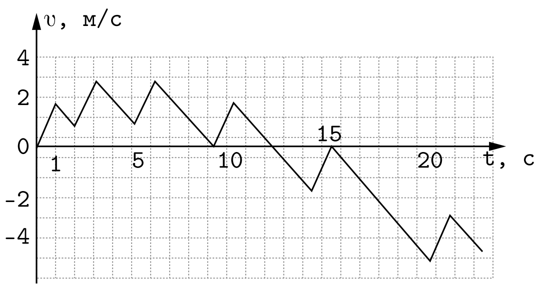


Рис. 12

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9[?]. Трое туристов, обладающих одним велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед может взять лишь двоих, поэтому третьему туристу приходится сначала идти пешком. Велосипедист довозит второго туриста до некоторой точки дороги, откуда тот продолжает движение пешком, и возвращается за третьим. Найдите среднюю скорость туристов, если скорость пешехода $v_1 = 4$ км/ч, а велосипедиста $v_2 = 20$ км/ч (решить задачу графически).

Задача 10[?]. Почтовая связь между речными пристанями M и K осуществляется двумя катерами. В условленное время катера отплывают от своих пристаней от своих пристаней, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если катера отплывают от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из K, тратит на путь в оба конца 3 ч, а катер из M тратит 1,5 ч. Скорости обоих катеров относительно воды одинаковы. На сколько позже катера из K должен отплыть катер из M, чтобы оба находились в пути одно и то же время (решить задачу графически).

Задача 11[3]. По графикам зависимости скорости от времени постройте графики зависимости координаты от времени. Найдите в случаях б) и в) среднюю скорость за большое время.

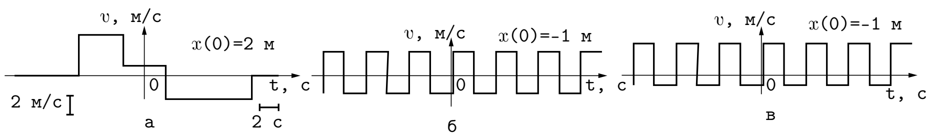


Рис. 13

Задача 12[3]. Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом времени Δt выброшены два шарика со скоростью v. Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

Задача 13[3]. Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом α и β к горизонту с одинаковой скоростью v. На каком расстоянии от отверстия от горизонтали струи пересекутся?

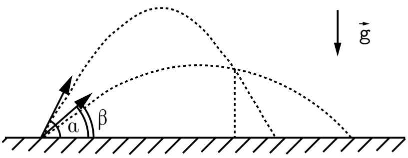


Рис. 14

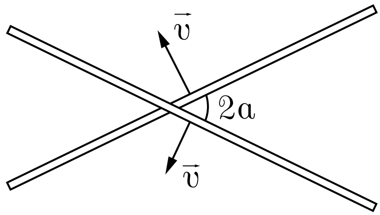


Рис. 15

Задача 14[3]. Два стержня пересекаются под углом 2α и движутся с равными скоростями v перпендикулярно самим себе. Какова скорость точки пересечения стержней?

Задача 15[3]. По графику зависимости ускорения от времени установите скорость в моменты времени 4 и 15 с, если в момент времени 1 с скорость была равна 3 м/с.

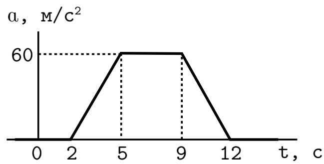


Рис. 16

Динамика поступательного движения

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета, законы Ньютона

Первый закон Ньютона утверждает, что существуют такие системы отсчёта, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое, если на него не действуют другие тела, или действия других тел скомпенсированы.

Второй закон Ньютона утверждает, что в инерциальной системе отсчёта ускорение $\vec{a}$ тела прямо пропорционально равнодействующей $\vec{F}$ всех приложенных к телу сил и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В более удобной записи второй закон Ньютона принимает вид:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Равнодействующая всех сил $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n}$ равна векторной сумме всех сил, действующих на тело. Также следует отметить, что вектора ускорения и равнодействующей всех сил сонаправлены. Это означает, что ускорение направлено в ту же сторону, что и равнодействующая всех сил.

Третий закон Ньютона гласит, что тела, при взаимодействии, действуют друг на друга с силами равными по величине, противоположными по направлению, одинаковыми по природе и лежащие на одной прямой, проходящей через центры тел. Силы не компенсируют друг друга, т. к. приложены к разным (взаимодействующим) телам. Силы всегда появляются парами.

Иными словами, сил $\vec{F}_{AB}$, с которой тело A действует на тело B, равна силе $\vec{F}_{BA}$, с которой тело B действует на тело A. $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

При решении задач необходимо выбрать наблюдателя (систему отсчета), для которого будут записываться все законы. От выбора системы отсчета может зависеть сложность полученных уравнений и, как следствие, сложность решения той или иной задачи.

Системы отсчета можно разделить на инерциальные (двигающиеся с постоянной скоростью или покоящиеся) и неинерциальные (двигающиеся с ускорением). Чаще всего в задачах используются инерциальные системы отчета, покоящиеся относительно поверхности Земли. Но есть ряд задач, где выбор неинерциальной системы отсчета сильно упрощает решение.

Основные силы, встречающиеся в задачах

1. Сила тяжести $\overrightarrow{F}_{\text{тяж}}$ — сила гравитационного притяжения, действующая на любое тело массы m около поверхности Земли. $\overrightarrow{F}_{\text{тяж}} = m\overrightarrow{g}$, где $g = 9{,}81$ м/с^2 ≈ 10 м/с^2. Данная сила всегда направлена вертикально вниз;
2. Вес тела $\overrightarrow{P}$ — сила, с которой тело в выбранной системе отсчета действует на опору или подвес, неподвижный относительно данного тела. Если сила тяжести является результатом взаимодействия тела с Землёй, то вес тела появляется в результате совсем другого взаимодействия — взаимодействия тела и опоры (или подвеса). Поэтому вес обладает особенностями, существенно отличающими его от силы тяжести. В частности, эти силы приложены к разным телам, и, кроме того, вес существенно зависит от ускорения, с которым движутся совместно опора (подвес) и тело;
3. Сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$ — сила, с которой опора действует на поддерживаемое тело;
4. Сила сухого трения (сила трения скольжения) $F_{\text{тр}}$ возникает при движении одного твердого тела вдоль поверхности другого. По закону Кулона–Амонтона :

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения, N — сила реакции опоры. Коэффициент трения зависит от рода соприкасающихся поверхностей и не зависит от площади контакта и величины относительной скорости тел;

Задачи с решениями

Задача 16. С вершины гладкой горки вдоль наклонной плоскости длиной L толкнули со скоростью v_0 брусок. Через некоторое время t_1 он достиг основания горки. Затем тот же брусок пустили со скоростью v_0 вдоль наклонной плоскости длиной $3L$, и он скатился за время t_1. Во сколько раз время t_2 скатывания с этой горки больше времени t_1?

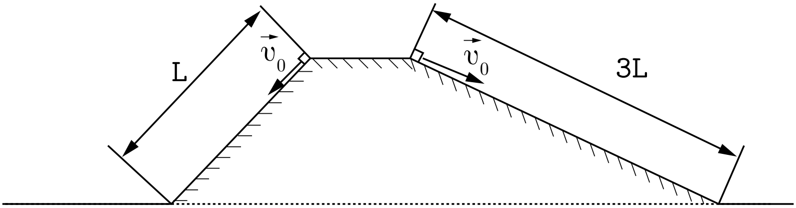


Рис. 17

Решение. Так как трения нет, то согласно закону сохранения механической энергии в обоих случаях скорость бруска у основания горки будет одной и той же. Обозначим её $v_{\text{к}}$. Так как в случае равноускоренного движения $L = \frac{v_{\text{нач}+v_{\text{кон}}}}{2}t$, то:

$$\begin{cases} L = \dfrac{v_0 + v_{\text{к}}}{2}t_1, \\ 3L = \dfrac{v_0 + v_{\text{г}}}{2}t_2. \end{cases}$$

После деления получим: $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{3L}{L} = 3.$

Ответ: $\dfrac{t_2}{t_1} = 3.$

Задача 17. В стакан с жидкостью, имеющей плотность ρ_0, погружены три цилиндрических тела одинакового объема, но разных плотностей ρ, ρ_1 и ρ_2, соединенные системой нитей и блоков (см. рис. 18). Система находится в равновесии, если два верхних цилиндра погружены ровно наполовину. Считая известными ρ_1 и ρ_2, определите ρ_2 и ρ.

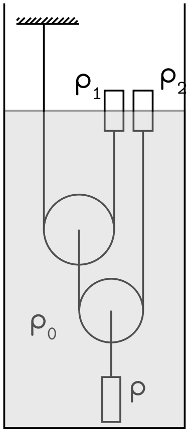


Рис. 18

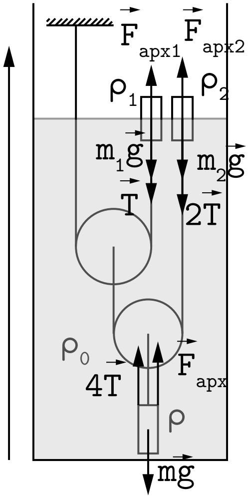


Рис. 19

Решение. Пусть V — объем цилиндра. Расставим силы, действующие на каждое из тел:

$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх1}} = 0, \\ 2\vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх2}} = 0, \\ m\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх}} + 4\vec{T} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{арх}}$ — сила Архимеда, действующая на каждое из тел. Данная сила равна произведению плотности жидкости $\rho_{\text{жидк}}$, в которую погружено тело, ускорения свободного падения и объема погруженной части тела $V_{\text{погр}}$.

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{жидк}} \cdot g \cdot V_{\text{погр}}.$$

После проецирования на вертикальную ось получим:

$$\begin{cases} F_{\text{арх1}} = T + m_1 g, \\ F_{\text{арх2}} = 2T + m_2 g, \\ F_{\text{арх}} + 4T = mg. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\rho_0 gV = T + \rho_1 gV_1, \\ \dfrac{1}{2}\rho_0 gV = 2T + \rho_2 gV, \\ \rho_0 gV + 4T = \rho gV. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2, вычтем из первого второго:

$$\rho_0 gV - \frac{1}{2}\rho_0 gV = 2\rho_1 gV - \rho_2 gV,$$

$$\rho_0 gV = 2(2\rho_1 gV - \rho_2 gV),$$

$$\rho_0 = 4\rho_1 - 2\rho_2.$$

Подставив получившееся соотношение в первое уравнение, найдем T.

$$T = (\rho_1 - \rho_2)gV.$$

После чего подставим все в третье уравнение:

$$(4\rho_1 - 2\rho_2)gV + 4(\rho_1 - \rho_2)gV = \rho gV,$$

$$\rho = 8\rho_1 - 6\rho_2.$$

Ответ: $\rho_0 = 4\rho_1 - 2\rho_2$, $\rho = 8\rho_1 - 6\rho_2$.

Задача 18. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью 20 м/с и ускорением 13 м/с^2. После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Каково ускорение мяча сразу после удара?

Решение. На мяч в воздухе действуют две силы: сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Совместное действие этих сил сообщает мячу ускорение. До удара квадрат модуля ускорения был равен $a_1^2 = g^2 + \left(\dfrac{F_1}{m}\right)^2$, где m — масса мяча. После удара ускорение мяча направлено вниз и равно $a_2 = g + \dfrac{F_2}{m}$. Так как скорость уменьшилась в два раза, то сила сопротивления уменьшилась в 4 раза (так как сила пропорциональна квадрату скорости), $F_1 = 4F_2$. Из первого соотношения находим $F_1 = m\sqrt{a_1^2 - g^2}$, и после подстановки получаем:

$$a_2 = g + \frac{1}{4}\sqrt{a_1^2 - g^2} \approx 12 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_2 \approx 12$ м/с^2.

Задача 19. Игрушечный танк массы m начинает перемещаться с одного конца доски массы M, первоначально покоящейся на горизонтальной поверхности стола, на другой её конец. Если поверхность стола идеально гладкая, то после перемещения танка на правый край доски он смещается на расстояние S_1 относительно стола.

На какое максимальное расстояние S_2 относительно стола он сможет переместиться при наличии трения между доской и поверхностью стола?

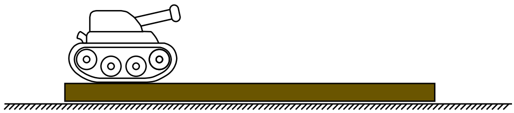


Рис. 20

Танк все время остается на доске и движется только вперед. Считать, что двигатель танка может развивать любую мощность, гусеницы ни при каких условиях не проскальзывают, и он способен мгновенно останавливаться на доске.

Решение. В случае гладкой поверхности стола центр масс системы останется неподвижен. Пусть l — путь танка по доске, S_0 — смещение доски относительно стола, тогда:

$$S_1 m = S_0 M, \qquad S_1 = l - S_0,$$

откуда

$$l = S_1 \frac{M+m}{M}.$$

При наличии трения между доской и поверхностью стола танк должен ехать по доске с таким ускорением a_{max}, при котором доска еще не движется, а на конце доски резко остановиться, чтобы проехать дополнительное расстояние вместе с доской. В этом случае:

$$a_{max} = \frac{F_{\text{тр}}^{max}}{m} = \mu g \frac{M+m}{m},$$

где μ — коэффициент трения между доской и поверхностью стола. Перед резким торможением на конце доски танк будет иметь скорость

$$v = \sqrt{2a_{max}l} = \sqrt{2\mu g \frac{M+m}{m} l}.$$

Согласно закону сохранения импульса, сразу после торможения доска и игрушка начнут совместное скольжение по поверхности стола с начальной скоростью:

$$u = \frac{mv}{M+m} = \frac{m}{M+m}\sqrt{2\mu g \frac{M+m}{m} l} = \sqrt{2\mu g \frac{m}{m+M} l}.$$

В силу закона сохранения энергии вся кинетическая энергия системы перейдет в работу силы трения, при этом до остановки они пройдут путь

$$S = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{2\mu g \frac{m}{M+m} l}{2\mu g} = \frac{m}{M+m} l.$$

Таким образом

$$S_2 = l + S = l + \frac{m}{M+m} l = l\frac{M+2m}{M+m} = S_1 \frac{M+m}{M} \cdot \frac{M+2m}{M+m} =$$

$$= l\frac{M+2m}{M} = l\left(1 + 2\frac{m}{M}\right).$$

Ответ: $S_2 = l\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)$.

Задача 20. Метеорологическая ракета стартует в вертикальном направлении с поверхности Земли. Её топливо сгорает за $\tau = 40$ с полета. В течении этого времени ускорение ракеты возрастает линейно от $a_0 = g$ до $a_\tau = 5g$. Найдите мощность двигателя ракеты перед окончанием его работы. Масса незаправленной ракеты $m_0 = 10$ кг, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Зависимость ускорения ракеты от времени выражается соотношением:

$$a(t) = a_0 + (a_\tau - a_0)\frac{t}{\tau}.$$

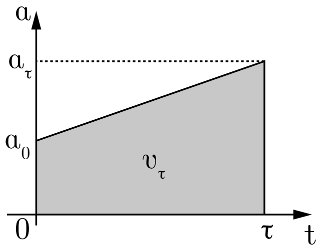


Рис. 21

По аналогии с тем, что пройденному пути соответствует площадь под графиком скорости, находим скорость ракеты v_τ как площадь под графиком $a(t)$:

$$v_\tau = \frac{\tau}{2}(a_0 - a_\tau).$$

По второму закону Ньютона:

$$m_0 a_\tau = F - m_0 g,$$

$$F = m_0 g + m_0 a_\tau,$$

где F — сила тяги в конце полета. Мощность двигателя найдем по формуле $N = F v_\tau$:

$$N = (m_0 g + m_0 a_\tau)\frac{\tau}{2}(a_0 + a_\tau) = \frac{m_0 \tau}{2}(a_0 + a_\tau) \cdot (g + a_\tau) = 720 \text{ кВт.}$$

Ответ: $N = 720$ кВт.

Задача 21. Автомобиль массой $m = 1$ т едет по прямой дороге со скоростью $v = 144$ км/ч. При этом двигатель развивает мощность $N = 32$ кВт. Перпендикулярно дороге дует ветер со скоростью $u = 9$ м/с. Когда водитель пытается прибавить газу, автомобиль сразу начало сносить на обочину, поэтому водитель тут же нажал на тормоз, блокируя все четыре колеса.

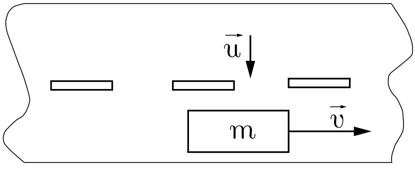


Рис. 22

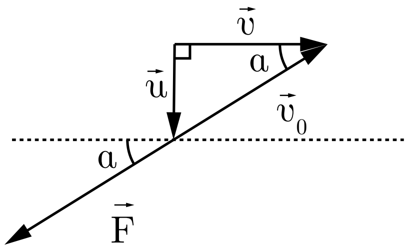


Рис. 23

Найдите ускорение $\vec{a}$ автомобиля в этот момент. Трением в осях при движении автомобиля можно пренебречь.

Решение. Сила $\vec{F}$ сопротивления воздуха, действующая на автомобиль, направлена против скорости автомобиля $\vec{v_0}$ относительно воздуха, то есть $\mathrm{tg} = \frac{u}{v}$. В отсутствие сил трения в осях вся механическая мощность двигателя расходуется на преодоление составляющей $F_{||}$ силы $\vec{F}$ вдоль дороги, то есть $N = F_{||} \cdot v$, откуда:

$$F_{||} = \frac{N}{v}, \qquad F_{\perp} = F_{||} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{Nu}{v^2},$$

где $F_{\perp}$ — составляющая силы $\vec{F}$ поперек дороги. Из того факта, что при небольшом увеличении мощности автомобиль начало сносить не обочину следует, что сила трения колес о дорогу достигла к этому моменту своего максимального значения, после чего началось проскальзывание, откуда:

$$F_{\text{тр}}^{max} = \sqrt{F_{||}^2 + F_{\perp}^2} = \frac{N}{v}\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}.$$

После того как водитель нажал на тормоз, колеса начали проскальзывать, и сила трения оказалась направлена против скорости автомобиля относительно дороги. Из второго закона Ньютона найдем продольную и поперечную составляющие ускорения автомобиля в момент торможения:

$$a_{||} = \frac{F_{||} + F_{\text{тр}}^{max}}{m} = \frac{N}{mv}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}\right) = 1{,}62 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} = \frac{Nu}{mv} = 0{,}18 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_{||} = 1{,}62$ м/с^2, $a_{\perp} = 0{,}18$ м/с^2.

Задача 22. Тяжелая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы. Масса всей цепочки $m = 0{,}2$ кг. Определите силу натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке A, лежащей на половине глубины «провиса» цепочки.

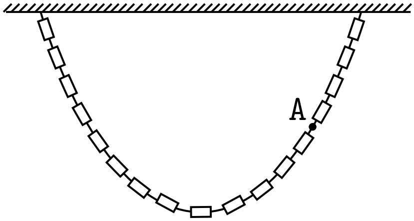


Рис. 24

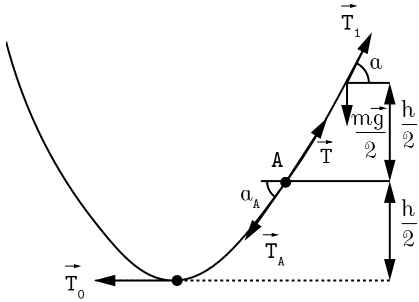


Рис. 25

Решение. По условию цепочка гибкая. Это означает, что сила натяжения в каждой точке направлена по касательной. Рассмотрим правую половину цепочки. Горизонтальная составляющая силы натяжения везде одинакова. Она равна по модулю силе натяжения в нижней части цепочки. Поэтому $T_0 = T_1 \cos\alpha$, но так как $T_1 \sin\alpha = \dfrac{mg}{2}$, то $T_1 = \dfrac{mg}{2\sin\alpha}$.

Определив угол α из рисунка, находим

$$T_1 \approx 1{,}05\ \text{Н}, \qquad T_0 = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha \approx 3\ \text{Н}.$$

Аналогично найдем силу T_A

$$T_A \cos\alpha_A = T_1 \cos\alpha \Rightarrow T_A = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha\frac{1}{\cos\alpha_A} \approx 0{,}65\ \text{Н}.$$

Ответ: $T_0 = 0{,}3$ Н, $T_A = 0{,}65$ Н.

Примечание. Иногда в задачах олимпиадного уровня подразумевается использование рисунка, данного в задаче, для определения геометрических размеров, соотношений или углов.

Задача 23. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинаковые по массе шайбы 1 и 2, расстояние между центрами которых равно R (см. рис. 26). Шайбы соединены друг с другом с помощью тонкой легкой нити. Длина нити $L = 2R$. Нить начали тянуть в горизонтальном направлении с постоянной силой $\vec{F}$. Найдите силу, с которой шайбы будут давить друг на друга, когда их движение установится. Сила $\vec{F}$ приложена в середине нити. Трение можно считать малым.

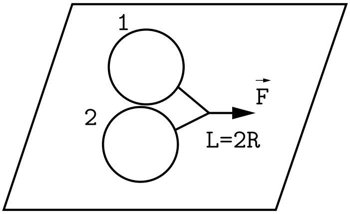


Рис. 26

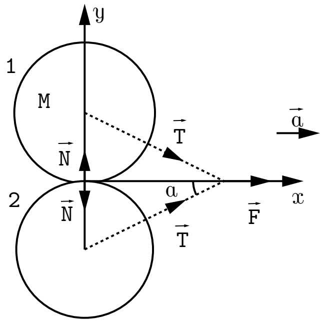


Рис. 27

Решение. Из соображений симметрии следует, что шайбы будут двигаться вдоль биссектрисы угла, образованного половинками нити. Поскольку длина каждой половинки равна R, то из рисунка следует, что $\alpha = 30°$. Ясно, что силы натяжения половинок нити одинаковы. Движение равноускоренное. Ускорение каждой шайбы равно $a = a_1 = a_2 = \dfrac{F}{2M}$, где M — масса каждой шайбы. Напишем уравнение движения одной из шайб (пусть это будет шайба 1) в проекции на оси координат.

$$x:\ T\cos\alpha = Ma \Rightarrow T = \frac{F}{2\cos\alpha},$$
$$y:\ N - T\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = T\sin\alpha.$$

После подстановки получаем $N = \dfrac{F}{2}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{F}{2\sqrt{3}}$.

Ответ: $N = \dfrac{F}{2\sqrt{3}}$.

Задача 24. Из легких нитей и одинаковых блоков массой M каждый собрана полубесконечная система (см. рис. 28). Найдите силу F, которую показывает динамометр Д.

Решение. Одним из основных методов по решению задач на бесконечные и полубесконечные цепи (в том числе и в электричестве) является добавление или удаление одного элемента системы.

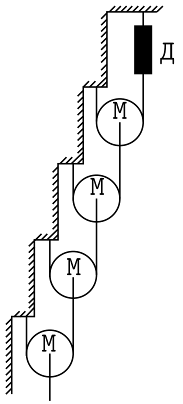


Рис. 28

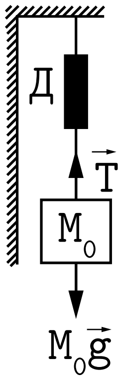


Рис. 29

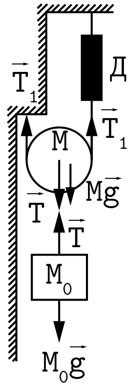


Рис. 30

Так как цепь бесконечная, то удаление или добавление одного элемента в системе не меняет итоговых показаний в схеме. Покажем, как это работает в данном случае.

Заменим эквивалентно все блоки на груз некой массы M_0. Тогда по второму закону Ньютона:

$$T = M_0 g.$$

Так как груз подвешен напрямую к динамометру, то его показания будут равны силе натяжения нити T (см. рис. 29).

Добавим один элемент системы (один блок в нашем случае) перед грузом M_0. Система тогда примет вид, представленный на рисунке 30. Распишем силы, действующие на верхний блок. Вниз действуют его собственная сила тяжести $M\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (со стороны эквивалентного груза M_0), вверх же действуют две силы натяжения нити $\vec{T_1}$. Так как динамометр подвешен к правой нити, то и его показания будут равны T_1. А так как система полубесконечная, то добавление или удаление одного элемента не изменяет показания динамометра, следовательно,

$$T_1 = T.$$

Запишем второй закон Ньютона для блока:

$$\begin{cases} 2T_1 = T + Mg, \\ T_1 = T. \end{cases}$$

Откуда находим $T = Mg$.

Ответ: $T = Mg$.

Примечание. Данную задачу можно решить и чисто математически. Если убрать все блоки, кроме первого, то показания динамометра $T_1 = \frac{1}{2}Mg$. После добавления одного блока, показания динамометра $T_2 = \frac{1}{2}Mg + \frac{1}{4}Mg$. Тогда, переходя к бесконечной цепи, показания динамометра будут равны

$$T_\infty = \frac{1}{2}Mg + \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{8}Mg + \dots + \frac{1}{2n}Mg + \dots =$$

$$= Mg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots\right) = Mg\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n},$$

сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ равна единице (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). В результате получается тот же результат $T_\infty = Mg$.

Задача 25. В вертикально расположенных цилиндрах, площади сечений которых S_1 и S_2, находятся два невесомых поршня, соединенных невесомой пружиной жесткостью k. Пространство между поршнями заполнено водой. Нижний поршень (площадью S) в начальном состоянии поддерживается так, что пружина не напряжена, её длина при этом равна l_0.

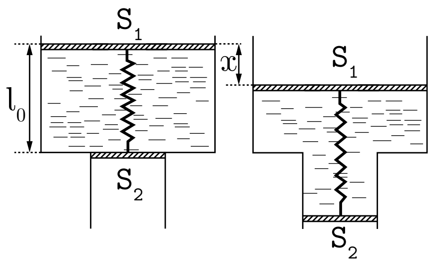


Рис. 31

Затем поршень площади S_2 отпускают, и оба поршня опускаются. На какое расстояние сместится поршень площадью S_1? Оба цилиндра сообщаются с атмосферой.

Решение. Так как поршни находятся в равновесии, то сумма сил, действующая на каждый поршень равна нулю. На верхний поршень действует сила атмосферного давления p_0S_1, направленная вниз, сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$, направленная также вниз, а также сила давления со стороны воды pS_1, направленная вертикально вверх:

$$p_0S_1 + F_{\text{упр}} = pS_1.$$

Для второго поршня сила атмосферного давления pS_2 направлена наверх, сила упругости $F_{\text{упр}}$ также направлена наверх; кроме этого на поршень давит вода, с силой равной $(p+\rho gl)S_2$, где l — расстояние между поршнями в установившемся режиме (это расстояние равно длине деформированной пружины):

$$p_0S_2 + F_{\text{упр}} = (p + \rho gl)S_2.$$

Выразив $p = p_0 + \dfrac{F_{\text{упр}}}{S_1}$ из первого уравнения и подставив во второе, получаем:

$$p_0S_2 + F_{\text{упр}} = \left(p_0 + \frac{F_{\text{упр}}}{S_1} + \rho gl\right)S_2.$$

После раскрытия скобок получаем

$$F_{\text{упр}} - F_{\text{упр}}\frac{S_2}{S_1} = \rho glS_2,$$

$$F_{\text{упр}} = \frac{\rho glS_1S_2}{S_1 - S_2}.$$

Так как по закону Гука $F_{\text{упр}} = k(l - l_0)$, то

$$k(l - l_0) = \frac{\rho glS_1S_2}{S_1 - S_2},$$

$$kl(S_1 - S_2) - kl_0(S_1 - S_2) = \rho glS_1S_2,$$

$$(k(S_1 - S_2) - \rho gS_1S_2)l = kl_0(S_1 - S_2),$$

$$l = \frac{k(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) - \rho gS_1S_2}l_0.$$

Таким образом, удлинение пружины

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{\rho g S_1 S_2}{k(S_1 - S_2) - \rho g S_1 S_2} l_0.$$

Пусть нижний поршень сместился на величину y. Тогда весь объем воды $V = x \cdot S_1$, который вытесняется верхним поршнем, попадает в сужение трубы, сдвигая нижний поршень,

$$x \cdot S_1 = y \cdot S_2 \Rightarrow y = x\frac{S_1}{S_2}.$$

Удлинение пружины связано с перемещениями поршней соотношением $\Delta l = y - x = x\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right) = x\frac{S_1 - S_2}{S_2}$. После подстановки получаем:

$$x = \frac{\Delta l \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\rho g S_1 S_2^2}{k(S_1 - S_2)^2 - \rho g S_1 S_2 (S_1 - S_2)} l_0.$$

Ответ: $x = \dfrac{\rho g S_1 S_2^2}{k(S_1 - S_2)^2 - \rho g S_1 S_2 (S_1 - S_2)} l_0.$

Задача 26. Оцените (численно) максимальную скорость, которую может развить парашютист в затяжном прыжке (до раскрытия парашюта). Известно, что сила сопротивления воздуха F, действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v, характерного размера a и плотности воздуха ρ, $F = \alpha \rho^m a^n v^k$, где α — безразмерный множитель порядка единицы, m, n, k — некоторые числа. Принять плотность воздуха $\rho = 1$ кг/м^3, размер $a = 0{,}5$ м.

Решение. Один из приемов, позволяющий качественно оценивать ответ, является метод размерностей. В физике практически все величины имеют размерность, и арифметические операции сложения и вычитания можно производить только с величинами, имеющими одинаковую размерность — силы складывать с силами, массы — с массами, и т. д. При умножении или делении величин также следует обращать внимание на размерности (например, при умножении ньютона на метр получаем джоуль). Следует отметить, что с помощью данного часто можно назвать ответ с точностью до числового коэффициента. С помощью данного метода можно находить грубые ошибки в решении, для этого достаточно посмотреть на размерности величин, которые входят в ответ — размерности ответов должны совпадать.

Решим данную задачу методом размерностей. Так как сила измеряется в ньютонах, плотность в кг/м^3, скорость — в м/с, а характерный размер — в метрах, то получаем:

$$\text{Н} = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^m \cdot (\text{м})^n \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^k.$$

Так как сила — произведение массы на ускорение, то $\text{Н} = \text{кг} \cdot \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Откуда получаем:

$$\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^m \cdot (\text{м})^n \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^k,$$

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \frac{1}{\text{с}^2} = (\text{кг})^m \cdot (\text{м})^{n+k-3m} \cdot \left(\frac{1}{\text{с}}\right)^k.$$

Из последнего уравнения следует, что $m = 1$, $n = 2$, $k = 2$. Значит, сила сопротивления воздуха F равна:

$$F = \alpha \rho a^2 v^2.$$

Так как парашютист двигается равномерно, то $F = Mg$, $Mg = \alpha\rho a^2 v^2$. Подставляя значения $M \approx 70$ кг, $\rho = 1$ кг/м^3, $a = 0{,}5$ м, $\alpha \approx 1$, $g \approx$ ≈ 10 м/с^2, получаем $v^2 \approx 2800$ (м/с)^2, $v \approx 50 - 60$ м/с.

Ответ: $v \approx 50 - 60$ м/с.

Задача 27. В планете, имеющей форму шара, пробурили сквозной тоннель, проходящий через её центр. В тоннель сбросили небольшое тело массой $m = 1$ кг. Определите зависимость ускорения тела от расстояния до центра планеты. Радиус планеты $R = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности равно $g = 10$ м/с^2.

Решение. Перед тем, как приступить к решению задачи найдем силу, действующую на небольшое тело, помещенное внутрь сферы, со стороны данной сферы.

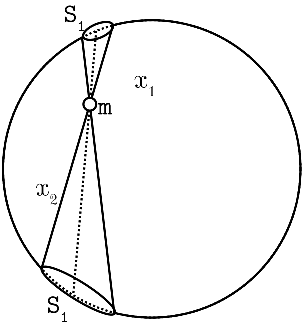


Рис. 32

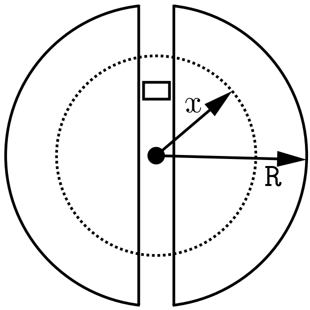


Рис. 33

Пусть небольшое тело массы m помещено внутрь сферы, массой M и радиусом R (см. рис. 32). Рассмотрим силы гравитационного притяжения, действующие на грузик со стороны небольших участков сферы площадями S_1 и S_2. Предполагая сферу однородной, найдем массы участков: $m_1 = M\dfrac{S_1}{4\pi R^2}$ и $m_2 = M\dfrac{S_2}{4\pi R^2}$. Пусть расстояния до центров этих участков (а в силу их малости, будем считать данные участки точечными) равны x_1 до участка площадью S_1, и x_2 до участка площадью S_2. Тогда силы гравитационного притяжения равны $F_1 = \gamma\dfrac{mm_1}{x_1^2}$ и $F_2 = \gamma\dfrac{mm_2}{x_2^2}$. Найдем отношение $\dfrac{F_1}{F_2}$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{M\frac{S_1}{4\pi R^2}}{M\frac{S_2}{4\pi R^2}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2.$$

Из геометрических соображений (отношение квадратов высот данных конусов равно отношению площадей их оснований) следует, что $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 = \dfrac{S_2}{S_1}$, значит $\dfrac{F_1}{F_2} = 1 \Rightarrow F_1 = F_2$. Из чего можно сделать вывод, что тело, помещенное в любую точку сферы не притягивается к ней. Перейдем теперь к решению задачи.

Пусть тело, падая к центру планеты, находится на расстоянии $x < R$ от центра планеты (см. рис. 33). Ранее нами было доказано, что внешняя часть планеты, оставшаяся «снаружи» падающего тела не притягивает его. Значит, притяжение оказывает только та часть планеты, которая осталась «внутри» — в нашем случае это шар радиуса x. Масса этой части планеты равна $M(x) = \rho V(x) = \dfrac{4}{3}\pi x^3\rho$, где ρ — средняя плотность планеты, $\rho = \dfrac{3M}{4\pi R^2}$, M — масса всей планеты. На тело массой m действует сила притяжения $F(x)$, зависящая от глубины погружения:

$$F(x) = \gamma\frac{mM(x)}{x^2}.$$

После подстановки получаем:

$$F(x) = \gamma\frac{m\frac{4}{3}\pi x^3\rho}{x^2} = \gamma\frac{m\frac{4}{3}\pi x^3\frac{3M}{4\pi R^3}}{x^2} = \gamma\frac{mM}{R^3}x.$$

Так как ускорение свободного падения g на поверхности равно $g = \gamma\dfrac{M}{R^2}$, то

$$F(x) = mg\frac{x}{R}.$$

Ускорение тела на равно $a(x) = g\dfrac{x}{R}$. Сила (как и ускорение), действующая на тело, линейно зависит от расстояния до центра планеты.

Задача 28. Плотность вещества некоторой планеты, имеющей форму шара радиуса $R = 6400$ км, зависит только от расстояния до центра планеты. При бурении скважины глубиной несколько десятков километров обнаружилось, что ускорение свободного падения не зависит от глубины погружения под поверхность планеты. Найдите плотность вещества, из которого состоит поверхность планеты, если средняя плотность планеты, равная отношению её массы к объему, равна $\rho = 5{,}5$ г/см^3.

Решение. Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра планеты равно $g(r) = \gamma\dfrac{M(r)}{r^2}$, где $M(r)$ — масса вещества, находящаяся внутри сфера радиуса с центром, совпадающим с центром планеты. Введем буквенное обозначение $\Delta R = R - r$. В этом случае:

$$M(R) = M, \qquad\qquad M(R-\Delta R) \approx M - 4\pi R^2\Delta R\rho_{\text{пов}},$$

где $\rho_{\text{пов}}$ — плотность вещества, из которого состоит поверхность планеты, $4\pi R^2 \Delta R \rho_{\text{пов}}$ — масса оболочки планеты небольшой толщины ΔR.

$$\frac{M - 4\pi R^2 \Delta R \rho_{\text{пов}}}{(R - \Delta R)^2} \approx \frac{M}{R^2},$$

$$MR^2 - 4\pi R^4 \Delta R \rho_{\text{пов}} \approx MR^2 - 2MR\Delta R + M(\Delta R)^2.$$

Пренебрегая последним слагаемым (в силу его малости) в правой части и учитывая, что объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, находим

$$2\pi R^3 \rho_{\text{пов}} = M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{ср}},$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — средняя плотность вещества, из которого состоит планета. Отсюда $\rho_{\text{пов}} = \frac{2}{3}\rho_{\text{ср}} = 3{,}7$ г/см^3.

Задача 29. Для снабжения полярной экспедиции несколько связанных между собой небольших мешков с грузом сбрасывают на парашюте с самолета. На улице стоит безветренная погода. Установившаяся скорость падения мешков оказалась равной $v_1 = 6$ м/с. Один из мешков оторвался от связки, а у парашюта с оставшимся грузом постепенно установилась новая скорость падения $v_2 = 4$ м/с. За какое время t после отрыва мешка скорость парашюта уменьшилась на $\Delta v = 10$ м/с. Силу сопротивления воздуха считайте пропорциональной скорости парашюта.

Решение. Пусть сила сопротивления воздуха $F = \alpha v$. Найдем отношение k массы оторвавшегося мешка к полной массе грузов. По второму закону Ньютона, если скорость тела не меняется, то сумма приложенных к нему сил равна нулю:

$$\begin{cases} Mg = \alpha v_1, \\ (1-k)Mg = \alpha v_2. \end{cases}$$

откуда $1 - k = \frac{v_2}{v_1}$, $k = 1 - \frac{v_2}{v_1}$.

Поскольку изменение скорости $\Delta v << v_1$, то можем считать силу сопротивления воздуха постоянной. Запишем второй закон Ньютона для момента сразу после отрыва мешка:

$$(1-k)Ma = -\alpha v_1 + (1-k)Mg,$$

откуда $\alpha = \dfrac{(1-k)Mg - \alpha v_1}{(1-k)M} = \left(1 - \dfrac{v_1}{v_2}\right) g$. Тогда время, за которое скорость связки уменьшится на величину Δv, будет равно

$$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2}{v_1 - v_2} \cdot \frac{\Delta v}{g} = 0{,}02 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 0{,}02$, с.

Задача 30. Тонкая U–образная трубка, размеры которой указаны на рисунке, заполнена ртутью до половины вертикальных колен. Трубка движется горизонтально с ускорением a. Найти разность высот Δh ртути в вертикальных частях трубки и давление в точке A. Атмосферное давление равно p_0, плотность ртути ρ.

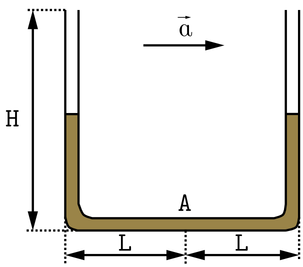


Рис. 34

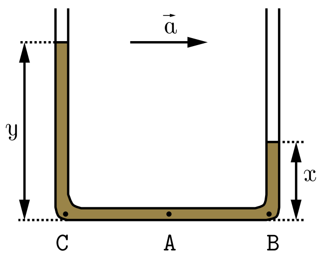


Рис. 35

Решение. После того, как трубка придет в движение, уровни ртути в свободных коленах перестанут быть равными. Пусть высота уровня ртути в правом колене равна x, а в левом — y. Давление в точке B равно $p_B = p_0 + \rho g x$, а в точке C равно $p_C = p_0 + \rho g y$. Так как ртуть из трубки не выливается, то $x + y = \dfrac{H}{2} + \dfrac{H}{2} = H$.

Рассмотрим горизонтальный участок трубки BC. Данный участок движется равноускоренно с ускорением $\vec{a}$ под действием сил давления ртути справа и слева. Пусть S — площадь сечения трубки. Тогда справа на него действует сила $F_B = p_B S$, а слева — $F_C = p_C S$, масса горизонтального участка равна $m = \rho V = \rho 2LS$. Запишем второй закон Ньютона для горизонтального участка:

$$F_C - F_B = ma,$$

$$p_C S - p_B S = 2\rho LSa,$$

$$p_0 + \rho g y - (p_0 + \rho g x) = 2\rho LSa,$$

$$(y - x)g = 2La.$$

Откуда разность высот $\Delta h = y - x = 2L\frac{a}{g}$.

Для ответа на второй вопрос, рассмотри участок трубки AC. Данный участок также движется с ускорением $\vec{a}$. По второму закону Ньютона для участка AC:

$$p_C S - p_A S = \rho LSa.$$

Откуда находим p_A:

$$p_A = p_C - \rho La = p_C = p_0 + \rho g y - \rho La.$$

Для нахождения y решим систему:

$$\begin{cases} x + y = H, \\ y - x = 2L\frac{a}{g}. \end{cases} \Rightarrow y = \frac{H}{2} + \frac{a}{g}L,$$

$$p_A = p_0 + \rho g\left(\frac{H}{2} + \frac{a}{g}L\right) - \rho La = p_0 + \rho g\frac{H}{2}.$$

Ответ: $\Delta h = 2L\frac{a}{g}$, $p_A = p_0 + \rho g\frac{H}{2}$.

Задача 31. Тело B удерживается неподвижно в воздушном потоке, движущемся со скоростью $\vec{u}$. В некоторый момент тело отпускают без начальной скорости. Траектория его движения изображена на рисунке. В установившемся режиме тело падает под углом β к горизонту.

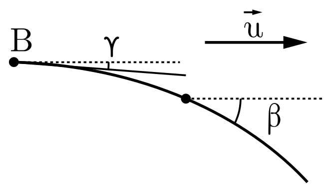


Рис. 36

Под каким углом к горизонту тело начнет двигаться? Сила сопротивления воздуха, действующая на тело, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха и направлена противоположна ей.

Решение. По условию $F_{\text{сопр}} = \alpha v_{\text{отн}}^2$, где α — коэффициент пропорциональности. Рассмотрим проекции сил, действующих на ось OX. По горизонтали на тело действует только сила сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}_x} = ma_x$.

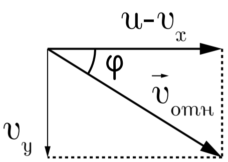


Рис. 37

Так как по теореме Пифагора $v_{\text{отн}} = \sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}$, то проекция силы сопротивления воздуха на горизонтальную ось OX равна:

$$F_{\text{сопр}_x} = \alpha\left(\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}\right)^2 \cos\varphi.$$

Косинус угла φ определим из треугольника $\cos\varphi = \dfrac{u-v_x}{\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}}$.

После подстановки получим:

$$F_{\text{сопр}_x} = \alpha(u-v_x)\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}.$$

Аналогично найдем $F_{\text{сопр}_y} = \alpha v_y\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}$.

По второму закону Ньютона в проекции на горизонтальную ось OX и вертикальную ось OY

$$\begin{cases} \alpha(u-v_x)\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2} = ma_x, \\ mg - \alpha v_y\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2} = ma_y. \end{cases}$$

Откуда выражаем проекции ускорений

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\alpha}{m}(u-v_x)\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}, \\ a_y = g - \dfrac{\alpha}{m}v_y\sqrt{(u-v_x)^2 + v_y^2}. \end{cases}$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения. При малых временах полета тела можно считать, что $v_x << u$, $v_y << u$, $\alpha v_y^2 <<$ $<< mg$ и движение тела происходит с постоянным ускорением.

Для малого промежутка времени Δt координаты тела $x \approx \dfrac{\alpha u^2 \Delta t^2}{2m}$, $y \approx \dfrac{g \Delta t^2}{2}$, то есть

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y}{x} = \frac{mg}{\alpha u^2}.$$

В установившемся режиме $v_x = u$, $\alpha v_y^2 = mg$, то есть $v_y = \sqrt{\dfrac{mg}{\alpha}}$. В таком случае

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha u^2}}.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta$.

Ответ: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{mg}{\alpha u^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 32. Брусок и тележка с равными массами связаны легкой нитью и удерживаются неподвижно за брусок на наклонной плоскости с известным углом наклона α, $\operatorname{tg}\alpha = 3/7$ (см. рис. 38). Брусок отпускают. Система приходит в движение, и сила натяжения нити уменьшается в 3 раза. Найдите коэффициент трения скольжения бруска о наклонную плоскость. Нить параллельна наклонной плоскости.

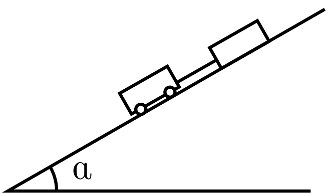


Рис. 38

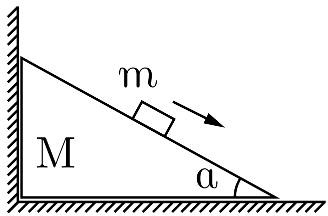


Рис. 39

Задача 33. Призма массой M находится на горизонтальной поверхности гладкого стола и упирается в гладкую стенку (см. рис. 39). На поверхность призмы, наклоненную под углом α к горизонту, положили брусок массой m и отпустили. Брусок стал соскальзывать. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой μ. Найти силу давления призмы на стол.

Задача 34[3]. На гладком горизонтальном столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 40.

Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой $\vec{F}$, как указано на рисунке. Коэффициент трения между грузами массы m_1 и m_2 равен μ. Найдите ускорение всех грузов системы.

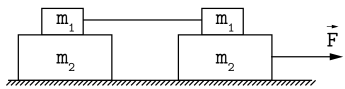


Рис. 40

Задача 35[3]. Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке. Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно T_1 и T_2, а вертикальных — T_3 и T_4. С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?

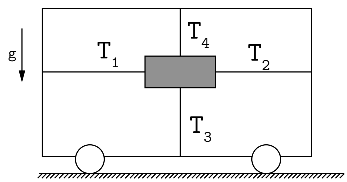


Рис. 41

Задача 36[3]. Два тела массы m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T.

К телам приложены силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$, где α — постоянный коэффициент, t — время действия силы. Определите, в какой момент времени нить порвется.

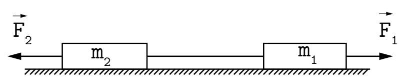


Рис. 42

Задача 37. Решите задачу **23**, рассмотрев случай, когда масса одной шайбы в два раза больше массы другой шайбы.

Задача 38. Система из двух одинаковых тел, соединенных легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, покоится на горизонтальной поверхности.

Если к свободному концу приложить некую силу F, то он начнет движение с ускорением $a = 1$ м/с^2. Какие ускорения a_1 и a_2 при этом будут иметь тела, если коэффициент трения между ними и поверхностью $\mu = 0{,}2$.

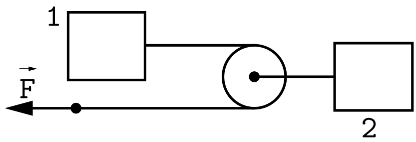


Рис. 43

Массой блока и трением в его оси можно пренебречь.

Задача 39. По свисающим концам легкой нерастяжимой нити, перекинутой через систему блоков, скользят кольца, массы которых m и $2m$ (см. рис. 44). Определите ускорения колец, если известно, что подвижный блок к прикрепленному к нему грузом $2m$ покоится.

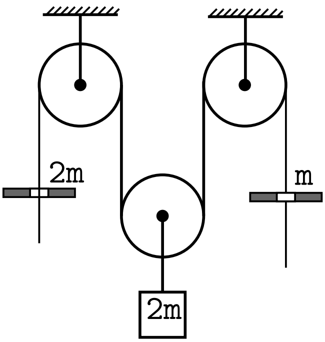


Рис. 44

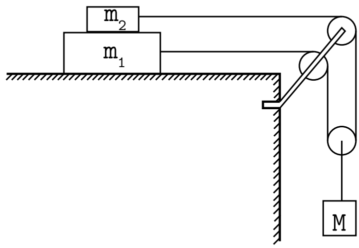


Рис. 45

Задача 40. На горизонтальной плоскости лежит брусок массой m_1 и на нем — другой брусок массой m_2. Через систему блоков, изображенную на рисунке, перекинута нить. К подвижному блоку подвешен груз массой $M = m_1 + m_2$ (см. рис. 45). При каком соотношении между массами m_1 и m_2, бруски не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между брусками равен μ, а коэффициент трения нижнего бруска о плоскость равен нулю. Нить считать невесомой и нерастяжимой, массой блоков и трением в них пренебречь.

Задача 41. «Тройник» с двумя открытыми в атмосферу вертикальными трубками и одной закрытой горизонтальной, полностью заполнен водой. После того как «тройник» стали двигать по горизонтали (в плоскости рисунка направо) с некоторым ускорением, из «тройника» вылилось 1/8 массы всей содержавшейся в нем воды.

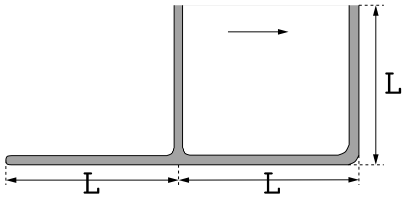


Рис. 46

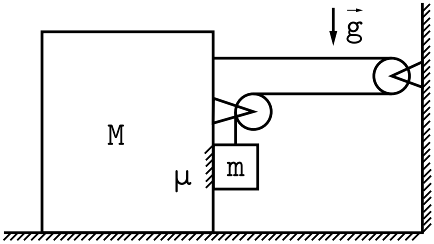


Рис. 47

Чему при этом равно давление P в жидкости у закрытого конца (точка O) горизонтальной трубки? Внутреннее сечение всех трубок одинаково, длина трубок равна L.

Задача 42. В системе, изображенной на рисунке 47, тело массой M может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телами M и m равен μ. Найдите ускорение a тела M. Массой блоков и нерастяжимой нити пренебречь. Ускорение свободного падения g.

Задача 43. На гладком горизонтальном полу находится клин массой M с углом наклона α при основании. На поверхности клина расположен брусок массой m, привязанный легкой нитью к стене. Нить перекинута через невесомый блок, укрепленный на вершине клина. Отрезок нити AB параллелен горизонтальной поверхности пола.

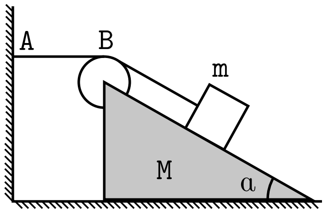


Рис. 48

Вначале систему удерживают, а затем отпускают, и брусок начинает скользить по наклонной поверхности клина. Силы трения отсутствуют. Найдите ускорение клина в этом случае. Полагая α заданным, найдите при каком отношении масс клина и бруска такое скольжение возможно.

Движение по окружности

Кинематика движения по окружности

Угловой скоростью ω называется величина, показывающая, на какой угол $\Delta\varphi$ повернулось тело за промежуток времени Δt

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

в качестве единицы измерения угловой скорости указывают 1 /с (обратную секунду, $с^{-1}$).

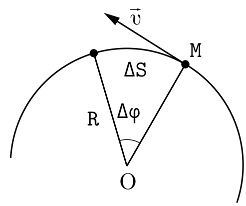


Рис. 49

Время, за которое тело совершает полный оборот, называется периодом обращения (или просто периодом) и часто обозначается T. В этом случае тело повернулось на угол, равный $\Delta\varphi = 2\pi$, тогда

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}.$$

Линейной скоростью v называется отношение длины дуги ΔS ко времени Δt

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Если точка M совершила полный оборот, то она прошла путь, равный $\Delta S = 2\pi R$ (длина окружности). Тогда

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T} R = \omega R.$$

Равномерное движение по окружности

Рассмотрим случай равномерного движения по окружности (с постоянной по модулю скоростью). Так как в процессе движения меняется направление скорости, то вектор изменения скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} \neq 0$, значит тело движется с ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Такое ускорение называется *центростремительным.* Так как $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, угол $\angle FDE = \Delta\varphi$, $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = v$, то $EF \approx \approx FD \cdot \angle FDE \approx v \cdot \Delta\varphi$ при малом угле $\Delta\varphi \to 0$. Откуда получаем:

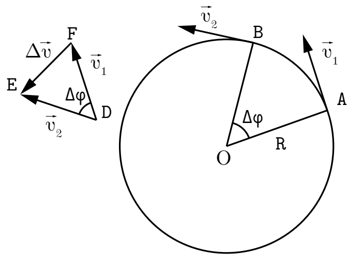


Рис. 50

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \qquad |\vec{a}| = \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega.$$

А так как $v = \omega R$, то $a = v \cdot \omega = \omega^2 R$.

Неравномерное движение по окружности

Рассмотрим случай неравномерного движения по окружности. При таком движении угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называется угловым ускорением ε, которое определяется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ (при } \Delta t \to 0).$$

Если угловое ускорение постоянно, то зависимость угла поворота точки от времени (по аналогии с кинематикой равнопеременного движения по прямой) принимает вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Задачи с решениями

Задача 44. Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена ртутью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что ртуть не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки. Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление p_0, плотность ртути ρ. Найдите давление ртути в месте изгиба трубки. Найдите давление ртути у запаянного конца трубки.

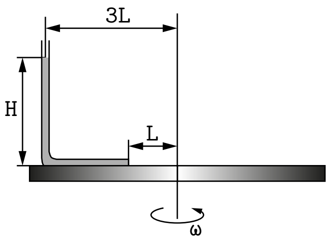


Рис. 51

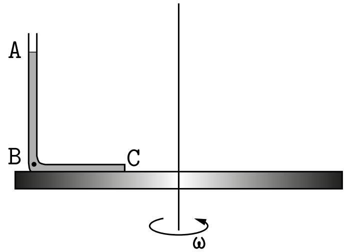


Рис. 52

Решение. Давление в точке A равно атмосферному, $p_A = p_0$. Так как ускорение столба AB по горизонтали равно нулю, то давление же в точке B определяется как сумма давлений в точке A и гидростатического давления столба жидкости AB

$$p_B = p_A + \rho g H = p_0 + \rho g H.$$

Участок же BC двигается по окружности, значит у него есть горизонтальное ускорение (центростремительное), направленное в сторону оси вращения. Так как второй закон Ньютона пишется для материальной точки, то запишем его для центра масс (середины) участка BC. Расстояние от точки B до оси вращения равно $3L$, а от точки C — L, значит длина участка BC равна $3L - L = 2L$ и середина отрезка BC расположена на расстоянии $2L$ до оси вращения. Масса участка BC равна $m = 2L\rho S$, где S — площадь сечения трубки. Таким образом, получается:

$$p_B S - p_C S = 2L\rho S \cdot \omega^2 2L,$$

$$p_B - p_C = 4\rho\omega^2 L^2,$$

$$p_C = p_B - 4\rho\omega^2 L^2 = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 L^2.$$

Ответ: $p_B = p_0 + \rho g H$, $p_C = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 L^2$.

Задача 45. Летом 2003 года многие любители астрономии наблюдали, как Меркурий пересекал солнечный диск. В течении какого времени

t можно было наблюдать это явление? Меркурий вращается вокруг Солнца в ту же сторону, что и Земля, и совершает один оборот за $\tau = 88$ земных суток. Угловой размер солнечного диска, видимый с Земли, равен $\alpha = 0{,}5°$. Орбиты Земли и Меркурия можно считать круговыми.

Решение. Пусть $T = 365$ сут. — период обращения Земли вокруг Солнца. Угловые скорости вращения Земли $\omega_З$ и Меркурия $\omega_М$ вокруг Солнца

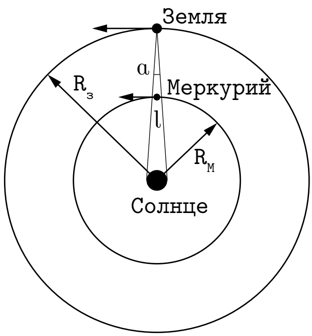


Рис. 53

$$\omega_З = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_М = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Перейдем в систему отсчета K, вращающуюся вокруг Солнца так, что центр Земли в ней неподвижен. Угловая скорость Меркурия в этой системе отсчета

$$\omega_{отн} = |\omega_М - \omega_З| = \left|\frac{2\pi}{\tau} - \frac{2\pi}{T}\right| = \\ = \left|\frac{2\pi}{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\right|.$$

Пересекая солнечный диск, Меркурий в системе K проходит расстояние $l = \alpha(R_З - R_М)$, где $R_З$ и $R_М$ радиусы орбит Земли и Меркурия. В выбранной системе отсчета Меркурий движется со скоростью $v = \omega_{отн} \cdot R_М$, поэтому пройдет это расстояние за время

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\alpha(R_З - R_М)}{\omega_{отн} R_М} = \frac{\alpha}{\omega_{отн}}\left(\frac{R_З}{R_М} - 1\right).$$

Так как Меркурий и Земля двигаются по окружности, то для Меркурия $\omega_М^2 R_М = \gamma\dfrac{M}{R_М^2}$, для Земли $\omega_З^2 R_З = \gamma\dfrac{M}{R_З^2}$, где M — масса Солнца. После деления получаем:

$$\frac{\omega_М^2 R_М}{\omega_З^2 R_З} = \frac{\gamma\frac{M}{R_М^2}}{\gamma\frac{M}{R_З^2}}, \quad \frac{\omega_М^2}{\omega_З^2} = \frac{R_З^3}{R_М^3}, \quad \frac{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{R_З^3}{R_М^3}, \quad \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{R_З}{R_М}\right)^3.$$

Данное соотношение, связывающее радиусы орбит с периодами их обращения, называется *третий закон Кеплера*. Из данного закона следует, что $\dfrac{R_З}{R_М} = \left(\dfrac{T}{\tau}\right)^{\frac{2}{3}}$. Таким образом

$$t = \frac{\alpha}{\omega_{\text{отн}}}\left(\frac{R_З}{R_М} - 1\right) = \frac{\alpha}{\frac{2\pi}{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)}\left(\left(\frac{T}{\tau}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) =$$

$$= \frac{\alpha\tau T}{2\pi(T-\tau)}\left(\left(\frac{T}{\tau}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \approx 6 \text{ час.}$$

В этом решении мы пренебрегли собственным вращением Земли, которое сказывается в виде небольшого смещения наблюдателя.

Ответ: $t = 6$ час.

Задача 46. Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью $v_0 = 6$ м/с. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью равен $\mu = 0{,}2$. Цилиндр сталкивается с вертикальной гладкой стенкой и упруго отражается от неё. Найдите скорости верхней и нижней точек цилиндра непосредственно после отражения. Определите скорость центра цилиндра через $t_1 = 2$ с после столкновения со стенкой и путь, пройденный этим цилиндром. Определите, какой путь пройдет центр цилиндра к моменту времени $t_2 = 4$ с.

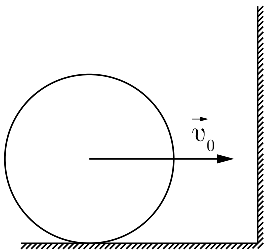


Рис. 54

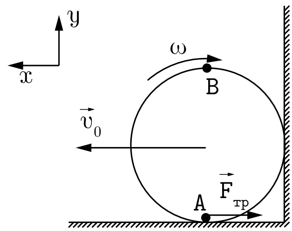


Рис. 55

Решение. До удара при чистом качении скорость поступательного движения цилиндра v_0 и угловая скорость цилиндра ω связаны соотношением $v_0 = \omega R$, где R — радиус шара.

После упругого удара скорость поступательного движения цилиндра меняет знак, а угловая скорость вращательного движения остается прежней. Цилиндр начинает двигаться с проскальзыванием. Сразу после отражения от стенки скорость его верхней точки B равна $v_B = v_0 - \omega R = 0$, а нижней точки A будет $v_A = v_0 + \omega R = 2v_0$.

После отражения оба движения цилиндра — поступательное и вращательное — оказываются равнозамедленными, так как на него будет действовать постоянная сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Цилиндр будет двигаться с ускорением $a = \dfrac{F_{\text{тр}}}{m} = \mu g$. Через время t_1 скорость цилиндра

$$v_1 = v_0 - at_1 = v_0 - \mu g t_1 = 2 \text{ м/с},$$

и пройденный путь

$$S_1 = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = 8 \text{ м}.$$

Цилиндр остановится через время $\tau = \dfrac{v_0}{a} = \dfrac{v_0}{\mu g} = 3$ с. К этому моменту прекратится и вращательное движение. Пройденный путь в этот момент будет равен

$$S_2 = v_0 \tau - \frac{a\tau^2}{2} = 9 \text{ м}.$$

Следовательно, через 4 секунды путь, пройденный цилиндром, будет равен 9 метрам.

Ответ: $v_A = 2v_0$, $v_B = 0$, $v_1 = 2$ м/с, $S_1 = 8$ м, $S_2 = 9$ м.

Задача 47. Свет от Солнца до Земли доходит за $\tau_1 = 500$ с, от Земли до Луны за $\tau_2 = 1{,}3$ с. Найдите наибольшую v_{max} и наименьшую v_{min} скорость Луны в системе отсчета, связанной с Солнцем. Как выглядит Луна в эти моменты времени на небесной сфере (с точки зрения земного наблюдателя)? Изобразите качественно траекторию Луны в гелиоцентрической системе отсчёта.

Примечание. Луна вокруг Земли вращается в ту же сторону, что и Земля вокруг Солнца. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Земля делает один оборот вокруг Солнца за $T_1 = 1$ год $\approx \pi \cdot 10^7$ с. Луна делает один оборот вокруг Земли приблизительно за $T_2 = 27$ сут.

Решение. Земля движется вокруг Солнца по окружности радиуса $R_1 = c\tau_1$ со скоростью

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1} = \frac{2\pi c\tau_1}{T_1} \approx 30 \text{ км/с}.$$

Аналогично, в системе отсчета Земли Луна движется по окружности радиуса $R_2 = c\tau_2$ со скоростью

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2} = \frac{2\pi c\tau_2}{T_2} \approx 1 \text{ км/с}.$$

Скорость Луны в гелиоцентрической системе отсчета $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$. Она максимальна, когда $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ сонаправлены, и минимальна, когда $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ направлены в противоположные стороны. Максимальное значение скорости Луны тогда $v_{max} = v_1 + v_2 = 31$ км/с и $v_{min} = v_1 - v_2 = 29$ км/с. Обе искомые скорости сонаправлены с v_1, то есть направлены перпендикулярно радиусу, соединяющему центры Солнца и Земли.

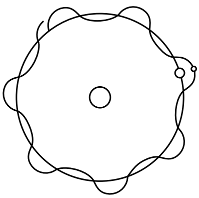


Рис. 56

Поскольку Луна вращается вокруг Земли в ту же сторону, что и Земля вокруг Солнца, то максимальная скорость Луны будет достигаться, когда она находится на максимальном удалении от Солнца. В этот момент освещенная сторона Луны обращена к Земле, что соответствует полнолунию, лунные затмения могут наблюдаться только при таком положении Луны, Земли и Солнца.

Минимальную скорость Луна имеет на минимальном удалении от Солнца, когда она обращена к Земле теневой стороной. В таких состояниях возможно солнечное затмение.

Траектория Луны в гелиоцентрическое системе отсчета похожа на синусоиду, свернутую в кольцо. Данная траектория не имеет самопересечений в течение одного года, а само движение не строго периодическое, то есть Луна не повторяет свою траекторию при следующем обороте вокруг Солнца.

Ответ: $v_{max} = 31$ км/с, $v_{min} = 29$ км/с.

Задача 48. Земля из–за вращения вокруг своей оси сплющена со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (экваториальный радиус). Оцените отношение разности экваториального радиуса и полярного радиусов к среднему радиусу Земли $R = 6370$ км. Землю считать жидким телом, окруженным тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

Решение. Пусть давление в центре Земли p. Рассмотрим два тонких столба жидкости OA и OB сечением S и длиной $R_п$ (полярный радиус), расположенных вдоль оси вращения Земли и в экваториальной плоскости.

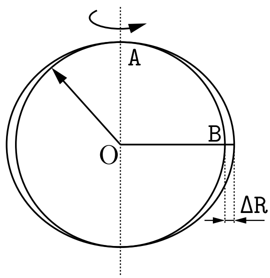


Рис. 57

Оценочно будем считать, что они притягиваются к центру Земли с одинаковой силой F. Условие равновесия столба OA: $F = pS$. На столб OB давит «довесок» толщиной ΔR. Центр масс столба OB движется с центростремительным ускорением $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{R_\Pi}{2}$, где $T = 24$ ч. Согласно второму закону Ньютона

$$F - pS + \rho g S \Delta R = \rho R_\Pi S a.$$

Из записанных уравнений с учетом того, что $R_\Pi \approx R$, получаем

$$F - pS + \rho g S \Delta R = \rho R_\Pi S \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{R_\Pi}{2},$$

$$g \Delta R = R_\Pi \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{R_\Pi}{2},$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_\Pi}{2g} \approx \frac{1}{582}.$$

Отметим, что табличное значение составляет $\frac{1}{297}$.

Ответ: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{582}$.

Задача 49. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин, прислоненный к гладкой вертикальной стене. Поверхность клина наклонена к горизонту под углом α. Автомобильное колесо массой

M скатывается без проскальзывания с клина. В процессе движения колеса по клину клин действует на стену с постоянной силой F. Какой скорости достигнет колесо, пройдя из состояния покоя путь S по клину?

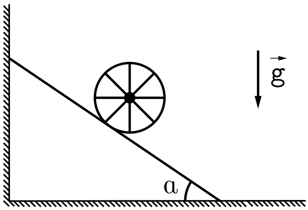


Рис. 58

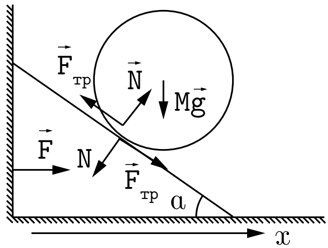


Рис. 59

Решение. Во время движения колеса по поверхности клина клин остается неподвижным. Поэтому проекция на горизонтальную ось всех действующих на клин сил равна нулю:

$$F + F_{\text{тр}} \cos\alpha - N \sin\alpha = 0.$$

Здесь $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя между колесом и поверхностью клина, $N = Mg\cos\alpha$ — сила нормального давления колеса на клин, равная силе реакции опоры. Сила трения покоя —величина неизвестная (не путать силу трения покоя с силой трения скольжения), но её можно найти из предыдущего уравнения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{N\sin\alpha - F}{\cos\alpha} = \frac{Mg\cos\alpha\sin\alpha - F}{\cos\alpha} = Mg\sin\alpha - \frac{F}{\cos\alpha}.$$

Теперь запишем второй закон Ньютона для центра колеса

$$Ma = Mg\sin\alpha - F_{\text{тр}},$$

откуда найдем ускорение колеса:

$$a = g\sin\alpha - \frac{F_{\text{тр}}}{M} = g\sin\alpha - \frac{Mg\sin\alpha - \frac{F}{\cos\alpha}}{M} = g\sin\alpha - g\sin\alpha +$$

$$+\frac{F}{M\cos\alpha} = \frac{F}{M\cos\alpha}.$$

При равноускоренном движении с нулевой скоростью связь между пройденным путем s и скоростью v, достигнутой в конце пути, имеет вид:

$$v = \sqrt{2as},$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{M\cos\alpha}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2Fs}{M\cos\alpha}}$.

Задача 50. По сторонам прямого угла скользит палочка длиной $2l$, по середине которой закреплена бусинка массы m (см. рис. 60). Скорость точки B постоянна и равна v. Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha = 45°$.

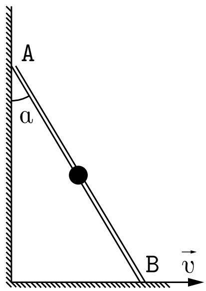


Рис. 60

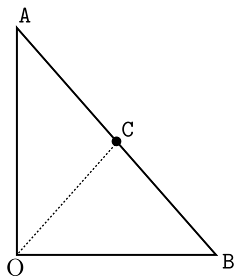


Рис. 61

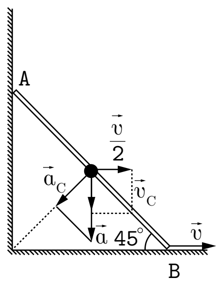


Рис. 62

Решение. На бусинку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{Q}$ реакции палочки. Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{a}.$$

Следовательно, для определения силы реакции $\vec{Q}$ необходимо найти ускорение бусинки $\vec{a}$. По третьему закону Ньютона, сила $|\vec{N}|$, с которой бусинки действует на палочку равна силе $|\vec{Q}|$, с которой палочка действует на бусинку (по модулю). Соединим бусинку с вершиной прямого угла. Так как треугольник ABC — прямоугольный, а точка C — середина гипотенузы, то OC является медианой, значит $OC = AC = CB = 1/2 \cdot AB = l$ (см. рис. 61). А так как в процессе движения палочки её длина не меняется, то в каждый момент времени расстояние от бусинки до вершины прямого угла сохраняется, значит бусинка двигается по окружности радиуса l. Скорость v_C бусинки направлена по касательной к этой окружности, а центростремительное ускорение равно $a_C = \dfrac{v_C^2}{l}$.

В любой момент времени полная скорость бусинки складывается из горизонтальной и вертикальной составляющих. По условию задачи скорость точки B постоянна и равна $\vec{v}$. Горизонтальные скорости всех остальных точек тоже постоянны, причем горизонтальная скорость бусинки равна $\dfrac{\vec{v}}{2}$. Это означает, что ускорение бусинки $\vec{a}$ и сила реакции $\vec{Q}$ направлены вертикально. В тот момент времени, когда угол $\alpha = 45^\circ$, скорость $\vec{v}_C$ бусинки направлена вдоль палочки ($\angle OCB = 90^\circ$), а её вертикальные и горизонтальные составляющие одинаковы по модулю и равны $\dfrac{v}{2}$, значит полная скорость бусинки в этот момент равна $v_C = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$a_C = \frac{v_C^2}{l} = \frac{v^2}{2l}.$$

Полное ускорение

$$a = a_C\sqrt{2} = \frac{v^2}{2l}\sqrt{2} = \frac{v^2}{\sqrt{2}l}.$$

Откуда по второму закону Ньютона

$$N = Q = mg - ma = m\left(g - \frac{v^2}{\sqrt{2}l}\right).$$

Ответ: $N = m\left(g - \dfrac{v^2}{\sqrt{2}l}\right)$.

Задача 51.

В далеком созвездии Тау Кита
Живут, между прочим, по–разному
Товарищи наши по разуму...
В. Высоцкий

Планета Косатка из созвездия Тау Кита имеет тот же размер, что и Земля, и состоит из несжимаемой жидкой субстанции, плотность которой $\rho = 800$ кг/м^3. Продолжительность суток на этой планете составляет 10 ч. Северный полюс Косатки направлен на Землю. Однажды ночью обитатель планеты Кит Вэйл всплыл на поверхности планеты в северном полушарии на широте $\alpha = 54°$, чтобы полюбоваться звездным небом. Найдите угол между горизонтом в точке, где всплыл Вэйл, и направлением на Землю (её средняя плотность $\rho_0 = 5500$ кг/м^3, радиус $R = 6400$ км). Во всем созвездии Тау Кита широтой точки называется угол между радиусом, проведенным к ней из центра планеты и плоскостью экватора.

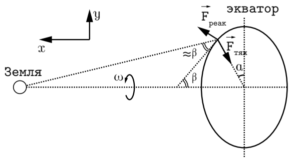


Рис. 63

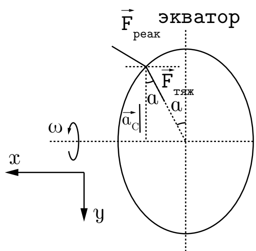


Рис. 64

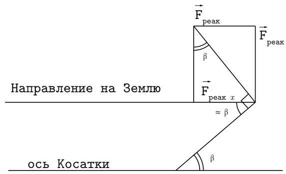


Рис. 65

Решение. Так как плотность планеты Касатка в $\dfrac{\rho}{\rho_0}$ раз меньше, чем у Земли, то и ускорение свободного падения на поверхности во столько же раз меньше (радиусы планет равны), $g_{\text{Касатка}} = \dfrac{\rho}{\rho_0} g$.

Рассмотрим маленький элемент жидкости на поверхности планеты рядом с Вэйлом. Обозначим массу этого элемента через m. На него действуют сила тяжести и сила реакции окружающей жидкости. Первая направлена к центру и равна $F_{\text{тяж}} = \dfrac{mg\rho}{\rho_0}$, а вторая $\vec{F}_{\text{реак}}$ направлена перпендикулярно поверхности планеты. Их сумма равна

$$\left|\vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{реак}}\right| = a_c = m\omega^2 R\cos\alpha.$$

Спроецируем данное уравнение на оси x и y

$$\begin{cases} F_{\text{реак}_x} = F_{\text{тяж}_x}, \\ F_{\text{тяж}_y} - F_{\text{реак}_y} = ma_c. \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{\text{реак}_x} = mg\sin\alpha\dfrac{\rho}{\rho_0}, \\ F_{\text{реак}_y} = F_{\text{тяж}_y} - ma_c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{\text{реак}_x} = mg\sin\alpha\dfrac{\rho}{\rho_0}, \\ F_{\text{реак}_y} = mf\cos\alpha\dfrac{\rho}{\rho_0} - m\omega^2 R\cos\alpha. \end{cases}$$

Так как планета Косатка (да и все созвездие Тау Кита) удалено от Земли на очень большое расстояние (порядка 12 световых лет), то можно считать направление на Землю почти параллельно оси Косатки. Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\beta\frac{F_{\text{реак}_x}}{F_{\text{реак}_y}} = \frac{mg\sin\alpha\frac{\rho}{\rho_0}}{mg\cos\alpha\frac{\rho}{\rho_0} - m\omega^2 R\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{\rho_0\omega^2 R}{gR}},$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Окончательно получаем $\beta \approx 60°$.

Ответ: $\beta \approx 60°$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 52. На карусели радиуса $R = 15$ м, вращающейся в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 0{,}5$ рад/с, на расстоянии $R_0 = 10$ м от центра стоит хоккеист. В некоторый момент он ударил клюшкой по шайбе. Шайба после броска оставила след (см. рис. 66). Найдите величину начальной скорости шайбы относительно карусели и относительно Земли.

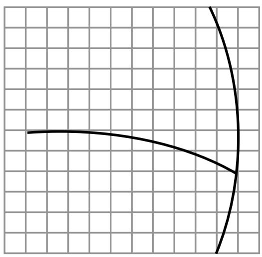


Рис. 66

Трением шайбы о карусель пренебречь. Примечание. При малых значениях φ (когда φ выражен в радианах) можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$.

Задача 53. На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой. В сосуде закреплен тонкий стержень AB, наклоненный к горизонту под углом α.

Шар радиусом R может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность шара ρ_0, плотность воды ρ, $\rho_0 < \rho$. При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO', проходящей через нижний конец A стержня, центр шара устанавливается на расстоянии l от этого конца.

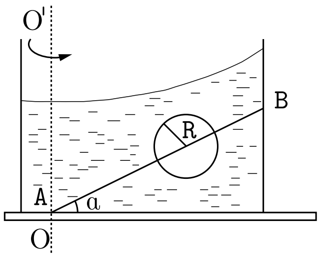


Рис. 67

С какой силой шар действует на стержень? Найдите угловую скорость вращения платформы. При какой минимальной угловой скорости вращения шар «утонет» и окажется на дне сосуда?

Задача 54[3]. На гладкое проволочное кольцо радиуса R, расположенное вертикально, надета маленькая бусинка. Кольцо вращается с угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей по диаметру кольца (см. рис. 68). Где находится бусинка?

Задача 55. Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр), равен приблизительно $\alpha \approx 10^{-2}$ рад. Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Определите отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что 1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ с.

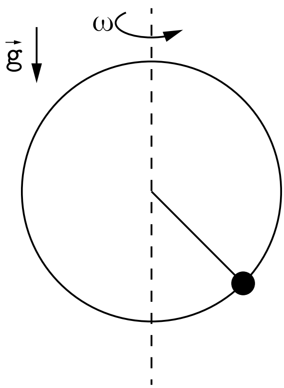


Рис. 68

Задача 56[?]. Найдите форму поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде, вращающемся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (т. е. найти высоту уровня жидкости в зависимости от расстояния до оси вращения).

Задача 57. На горизонтальной и наклонной поверхностях призмы находятся небольшие бруски с массами m и $2m$, связанные легкой нитью, перекинутой через блок. Призма с брусками может вращаться вокруг вертикальной оси OO'. Ось OO' составляет угол α ($\sin\alpha = 4/5$) с наклонной плоскостью призмы, причем ось и бруски лежат в плоскости, перпендикулярной наклонной поверхности призмы. Бруски находятся на расстояниях R и $3R$ от оси вращения.

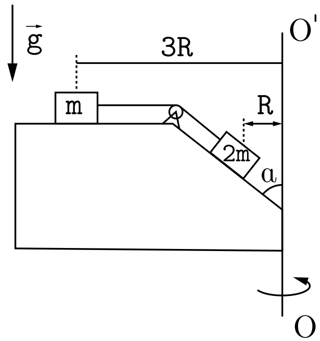


Рис. 69

Коэффициент трения скольжения бруска о наклонную поверхность призмы $\mu = 1/2$, горизонтальная поверхность призмы гладкая. При какой минимальной угловой скорости вращения брусок массой m начнет удаляться от оси вращения? Трением в оси блока пренебречь.

Задача 58*. Камень, брошенный под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, движется по некоторой траектории. Если по этой траектории полетит комар с постоянной скоростью v_0, то каким будет его ускорение на высоте, равной половине высоты наибольшего подъема камня? Сопротивление воздуха при движении камня можно не учитывать.

Гидродинамика

Закон Бернулли. Уравнение неразрывности

Жидкости подразделяются на идеальные и вязкие, на сжимаемые и несжимаемые. В *вязких жидкостях* присутствует внутреннее трение, когда более быстрые части жидкости увлекают за собой более медленные, сами при этом замедляясь. В результате трения выделяется тепло. Жидкости без внутреннего трения называются *идеальными*. Если объем жидкости меняется в зависимости от давления, такая жидкость называется *сжимаемой*. У *несжимаемых* жидкостей плотность остается постоянной. Считать ли жидкость сжимаемой или несжимаемой зависит от рассматриваемой задачи. В процессах распространения звуковых волн сжимаемость играет решающую роль. В задачах, где достаточно медленное по сравнению со скоростью звука течение не сопровождается существенными перепадами давления, жидкость или газ можно считать несжимаемыми. Именно такие задачи разбираются в настоящей главе — движение идеальной несжимаемой жидкости.

Течение жидкости принято описывать двумя способами.

В первом способе следят за движением отдельных частиц жидкости, за их траекториями, за изменением в них физических характеристик (например, давления, скорости). Понятие частица здесь условное, речь идет о произвольных малых объемах жидкости, взятых в основном потоке. Эти объемы можно рассматривать как самостоятельные тела, к которым применимы обычные законы механики, например, законы Ньютона, законы сохранения импульса и энергии.

В другом способе смотрят за тем, что происходит в фиксированных точках пространства. В фиксированный момент времени в каждой точке пространства, занятом жидкостью, определен вектор скорости. Такая мгновенная картина называется *полем скоростей*. *Линией тока* называется линия, в каждой точке которой, скорость течения направлена по касательной. Если скорости течения со временем не меняются, говорят, что течение *стационарно*. Линии тока стационарного течения неизменны. Линии тока совпадают с траекториями движения частиц жидкости только в случае стационарного течения.

Далее рассмотрим стационарное течение. Если из каждой точки замкнутого контура выпустить линию тока, эти линии образуют некую поверхность, так называемую *трубку тока*. Так как в любой точке поверхности трубки тока скорость течения направлена по касательной, то жидкость, находящаяся внутри трубки тока, ее не покидает. В достаточно тонкой трубке тока можно считать, что скорость в поперечном сечении постоянна. Через каждое поперечное сечение трубки тока за время dt протекает одно и тоже количество жидкости массой

$$dm = \rho S v dt, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, S — площадь сечения трубки тока, v — скорость течения.

Так как через каждое сечение за одно и тоже время протекает одна и та же масса, то из (1) следует соотношение

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \tag{2}$$

где S_1 и S_2 — площади двух различных сечений, v_1 и v_2 соответствующие скорости, ρ_1 и ρ_2 соответствующие плотности.

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

Если жидкость несжимаема, то плотность сокращается, и уравнение неразрывности принимает вид

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

Применим к стационарному течению идеальной жидкости в поле силы тяжести закон сохранения энергии.

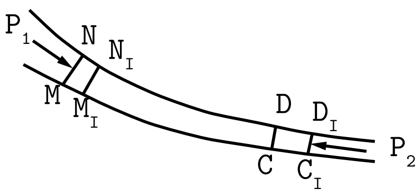


Рис. 70

В достаточно узкой трубке тока рассмотрим часть жидкости, занимающую объем $MNDC$ (рис. 70). Пусть жидкость после перемещения на малое расстояние занимает объем $M_1N_1D_1C_1$.

Обозначим скорость в сечении MN как v_1, а в сечении DC скорость течения v_2. Тогда отрезок $MM_1 = v_1\Delta t$, а отрезок $CC_1 = v_2\Delta t$. Масса, заключенная в объеме MNM_1N_1, равна $\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$, а в объеме DCD_1C_1 $\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$. Согласно уравнению неразрывности (2) получаем, что массы, заключенные в объемах MNM_1N_1 и DCD_1C_1 одинаковы.

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m. \tag{3}$$

С учетом (3) рассчитаем работу сил давления при перемещении части жидкости в $MNDC$ в положение $M_1N_1D_1C_1$

$$A = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t - \rho_2 S_2 v_2 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1} - p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2} = (\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2})\Delta m.$$

Силы давления, действующие на боковую стенку трубки тока, работы не совершают, так как направлены перпендикулярно скорости течения.

Работа внешних сил A равна изменению энергии жидкости ΔE. Течение стационарно, значит, энергия жидкости в объеме MM_1DC не изменилась. Тогда изменение энергии равно

$$\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m,$$

где ε_1 и ε_2 плотности энергии жидкости в объемах MNM_1N_1 и DCD_1C_1. Приравнивая A и ΔE , получим

$$(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2})\Delta m = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m,$$

сокращая на Δm, получим, что вдоль узкой трубки тока сохраняется следующая величина

$$\frac{p}{\rho} + \varepsilon = \mathrm{const}\,.$$

Для несжимаемой жидкости энергия складывается из кинетической и потенциальной. Тогда окончательно для несжимаемой жидкости

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \mathrm{const}\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *уравнением Бернулли* для несжимаемой жидкости. Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения энергии, справедливо вдоль каждой линии тока в стационарном течении, при этом константа в правой части (4) в общем случае различна на различных линиях тока.

Формула Торричелли

Найдем скорость истечения жидкости из малого отверстия, проделанного в сосуде на расстоянии H от свободного уровня жидкости.

Возьмем линию тока, которая начинается на свободной поверхности и входит в отверстие. Давление на входе и на выходе одинаковое — атмосферное. Скоростью опускания поверхности жидкости пренебрежем по сравнению со скоростью истечения струи, т. к. площадь сечения сосуда много больше площади отверстия. Потенциальную энергию будем отсчитывать с уровня отверстия. Применим уравнение Бернулли

$$\frac{p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{p} + \frac{v^2}{2}.$$

Отсюда следует, что скорость истечения струи жидкости равна

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Эта формула называется *формулой Торричелли*.

Задачи с решениями

Задача 59. Древнегреческие водяные часы (клепсидра) представляют собой сосуд с небольшим отверстием (см. рис. 71). Время отсчитывается по уровню воды в сосуде. Какова должна быть форма сосуда, чтобы шкала времени была равномерной?

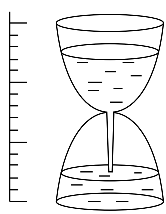


Рис. 71

Решение. Расположим начало координат внизу верхнего сосуда. Ось y направим вверх, а ось x направим горизонтально.

Пусть площадь отверстия s мала, тогда приближенно примем, что скорость истечения воды находится по формуле Торричелли

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Площадь поверхности воды $S = \pi x^2$. Скорость опускания v_1 поверхности воды найдем с помощью закона сохранения массы

$$sv = Sv_1.$$

Чтобы шкала времени была равномерной, скорость опускания v_1 поверхности воды должна быть постоянной $v_1 = const$.

$$v_1 = \frac{sv}{S} = \frac{s\sqrt{2gy}}{S} = \frac{s\sqrt{2gy}}{\pi x^2}.$$

Возводя в квадрат, получим уравнение, описывающее форму сосуда клепсидры

$$y = \frac{\pi^2 v_1^2}{2gs^2} x^4.$$

Нужно отметить, что полученная формула справедлива, пока уровень жидкости достаточно далек от отверстия, т. к. мы воспользовались приближенной формулой Торричелли.

Ответ: $y = \dfrac{\pi^2 v_1^2}{2gs^2} x^4.$

Задача 60. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площади S и выходным отверстием площади s, расположенным у оси цилиндра. Определить скорость истечения струи из насоса, если поршень под действием силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости равна ρ, атмосферным давлением пренебречь.

Решение. Обозначим скорость движения поршня v_1, а скорость истекающей струи v_2. Согласно уравнению неразрывности

$$v_1 = \frac{s}{S} v_2.$$

Давление у поршня p_1 равно

$$p_1 = \frac{F}{S},$$

а давление в истекающей струе равно атмосферному $p_2 = p_0$. По условию задачи $p_0 = 0$.

По условию картина течения стационарная, так как поршень движется с постоянной скоростью. Рассмотрим горизонтальную линию тока, находящуюся на оси системы цилиндр — истекающая струя. Согласно уравнению Бернулли справедливо соотношение

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2}.$$

Подставим в это уравнение выражения для v_1 и p_1

$$\frac{F}{\rho S} + \frac{1}{2}(\frac{s}{S})^2 v_2^2 = \frac{v_2^2}{2}.$$

Выражая отсюда v_2, получим ответ.

Примечание. Подобные задачи можно решать, не прибегая к готовому уравнению Бернулли, непосредственно применяя рассуждения подобные тем, которые использовались для его вывода. Ниже приведен пример такого способа решения. За малое время Δt поршень сместится на расстояние $v_1 \Delta t$, при этом сила F совершит работу (других сил по условию задачи нет)

$$\Delta A = F v_1 \Delta t.$$

Эта работа пойдет только на изменение кинетической энергии жидкости, так как по условию насос горизонтальный. При стационарном течении изменение кинетической энергии происходит только за счет жидкости, вытесненной поршнем за время Δt.

За время Δt струя выйдет из насоса на расстояние $v_2 \Delta t$. Эта часть жидкости имеет кинетическую энергию

$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 = \frac{1}{2}(\rho s v_2 \Delta t) v_2^2 = \frac{1}{2}\rho s \Delta t v_2^3.$$

Та же масса жидкости внутри насоса (до вытеснения) обладала кинетической энергие

$$\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}(\rho S v_1 \Delta t)v_1^2 = \frac{1}{2}\rho S \Delta t v_1^3.$$

Тогда работа силы F будет равна разности этих энергий

$$F v_1 \Delta t = \frac{1}{2}\rho s \Delta t v_2^3 - \frac{1}{2}\rho S \Delta t v_1^3 = \frac{1}{2}\rho(s v_2^3 - S v_1^3)\Delta t.$$

Сократим Δt и используем следствие закона сохранения массы $v_1 = (s/S)v_2$

$$F\frac{s}{S}v_2 = \frac{1}{2}\rho(1 - \frac{s^2}{S^2})s v_2^3.$$

Сокращая s и v_2, снова получим ответ.

Ответ: $v_2^2 = \dfrac{2F}{\rho S(1-(s/S)^2)}$.

Задача 61. Струя воды, вытекающая из трубки диаметра $d = 1$ см со скоростью $v = 1$ м/с, ударяется о вертикальную стену. Определить действующую на стену силу со стороны струи, считая, что трубка перпендикулярна стене, и пренебрегая разбрызгиванием воды.

Решение. Задачу можно решить, используя второй закон Ньютона. Пренебрежение разбрызгиванием, говорит о том, что весь импульс жидкости передается стенке (неупругий удар). Сила будет равна скорости передачи импульса стенке. За время Δt импульс Δp переданный стенке будет равен

$$\Delta p = \Delta m v = (\rho S v \Delta t)v = \rho S v^2 \Delta t.$$

Тогда сила

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2 = 0{,}08 \text{ Н}.$$

Ответ: 0,08 Н.

Задача 62. Насос должен подавать ежесекундно объем воды V на высоту h по трубе постоянного сечения S. Какова должна быть мощность насоса P, если плотность воды ρ?

Решение. Каждую секунду насос поднимает на высоту h массу воды $\Delta m = \rho V$, которая приобретает потенциальную энергию

$$\Delta mgh = \rho Vgh.$$

При этом скорость воды равна

$$v = \frac{V}{S\Delta t},$$

где $\Delta t = 1$ с.

Тогда, кинетическая энергия приобретаемая водой равна

$$\Delta m \frac{v^2}{2} = \frac{\rho V}{2}\left(\frac{V}{S\Delta t}\right)^2.$$

Мощность насоса должна быть не меньше суммарной скорости изменения энергии воды.

$$P \geqslant \frac{\Delta m}{\Delta t} gh + \frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{v^2}{2} = \rho \frac{V}{\Delta t}\left(gh + \frac{(V/\Delta t)^2}{2S^2}\right).$$

Ответ: $P \geqslant \rho \dfrac{V}{\Delta t}\left(gh + \dfrac{(V/\Delta t)^2}{2S^2}\right)$.

Задача 63. Двигатель корабля был остановлен в момент, когда скорость корабля была равна V_0. Какой путь S пройдет корабль до полной остановки, если эффективная масса корабля равна M, а сила сопротивления пропорциональна скорости: $F = -kV$.

Решение. Запишем второй закон Ньютона:

$$Ma = -kV.$$

Домножим обе части уравнения на достаточно малый промежуток времени Δt и учтем, что $a\Delta t = V$, также учтем, что $V\Delta t = \Delta x$. В результате получим уравнение, связывающее изменение скорости корабля с изменением его положения

$$M\Delta V = -k\Delta x.$$

Эта связь не зависит ни от положения корабля, ни от времени, а значит, справедливо не только для малых промежутков времени, но и для любых больших промежутков. Если в качестве приращения скорости взять разницу между конечной (нулевой) и начальной скоростью V_0, а в качестве приращения координаты путь S, пройденный до остановки, получится ответ.

Скорость корабля убывает сначала быстро, а затем все медленнее, асимптотически приближаясь к нулю. Строго говоря, скорость никогда не обратится в нуль, но пройденный путь даже за сколь угодно большой промежуток времени будет конечным.

Ответ: $S = \dfrac{M}{k} V_0$.

Задача 64. Тонкая U–образная трубка, размеры которой указаны на рисунке 72, заполнена ртутью до половины вертикальных колен. Трубка движется горизонтально с ускорением a. Найти разность высот h ртути в вертикальных частях трубки и давление в точке A.

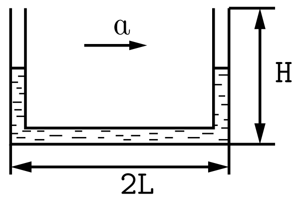


Рис. 72

При каком ускорении ртуть начнет выливаться из трубки? Атмосферное давление равно P_0, плотность ртути ρ.

Решение. За счет различных уровней на часть жидкости в горизонтальном участке действует сила

$$(P_1 - P_2)S = \rho g h S,$$

где P_1 — давление на горизонтальном участке слева, P_2 —давление на горизонтальном участке справа.

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы жидкости $m = 2\rho L S$ на ускорение a

$$\rho g h S = 2\rho L S a.$$

Отсюда

$$h = 2L(a/g).$$

Вода будет выливаться при $h > H$.

Тогда окончательно, подставляя выражение для h в это условие, получим ответ.

Ответ: $a > \dfrac{gH}{2L}$.

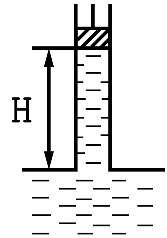


Рис. 73

Задача 65. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний конец ее погружен в воду (см. рис. 73). Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно подняли на высоту $H = 15$ м. Какую работу пришлось при этом совершить? Площадь поршня $S = 1$ дм^2. Атмосферное давление $p_0 = 105$ Па. Массой поршня пренебречь.

Решение. Когда поршень поднимается, под ним создается разряжение, и вода под действием атмосферного давления вдавливается в трубу. Найдем силу, действующую на поршень.

На систему столб воды — поршень действует атмосферное давление снизу, атмосферное давление сверху, сила тяжести, действующая на столб жидкости и сила, поднимающая поршень. Атмосферные давления компенсируют друг друга. Таким образом, сила F, поднимающая поршень равна весу столба жидкости. При этом сила, действующая между водой и поршнем равна разнице атмосферного давления и веса столба жидкости. Это означает, что жидкость поднимается только на определенную максимальную высоту $H_1 < H$, которую определим из условия равенства веса столба и атмосферного давления (в этот момент сила взаимодействия между поршнем и жидкостью в трубе равна нулю).

$$H_1 > \frac{\rho g}{P_0} = 10 \text{ м}.$$

Получается, что последние 5 метров пути поршень проходит в отрыве от жидкости. Между жидкостью и поршнем образуется вакуум. На рисунке 74 показан график зависимости высоты поднятия поршня h от силы F. Искомая работа равна площади под этим графиком.

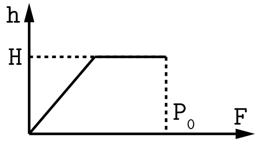


Рис. 74

$$A = \frac{1}{2}H_1P_0S + (H - H_1)P_0S = 9{,}8 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 9{,}8 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 66. Цилиндрический сосуд с водой стоит на горизонтальной поверхности. На какой высоте h надо пробить небольшое отверстие, чтобы дальность струи L была максимальной. Во время вытекания струи уровень жидкости H в сосуде поддерживается постоянным.

Решение. Согласно формуле Торричелли, жидкость сразу по выходу из отверстия имеет скорость

$$v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Части струи летят по параболе до момента касания с землей.

Время падения без начальной скорости равно

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

За это время вода с постоянной скоростью v проходит расстояние

$$L = vt = \sqrt{2g(H - h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H - h)h}.$$

Расстояние L максимально, когда максимальна величина $(H - h)h$.

Функция $y(h) = Hh - h^2$ представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и максимумом при $h = H/2$.

Ответ: $h = H/2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 67. В стенке сосуда с водой просверлены одно над другим два отверстия площади $S = 0{,}2$ см^2 каждое. Расстояние между отверстиями $H = 50$ см. В сосуд ежесекундно вливается $Q = 140$ см^3 воды. Найти точку пересечения струй, вытекающих из отверстий.

Ответ: $x = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gS^2} - H^2\frac{2gS^2}{Q^2}) = 120$ см, $y = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{2gS^2} + H^2\frac{2gS^2}{Q^2}) = 130$ см, где y — расстояние от точки пересечения струй до свободной поверхности жидкости.

Задача 68. Какая разница в уровнях Δh установится в коленах открытой сверху U-образной трубки (см. рис. 75), наполненной водой, если над отверстием одного из колен продувать воздух со скоростью $V = 15$ м/с?

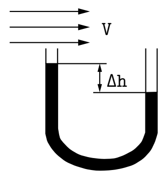


Рис. 75

Ответ: $\Delta h = \frac{\rho_1 V^2}{2\rho_2 g} \approx 1{,}4$ см, где ρ_1 — плотность воздуха, ρ_2 — плотность воды.

Задача 69. Вертолет массой M удерживается на постоянной высоте. Найти мощность P двигателя вертолета, если площадь струи, создаваемой винтом равна S, а плотность воздуха ρ.

Ответ: $P = \frac{1}{2}\rho S\left(\frac{Mg}{\rho S}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Задача 70. Определите максимальную дальность полета струи из шприца l диаметром $d = 4$ см, на поршень которого давит сила $F = 30$ Н. Плотность жидкости ρ составляет 1000 кг/м^3, а площадь поперечного сечения отверстия в игле пренебрежимо мала по сравнению с площадью поршня. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $l = \frac{8F}{\pi\rho g d^2} \approx 4{,}9$ м.

Задача 71. В сосуд налита вода до высоты H. В дне сосуда проделано небольшое круглое отверстие радиусом r_0. Найдите радиус струи воды, вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния h до дна сосуда.

Ответ: $r^2 = \dfrac{r_0^2}{\sqrt{1+h/H}}$.

Задача 72. По горизонтальной трубке переменного сечения (см. рис. 76) течет вода. От нее отведены две открытые вертикальные трубки. Чему равен расход воды Q, если разность высот в трубках равна $\Delta h = 6$ см, а площади сечений трубки соответственно $S_1 = 1$ см^2 и $S_2 = 0{,}7$ см^2?

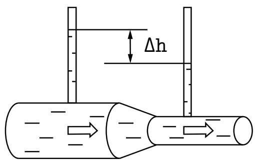


Рис. 76

Ответ: $Q = S_2\sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{1-(S_2/S_1)^2}}$.

Задача 73. Из шланга, наклоненного под углом α к горизонту, бьет со скоростью v вода. Найти массу воды, находящейся в данный момент в воздухе, если площадь сечения отверстия шланга равна S, высота его над землей равна h, плотность воды равна ρ_0.

Ответ: $m = \dfrac{\rho_0 S v}{g}(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh})$.

Задача 74. Поршень вытесняет воду из вертикального цилиндрического сосуда через малое отверстие, находящееся у дна сосуда и имеющее площадь S_0. Высота сосуда равна h, площадь основания — S. Какую работу по полному вытеснению жидкости совершит поршень, если он движется с постоянной скоростью V? Учесть действие силы тяжести.

Ответ: $A = \rho_0 S\dfrac{h}{2}\left(\left(V\dfrac{S}{S_0}\right)^2 - gh\right)$, для $V > \sqrt{2gh}\dfrac{S_0}{S}$.

Задача 75. Брусок массы m удерживается в воздухе струями воды, бьющими вертикально вверх из отверстий, имеющих сечение S. Скорость воды на выходе из отверстий равна v. Достигая бруска, вода разлетается от него в горизонтальной плоскости. На какой высоте над отверстиями удерживается брусок? Плотность воды равна ρ_0.

Ответ: $h = \dfrac{1}{2g}\left(v^2 - \left(\dfrac{mg}{n\rho_0 vS}\right)^2\right)$.

Задача 76. Мячик массой m бросили вертикально вверх с начальной скоростью V_0. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости, определить, сколько времени мячик находился в полете, если он упал обратно со скоростью $V_1 < V_0$.

Ответ: $t = \dfrac{V_0 + V_1}{g}$.

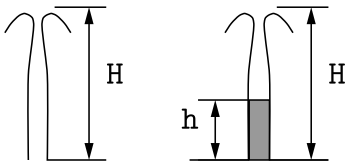


Рис. 77

Задача 77*. Струя воды в фонтане поднимается на высоту H над уровнем выходной трубы насоса. К этой выходной трубе подсоединяют вертикальную трубу такого же диаметра, имеющую высоту $h < H$ (см. рис. 77). Во сколько раз следует изменить после подсоединения дополнительной трубы мощность насоса, чтобы суммарная высота подсоединенной трубы и вылетающей из нее струи воды осталась равной H? Потерями энергии воды на трение о стенки труб пренебречь.

Ответ: $\dfrac{P}{P_0} = \sqrt{1 - \dfrac{h}{H}}$.

Закон сохранения импульса

Формулировка второго закона Ньютона с использованием понятия импульса

Импульсом тела называется произведение массы тела на его скорость в данной системе отсчета:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Второй закон Ньютона формулируется следующим образом:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Сформулируем этот же закон с использованием импульса. В инерциальной системе отсчета изменение импульса материальной точки пропорционально силе за единицу времени:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело, $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}}$ изменение импульса тела (разница конечного и начального импульсов). В случае постоянной массы получаем

$$m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_{\text{кон}} - \vec{v}_{\text{нач}}) = \vec{F}\Delta t.$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ называется *импульсом силы*.

Закон сохранения импульса

Если на систему не действуют внешние силы, то такая система называется замкнутой. В таком случае суммарный импульс системы сохраняется:

$$\sum \vec{p}_{\text{нач}} = \sum \vec{p}_{\text{кон}}.$$

Другими словами — суммарный импульс всех тел в системе в начале некого процесса, равен суммарному импульсу всех тел в системе в конце данного процесса. Этот закон называется *законом сохранения импульса*.

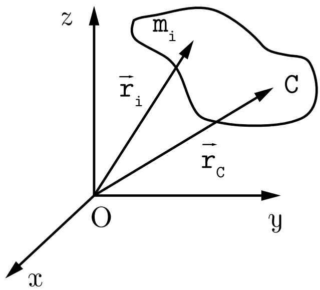
Если на систему действуют внешние силы, то:

$$\sum \vec{p}_{\text{кон}} - \sum \vec{p}_{\text{нач}} = \vec{F}\Delta t.$$

Центр масс

Пусть дано тело или система тел. Мысленно разобьём тело на сколь угодно малые части с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots$

Каждую из этих частей можно рассматривать как материальную точку. Положение в пространстве i–ой точки с массой m_i определяется радиус–вектором $\vec{r_i}$. Масса тела есть сумма масс отдельных его частей его частей $m = \sum\limits_i m_i$. По определению центром масс (системы тел) называется такая точка C, радиус вектор которой $\vec{r}_C$ определяется по формуле



$$\vec{r_i} = \frac{1}{m}\sum_i (m_i \cdot \vec{r_i}).$$

Рис. 78

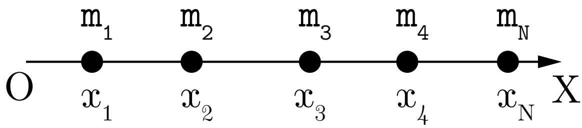


Рис. 79

Рассмотрим частный случай. Пусть материальные точки массами $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ расположены на вдоль числовой прямой так, что координаты точек равны $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ соответственно. Тогда координата центра масс будет равна

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots x_N m_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N}.$$

Формулировка закона сохранения импульса на основе понятия центра масс

Пусть тела, массами $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ имеют скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_N$. Тогда скоростью центра масс называется величина, равная:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N}.$$

Так как величина $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots m_N\vec{v}_N$ есть полный импульс системы тел, то скорость центра масс можно определить, как суммарный импульс системы, деленный на полную массу всех тел системы. Если система замкнутая (внешние силы не действуют), то скорость центра масс не меняется $\vec{v}_c = \mathrm{const}$. В противном случае $\vec{F}\Delta t = \sum m \cdot (\vec{v}_{c_{\text{кон}}} - \vec{v}_{c_{\text{нач}}})$.

Задачи с решениями

Задача 78. Найдите положение центра масс следующих тел (см. рис. 80):

1. Однородного стержня длиной l и массой m;
2. Однородного обруча массой m и радиусом R;
3. Однородного плоского треугольника;
4. Однородного круга с вырезанным круглым отверстием, радиус отверстия R, радиус круга $4R$, расстояние между центрами $2R$.

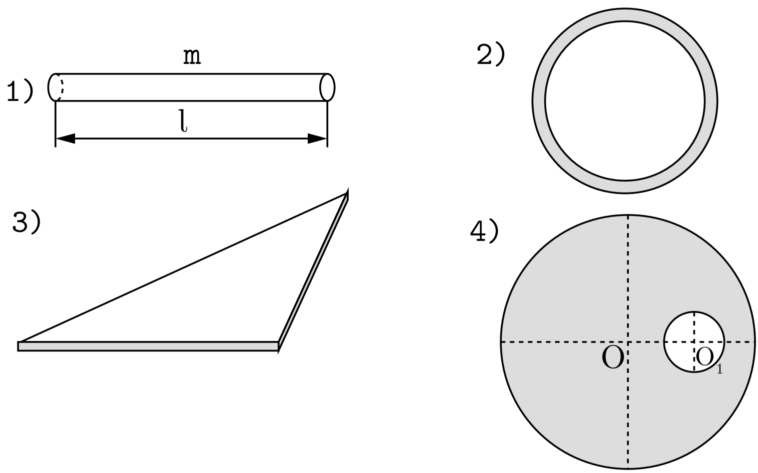


Рис. 80

Решение. Сразу оговоримся — часто поиск центра масс сводится к сложным математическим вычислением, обычно с применением интегрирования. Приведем несколько примеров, где поиск положения центра масс тела можно сделать простыми методами, не требующими использования громоздкого математического аппарата.

1. Разобьем стержень на n одинаковых кусочков шириной Δx, причем $\Delta x = l/n$, масса каждого кусочка $\Delta m = m/n$.

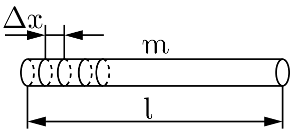


Рис. 81

Если число кусочков большое, то каждый кусочек можно считать материальной точкой. Воспользуемся очевидным фактом (следующим из определения центра масс), что центр масс любых двух одинаковых материальных точек находится прямой, соединяющей эти точки посередине между ними.

   Для первого и последнего кусочка центр масс находится посередине между ними, причем данная точка совпадает с центром стержня. Аналогично для второго и предпоследнего, и т. д. Из этого можно сделать вывод, что центр масс однородного стержня лежит посередине данного стержня. Аналогичные рассуждения можно проделать для любой симметричной фигуры (прямоугольник, равнобокая трапеция).
2. Для определения центра масс обруча воспользуемся принципом симметрии. Очевидно, что у тела есть только один центр масс. Если центр масс обруча не совпадает с его центром, значит у него должен быть второй центр масс, расположенный симметрично относительно центра. Чего быть не может. Получили противоречие. Значит центр масс обруча (как и круга) совпадает с его центром.

   Примечание. Для поиска центра масс можно провести рассуждения, аналогичные п.1.
3. Очевидно, что центр масс равностороннего треугольника в точке пересечения биссектрис, медиан и высот (из симметрии). Найдем, где располагается центр масс произвольного треугольника (см. рис. 82). Для этого разобьем его большим количеством прямых, параллельных одной из сторон (пусть это будет сторона AB). При таком разбиении получим большое число полос, кото-

рые можно считать однородными стержнями, значит центр масс каждой полоски лежит на её середине. Теперь найдем центр масс треугольника. Заметим, что так как центры масс всех полосок лежат на медиане CM, то и центр масс треугольника лежит на медиане CM.

Теперь проделаем аналогичные рассуждения с любой другой стороной, например BC. Значит, центр масс лежит и на медиане, опущенной из вершины B. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке, то делаем вывод, что точка пересечения медиан совпадает с его центром масс.

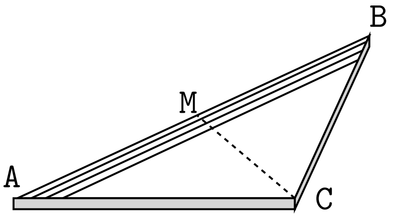


Рис. 82

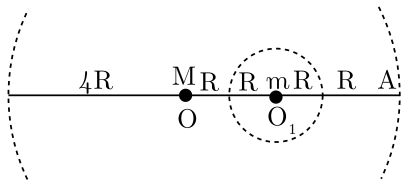


Рис. 83

4. Для нахождения центра масс тела с полостью воспользуемся приемом, называемым «метод отрицательных масс». Суть его заключается в следующем: заменим нашу фигуру, содержащую полость такой же фигурой, но без полости. Но вместо полости поместим тело с отрицательной массой (см. рис. 83). По условию радиус полости R, радиус круга $4R$. Пусть плотность единицы площади σ, тогда масса большого круга $M = 4\pi\sigma(4R)^2$, а масса полости отрицательна и равна $m = -4\pi\sigma R^2$. Откуда находим $M = 16|m|$.

Рассмотрим диаметр большого круга, на котором лежит центр полости. Будем отсчитывать координату центра масс от точки A. Тогда

$$x_c = \frac{M \cdot OA + m \cdot O_1A}{M + m} = \frac{16m \cdot 4R - m \cdot 2R}{16m - m} = \frac{62}{15}R =$$

$$= 4\frac{2}{15}R \approx 4{,}13R.$$

Центр масс такого круга с полостью находится правее центра O на величину $\dfrac{2}{15}R$.

Задача 79. Четыре однородных шара с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 7$ кг, $m_3 = 3$ кг укреплены на невесомом стержне так, что их центры находятся на равных расстояниях $d = 0{,}2$ м друг от друга.

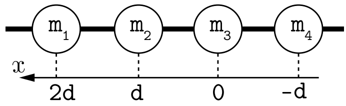


Рис. 84

На каком расстоянии x от центра третьего шара находится центр масс всей системы?

Решение. Найдем координату центра масс системы. Для этого выберем ось x, направив её, например, влево, причем начало координат совместим с телом массой m_3. Тогда координаты тел равны $2d$, d, 0 и $-d$. Откуда находим координату центра масс

$$x_c = \frac{m_1 \cdot 2d + m_2 \cdot d + m_3 \cdot 0 - m_4 \cdot d}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Центр масс находится левее тела массой m_3 на 5 сантиметров.

Задача 80. На каком расстоянии от дна находится центр масс цилиндрического стакана, имеющего высоту $h = 12$ см и диаметр $d = 8$ см, если толщина его дна в два раза больше толщины его стенок?

Решение. Пусть толщина стенок равна a, тогда толщина дна равна $2a$, плотность материала стакана равна ρ. Тогда масса дна равна $m_{\text{дно}} = \pi \dfrac{d^2}{4} \cdot 2a \cdot \rho$, масса боковых стенок равна $m_{\text{бок}} = \pi d \cdot h \cdot a \cdot \rho$.

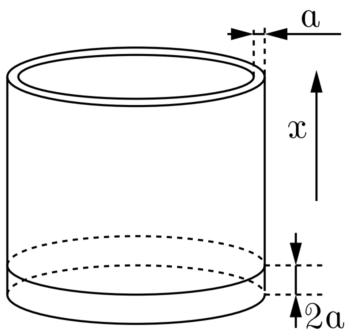


Рис. 85

Очевидно, что центр масс стенок (полый цилиндр) расположен на в его центре на высоте $h/2$ до дна стакана. Пусть x — расстояние от центра масс до дна, тогда расстояние от центра масс до центра масс стенок равно $h/2 - x$. Выберем вертикальную ось так, чтобы её начало совпадало с центром масс всего стакана. Тогда

$$x_c = \frac{m_{\text{бок}} \cdot \dfrac{h}{2} - x - m_{\text{дно}} \cdot x}{m_{\text{дно}} + m_{\text{бок}}} = 0, \qquad m_{\text{бок}} \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right) = m_{\text{дно}} \cdot x,$$

$$\pi d \cdot h \cdot a \cdot \rho \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right) = \pi \frac{d^2}{4} \cdot 2a \cdot \rho \cdot x, \qquad h\left(\frac{h}{2} - x\right) = \frac{d}{2}x,$$

$$h^2 - 2hx = dx, \qquad x = \frac{h^2}{2h + d} = 4{,}5 \text{ см.}$$

Ответ: $x = 4{,}5$ см.

Задача 81. Вблизи вершины клина массой M и длиной основания L удерживают небольшую шайбу массой m. Клин покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбу отпускают, и она соскальзывает к основанию клина. На какое расстояние при этом переместится клин?

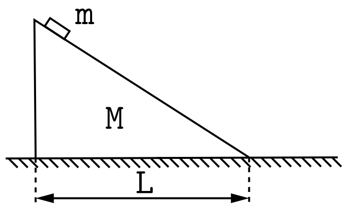


Рис. 86

Решение. Пусть клин переместился на расстояние S, в тот момент, когда шайба оказалась у его основания. Шайба же, переместилась по горизонтали на расстояние $L - S$(она переместилась на расстояние L относительно клина, при этом переместилась на расстояние S вместе с клином). Так как внешние силы на систему «клин–шайба» не имеют горизонтальных составляющих, то горизонтальная координата центра масс системы не меняется

$$m(L - S) = MS.$$

Откуда находим $S = \dfrac{m}{m + M}L$.

Ответ: $S = \dfrac{m}{m + M}L$.

Задача 82. Лягушка массы m_1 сидит на конце доски массы m_2 и длины L. Доска находится на поверхности пруда. Лягушка совершает прыжок вдоль доски так, что её начальная скорость v_0 (относительно воды) составляет с горизонтом угол α и оказывается на другом конце доски. Определите v_0. Сопротивлением воды пренебречь.

Решение. Так как на систему «лягушка-доска» в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, то скорость доски u после прыжка лягушка определим из закона сохранения импульса

$$m_1 v_0 \cos\alpha = m_2 u, \qquad u = \frac{m_1}{m_2} v_0 \cos\alpha,$$

причем скорость доски будет направлена в сторону, обратную направлению движения лягушки. Дальность полета лягушки определим из кинематики $L_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, время полета лягушки равно $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. За время движения лягушки, доска успеет сместиться на расстояние $L_2 = ut = \dfrac{m_1}{m_2} v_0 \cos\alpha \cdot \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \dfrac{m_1}{m_2}$ (это соотношение можно было также найти используя понятие центра масс). Отсюда можно сделать вывод, что длина доски равна $L = L_1 + L_2$,

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \frac{m_1}{m_2} = L, \qquad L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right),$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha \left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)}} = \sqrt{\frac{m_2 g L}{(m_1 + m_2) \sin 2\alpha}}.$$

Ответ: $v_0 = \sqrt{\dfrac{m_2 g L}{(m_1 + m_2) \sin 2\alpha}}$.

Задача 83[3]. На гладком полу стоит аквариум, заполненный водой плотностью ρ_0; объем воды V_0. Оказавшись на дне аквариума, жук объема V и плотности ρ через некоторое время начинает ползти по дну аквариума со скоростью u относительно него. С какой скоростью станет двигаться аквариум по полу? Массой сосуда пренебречь, уровень воды все время остается горизонтальным.

Решение. Для начала найдем положение центра масс системы. Тут мы воспользуемся приемом, похожим на метод отрицательных масс. Поместим вместо жука плотностью ρ и объемом V двух жуков объемом — одного плотностью, равной плотности воды ρ_0, а другого плотностью $\rho - \rho_0$. Сделав такую замену, мы можем найти центр масс аквариума, заполненного водой объемом $V + V_0$ и жука, плотность которого теперь $\rho - \rho_0$, который находится снаружи аквариума в той же самой точке: центры масс обоих систем совпадают.

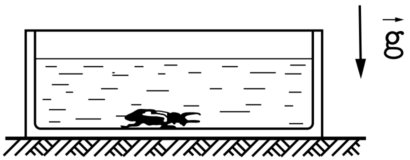


Рис. 87

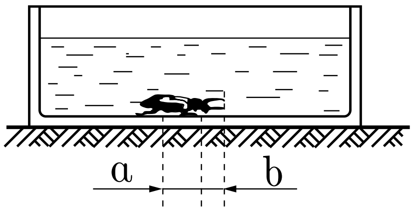


Рис. 88

Пусть расстояние от жука до центра масс равно a, а от центра аквариума — b. Тогда получаем:

$$a(\rho - \rho_0)V = b\rho_0(V + V_0).$$

Пусть жук сместился влево на малую величину x, аквариум при этом сместился право на величину y

$$(a - x)(\rho - \rho_0)V = (b - y)\rho_0(V + V_0),$$

откуда получаем соотношение

$$x(\rho - \rho_0)V = y\rho_0(V + V_0).$$

Так как x — перемещение жука в неподвижной системе отсчета, то с учетом того, что u — скорость в системе отсчета, связанная с аквариумом, получаем

$$(u - v)(\rho - \rho_0)V = v\rho_0(V + V_0),$$

$$u(\rho - \rho_0)V = v(\rho - \rho_0)V + v\rho_0(V + V_0),$$

$$u(\rho - \rho_0)V = v(\rho V - \rho_0 V + \rho_0 V + \rho_0 V_0),$$

$$u(\rho - \rho_0)V = v(\rho V + \rho_0 V_0),$$

$$v = u\frac{(\rho - \rho_0)V}{\rho V + \rho_0 V_0}.$$

Ответ: $v = u\dfrac{(\rho - \rho_0)V}{\rho V + \rho_0 V_0}.$

Задача 84[?]. Снаряд взрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L по горизонтали от пушки на два одинаковых осколка. Один из них вернулся к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упал второй осколок?

Решение. Так как снаряд взорвался в верхней точке траектории, то перед взрывом у снаряда была только горизонтальная составляющая скорости. Пусть это скорость равна v. Так как первый осколок вернулся в точку выстрела, то скорость осколка, полетевшего назад, по модулю также равна v. Пусть скорость второго осколка u, данная скорость также горизонтальна. Тогда по закону сохранения импульса

$$2mv = -mv + mu,$$

$$u = 3v.$$

Дальность полета тела, брошенного горизонтально с высоты h, равна $L = v\sqrt{2hg}$. А так как оба осколка полетели горизонтально, то второй осколок, имея скорость в три раза больше, также пролетит расстояние в три раза больше. Отсюда можно сделать вывод, что второй осколок упадет на расстоянии $4L$ от места выстрела.

Задача 85[3]. Ракета сечения S, двигаясь в космическом пространстве со скоростью u, попадает в облако неподвижной пыли плотности ρ. Какую силу тяги должны развивать двигатели ракеты, чтобы та могла продолжать двигаться с той же постоянной скоростью?

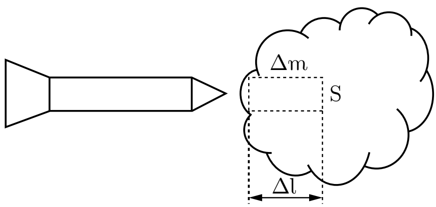


Рис. 89

Удары пылинок и ракету считать абсолютно неупругими, изменением массы ракеты пренебречь.

Решение. Рассмотрим небольшой участок времени Δt. За это время ракета пролетела расстояние $\Delta l = u \cdot \Delta t$. Масса пыли, содержащаяся в участке длиной Δl и площадью S равна $\Delta m = \rho S \Delta l$. По закону сохранения импульса импульс силы $F\Delta t$ идет на увеличение скорости пылинок от начальной (нулевой) до конечной (скорости ракеты).

$$F\Delta t = \Delta m u, \qquad F\Delta t = \rho S \Delta l u,$$

$$F = \rho S u \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho S u^2.$$

Ответ: $F = \rho S u^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 86[3]. Космонавт массы m_1 приближается к космическому кораблю массы m_2 с помощью легкого троса. Первоначально корабль и космонавт неподвижны, а расстояние межу ними равно l. Какое расстояние пройдут корабль и космонавт до встречи?

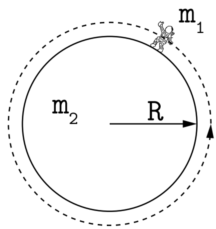


Рис. 90

Задача 87[3]. Космическая станция представляет собой цилиндр радиуса R и массы m_2. Космонавт массы m_1 начал круговой обход станции по её поверхности. Определите траекторию космонавта и траекторию центра станции. Первоначально космонавт и станция неподвижны.

Задача 88. Найдите положение центра масс системы касающихся друг друга шаров. Все шары имеют одинаковый диаметр $a = 3$ см, а их массы возрастают по закону $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 5m$, $m_N = (2N-1)m$, где $N = 500$. Плотность каждого шара постоянна.

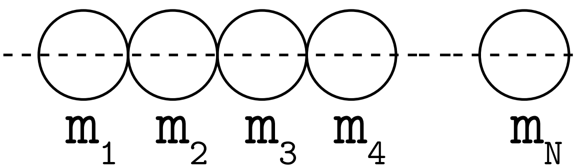


Рис. 91

Задача 89. После разрыва неподвижного снаряда образовались четыре осколка. Осколок массы m_1 полетел вертикально вниз со скоростью $v_1 = 150$ м/с, осколок массы $m_2 = 3$ кг —горизонтально на юг со скоростью $v_2 = 100$ м/с, осколок массы $m_3 = 1$ кг — горизонтально на восток. Осколок массы $m_4 = 3{,}5$ кг — полетел со скоростью $v_4 = 200$ м/с. Найти скорость осколка с массой m_3.

Задача 90[3]. Обезьяна массы m уравновешена противовесом на блоке A. Блок A уравновешен грузом массы $2m$ на блоке B. Система неподвижна. Как будет двигаться груз, если обезьяна начнет равномерно выбирать веревку со скоростью u относительно себя? Массой блоков и трением пренебречь.

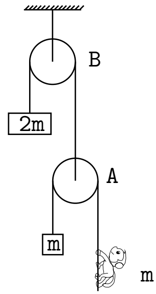


Рис. 92

Задача 91[3]. Космический корабль перед отделением последней ступени ракеты-носителя имел скорость v. После отбрасывания последней ступени его скорость стала равной $1{,}01v$, при этом отделившаяся ступень удаляется относительно корабля со скоростью $0{,}04v$. Какова масса последней ступени, если масса корабля m_0?

Работа и закон сохранения энергии

Энергия и её различные виды

Энергией называется общая количественная мера движения и взаимодействия всех видом материи. В этой главе мы рассмотрим основные виды энергии — механическую и внутреннюю. Механическая энергия, в свою очередь, подразделяется кинетическую (энергию движения), потенциальную (её еще часто называют энергией покоя). Внутренняя энергия — энергия суммарная кинетическая энергия движения всех молекул и потенциальная энергия их взаимодействия.

Кинетической энергией материальной точки массой m, двигающейся со скоростью v, называется неотрицательная скалярная величина

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Также часто энергию обозначают буквами K, T, W_k. В данном пособии для обозначения кинетической энергии мы будем использовать букву K. Единицей измерения энергии в Международной системе единиц (СИ) является *Джоуль* (Дж).

Потенциальной энергией называется энергия, которой обладает тело, расположенное на определенной высоте в гравитационном поле. Потенциальная энергия равна произведению массы тела m, ускорения свободного падения g и высоты h

$$E_{\text{пост}} = mgh.$$

Также потенциальную энергию обозначают П, $W_{\text{п}}$.

Потенциальной энергией деформации пружины определяют формулой

$$E = \frac{kx^2}{2}.$$

Как и потенциальная энергия силы тяжести, потенциальная энергия деформированной пружины определена не однозначно (с точностью до константы). Чаще всего константу выбирают так, что в недеформированном состоянии потенциальная энергия пружины равна нулю. Тогда величина x принимает смысл удлинения пружины относительно нерастянутого состояния.

Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести. Будем считать, что никакие другие (кроме силы тяжести) на тело не действует. В таком случае выполняется *закон сохранения механической энергии* — сумма кинетической и потенциальной энергии остается неизменной

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}\,.$$

Зная скорости и высоты в начале и в конце движения, закон сохранения механической энергии можно записать в следующем виде

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

Данный закон можно сформулировать и так — изменение кинетической энергии равно изменению потенциальной энергии.

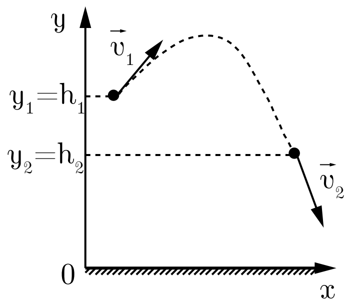


Рис. 93

Общефизический закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии — один из наиболее фундаментальных законов физики. Суть его заключается в следующем — энергия системы сохраняется, она никуда не исчезает и ниоткуда не появляется, а переходит из одного состояния в другое.

Ранее мы рассматривали движение точки при условии, что внешние силы отсутствуют. Если же это не так, то механическая (кинетическая и потенциальная) энергия не сохраняется. Следовательно, изменение механической энергии равно работе внешних сил, действующих на данную систему. В виде формул этот закон формулируется следующим образом

$$K_{\text{нач}} + \Pi_{\text{нач}} + A_{\text{вн}} = K_{\text{кон}} + \Pi_{\text{кон}} + Q,$$

где $K_{\text{нач}}$ — суммарная кинетическая всех тел в начале процесса,
$\Pi_{\text{нач}}$ — суммарная потенциальная всех тел в начале процесса,
$A_{\text{вн}}$ — суммарная работа всех внешних сил, действующих на систему,
$K_{\text{кон}}$ — суммарная кинетическая всех тел в конце процесса,
$\Pi_{\text{кон}}$ — суммарная потенциальная всех тел в конце процесса,
Q — полная тепловая энергия, выделяемая в процессе.

Упругие и неупругие взаимодействия

Часто в задачах рассматриваются два и более тел, взаимодействующих друг с другом. При кратковременных взаимодействиях (соударениях, столкновениях, ударах) возникают ударные силы, вычисление которых часто представляет большую трудность. Это не позволяет использовать законы Ньютона. Применение же законов сохранения энергии и импульса позволяет определить значения скоростей до и после соударений, исключая промежуточные значения. Соударения бывают нескольких типов.

При *абсолютно неупругих соударениях* тела «слипаются», двигаются как единое целое с одинаковыми скоростями. При абсолютно неупругих соударениях не сохраняется механическая энергия и выделяется тепло. Примерами абсолютно неупругих соударений являются шарик, попадающий с тележку с песком; столкновение кусков пластилина, застревающая в бруске пуля и проч.

При *абсолютно упругих соударениях* сохраняется механическая энергия, тепло не выделяется. Хорошей моделью абсолютно упругого соударения являются удары бильярдных шаров.

Центральное соударение — соударение, при котором центры тел двигаются вдоль одной прямой. При таких соударениях движение до и после отскока происходит вдоль одной прямой.

В случае *нецентральных соударений*, тела после отскока начинают двигаться вдоль плоскости. Физика процесса остается такой же, однако задача осложняется тем, что приходится проецировать импульс не только на ось x, но и на ось y. Примеры подобные взаимодействий будут рассмотрены в данном учебном пособии ниже.

Задачи с решениями

Задача 92. К потолку прикреплена веревка массой $m = 100$ г и длиной $L = 2$ м, к которой через небольшой блок массой $2m$ подвешен груз, имеющий массу $4m$. Какую минимальную работу требуется совершить внешней вертикальной силе, приложенной к свободному концу веревки в такой системе, чтобы поднять свободный конец веревки на $L/2$? Длиной части веревки, огибающей блок, можно пренебречь.

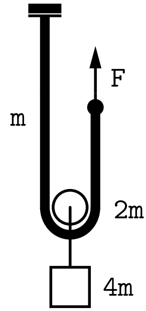


Рис. 94

Решение. Требование минимальности работы подразумевает то, что груз поднимается вверх медленно и то, что процесс происходит на участке, где приложенная сила минимальна.

Из условия движения груза $4m$ без ускорения следует, что около блока сила натяжения веревки $T = 3mg$. Условие равномерного подъема свободного конца веревки длиной x позволяет найти внешнюю силу F

$$F = T + m\frac{x}{L}g.$$

Видно, что сила минимальна на начальном этапе подъема, когда свободный конец веревки находится около блока. Так как F меняется линейно, работа может быть найдена как площадь трапеции на графике зависимости $F(x)$ или через среднюю силу (метод поиска работы через площадь под графиком является более «строгим»)

$$A = \frac{3mg + 3{,}5mg}{2} \cdot \frac{L}{2} = 1{,}625mgL = 3{,}25 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 3{,}25$ Дж.

Задача 93. Гладкую горку высотой h с постоянным углом наклона α перемещают с постоянной скоростью v относительно Земли (наклонной плоскостью вперед) по горизонтальной поверхности. С неё начинает соскальзывать (без начальной скорости относительно горки) небольшая шайба массы m. Вычислите работу, которую за время всего спуска совершит над шайбой сила N реакции горки (в системе отсчета, связанной с Землей).

Решение. В системе отсчета, связанной с горкой (движущейся равномерно со скоростью v относительно земли), сила нормальной реакции горки всегда направлена перпендикулярно мгновенной скорости шайбы и поэтому работы не совершает. В этой системе отсчета закон сохранения энергии для шайбы выглядит следующим образом:

$$mgh = \frac{mu^2}{2},$$

где u — скорость шайбы относительно горки в конце спуска.

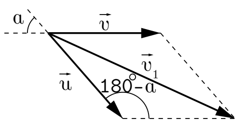


Рис. 95

Откуда находим $u = \sqrt{2gh}$. В системе отсчета, связанной с землей, скорость шайбы v_1 может быть найдена с помощью теоремы косинусов. По закону сложения скоростей

$$v_1^2 = v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha.$$

В этой системе отсчета закон сохранения энергии применительно к шайбе примет вид:

$$A_N + mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}.$$

После подстановки получим:

$$A_N + mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha)}{2},$$

$$A_N + mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + mvu\cos\alpha,$$

$$A_N = mvu\cos\alpha, \qquad A_N = mv\sqrt{2gh}\cos\alpha.$$

Ответ: $A_N = mv\sqrt{2gh}\cos\alpha.$

Задача 94. Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью v_0, соударяется с двумя такими же, соприкасающимися между собой шарами B и C. Найти скорости шарик после соударения, считая соударение абсолютно упругими.

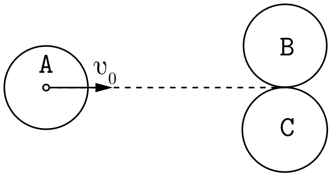


Рис. 96

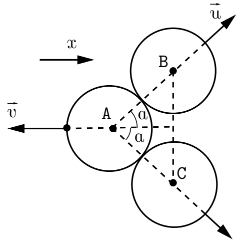


Рис. 97

Решение. Заметим, что задача тела в задаче имеют осевую симметрию (так как массы равны). Из этого делаем вывод, что скорости, с которыми будут двигаться шары B и C — равны. Пусть после соударения шар A двигается со скоростью v в обратную сторону первоначального движения, а шары B и C со скоростью u, направленной под углом α к направлению первоначального движения шара A. Так как у шаров B и C после удара скорости направлены вдоль прямой, соединяющей их центры, то из треугольника ΔABC делаем вывод, что $\alpha = 30°$ (ΔABC равносторонний).

Запишем закон сохранения импульса (в проекции на ось x)

$$mv_0 = -mv + 2mu\cos\alpha.$$

Так как удар упругий, то запишем закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{mu^2}{2}.$$

Решим данную систему. Для этого сгруппируем уравнения, сократив на массу.

$$\begin{cases} v_0 + v = 2u\cos\alpha, \\ v_0^2 - v^2 = 2u^2. \end{cases}$$

После почленного деления получим:

$$\frac{(v_0 - v)(v_0 + v)}{v_0 + v} = \frac{2u^2}{2u\cos\alpha},$$

$$\begin{cases} (v_0 - v)\cos\alpha = u, \\ v_0 + v = 2u\cos\alpha. \end{cases}$$

С учетом того, что $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, после очередного деления получим

$$\sqrt{3}\frac{v_0 - v}{v_0 + v} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Откуда находим $v = \dfrac{v_0}{5}$. Подставив данный результат в «закон сохранения импульса», получим $\dfrac{6}{5}v_0 = u\sqrt{3}$, откуда находим $u = \dfrac{6}{5\sqrt{3}}v_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}v_0$.

Задача 95. Два груза массой m каждый связаны нитью. Между грузами вставлена легкая упругая пружина, сжатая на величину x. Система движется со скоростью v вдоль прямой, перпендикулярной её оси. Нить пережигают, и грузы разлетаются по углом 90°. Найти коэффициент упругости пружины.

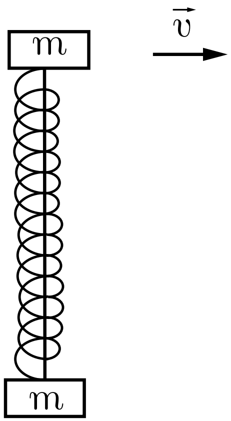


Рис. 98

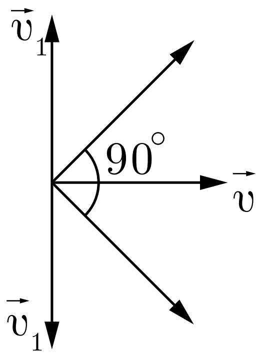


Рис. 99

Решение. Перейдем в систему отсчета, двигающуюся со скоростью центра масс

$$\vec{v_c} = \frac{m\vec{v} + m\vec{v}}{m + m} = \vec{v}.$$

В данной системе координат грузы покоятся, а после отрыва разлетятся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Так как в неподвижной системе отсчета угол разлета 90°, то в силу теоремы Пифагора $v_1 = v$. Тогда по закону сохранения энергии

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{2mv_1^2}{2} = mv^2.$$

откуда находим $k = \dfrac{2mv^2}{x^2}$.

Ответ: $k = \dfrac{2mv^2}{x^2}$.

Задача 96. По гладкой горизонтальной спице навстречу друг другу скользят две группы одинаковых маленьких бусинок.

В первой группе их число — n, а во второй — m. Все скорости бусинок разные, причём в первой группе $v_1 > v_2 > v_3 > \ldots > v_n$, а во второй — $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n$.

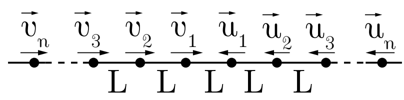


Рис. 100

В некоторый момент времени t_0 расстояние между каждой парой соседних бусинок равно L. Вычислите следующие величины: число соударений N бусинок друг с другом, если удары абсолютно упругие, время τ, прошедшее от момента t_0 до последнего соударения.

Решение. Запишем законы сохранения энергии и импульса для лобового столкновения двух одинаковых бусинок, движущихся навстречу друг другу со скоростями v и u

$$\begin{cases} mv - mu = mu_1 + mv_1, \\ \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{mu^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mu_1^2}{2}. \end{cases}$$

откуда, решая данную систему, находим $u_1 = -v$, $v_1 = u$. То есть бусинки просто обмениваются скоростями. С другой стороны, если до столкновения одна бусинка двигалась вправо со скоростью v, то после соударения в ту же сторону стала двигаться другая бусинки с той же самой скоростью. Если бусинки маленькие, то можно считать, что столкновения не было, а бусинки «прошли» сквозь друг друга.

При рассмотрении столкновения с этой точки зрения становится понятно, что каждая такая прозрачная бусинка из первого набора столкнется со всему бусинками из второго набора, поэтому столкновений будет $N = mn$.

Завершающее столкновение произойдет между самыми последними бусинками, то есть самыми медленными. В момент времени t_0 расстояние между ними $(m+n-1)L$, поэтому искомое время

$$\tau = (m+n-1)\frac{L}{v_n + v_m}.$$

Ответ: $N = mn$, $\tau = (m+n-1)\dfrac{L}{v_n + v_m}$.

Задача 97. На гладкую горизонтальную спицу надеты две бусинки массами m и $2m$, связанные легкой нитью длиной $2L$. К середине нити прикреплен груз массой m. Сначала груз удерживают так, что бусинки на спице отстоят друг от друга на расстоянии $2L$. Затем груз отпускают без толчка. Вычислите скорости бусинок на спице перед их соударением. Известно, что в течение всего времени движения системы нити не провисают.

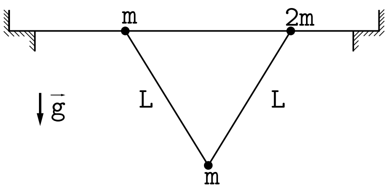


Рис. 101

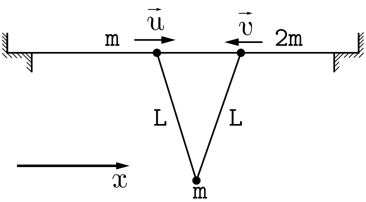


Рис. 102

Решение. Пусть проекции скоростей бусинок массами m и $2m$ равны u и $-v$ соответственно. Нити в этот момент вертикальны (на рисунке они не вертикальны для удобства), поэтому скорость груза может быть направлена только горизонтально, а так как в любой момент времени груз расположен на одной вертикали с серединой отрезка, соединяющего верхние бусинки (серединный перпендикуляр), проекция его скорости на ось x равна среднему арифметическому проекций скоростей бусинок, то есть $\dfrac{u-v}{2}$.

Запишем законы сохранения импульса (в проекции на ось x) и энергии

$$\begin{cases} mu - 2mv + m\dfrac{u-v}{2} = 0, \\ \dfrac{mu^2}{2} - \dfrac{2mv^2}{2} + \dfrac{m\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}{2} = mgL, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} 3u - 5v = 0, \\ 5u^2 - 9v^2 - 2uv = 8mgL. \end{cases}$$

Решая данную систему методом подстановки, находим $u = 5\sqrt{\dfrac{gL}{22}}$, $v = 3\sqrt{\dfrac{gL}{22}}$.

Ответ: $u = 5\sqrt{\dfrac{gL}{22}}$, $v = 3\sqrt{\dfrac{gL}{22}}$.

Задача 98. Легковой автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Если водитель заблокирует задние колеса, тормозной путь автомобиля составит $L_1 = 28$ м. Если водитель заблокирует передние колеса, тормозной путь составит $L_2 = 16$ м. Каким окажется тормозной путь машины, если заблокировать все четыре колеса? Известно, что центр масс автомобиля расположен на равных расстояниях от осей передних и задних колес, диаметр которых одинаков.

Решение. Пусть центр масс C автомобиля расположен на высоте h относительно полотна дороги, расстояние между осями передних и задних колес равно l.

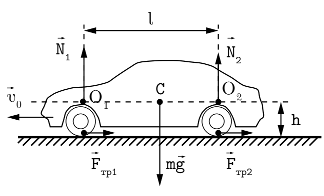


Рис. 103

Для случая торможения задними колесами запишем уравнение моментов относительно точки O_1

$$N_2 l - mg\frac{l}{2} + \mu N_2 h = 0.$$

Отсюда находим $N_2 = \dfrac{mg}{2\left(1 + \mu\dfrac{h}{l}\right)}$.

Работа силы трения равна $A_1 = F_{\text{тр}_2} L_1 = \mu N_2 L_1 = \mu \dfrac{mgL_1}{2\left(1 + \mu \dfrac{h}{l}\right)}$.

Аналогично при торможении передними колесами уравнение моментов относительно точки O_2 имеет вид

$$mg\frac{l}{2} - N_1 l + \mu N_1 h = 0.$$

Откуда находим $N_1 = \dfrac{mg}{2\left(1 - \mu \dfrac{h}{l}\right)}$. Работа силы трения равна $A_2 =$ $= F_{\text{тр}_1} L_2 = \mu N_1 L_2 = \mu \dfrac{mgL_2}{2\left(1 - \mu \dfrac{h}{l}\right)}$.

При торможении всеми четырьмя колесами работа силы трения $A_3 =$ $= \mu mgL_3$. Поскольку $\dfrac{mv_0^2}{2} = A_1 = A_2 = A_3$ (машина полностью остановилась), то, совместно решая полученные уравнения, получим $L_3 =$ $= \dfrac{L_1 + L_2}{4}$.

Ответ: $L_3 = \dfrac{L_1 + L_2}{4}$.

Задача 99. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Кубики соединены пружинкой жесткостью k. Длина пружинки в нерастянутом состоянии l_0.

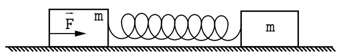


Рис. 104

На левый кубик внезапно начинает действовать сила $\vec{F}$, постоянная по модулю и направлению. Найдите минимальное и максимальное расстояние между кубиками при движении системы.

Решение. Когда расстояние l между кубиками минимально или максимально, оба кубика движутся с одинаковой скоростью $\vec{v}$ и кинетическая энергия системы равна $2\dfrac{mv^2}{2} = mv^2$. При этом потенциальная энергия системы равна потенциальной энергии сжатой пружины, т. е. $\dfrac{kx^2}{2}$ (где изменение длины пружины считается положительным, если длина l пружины меньше l_0, и отрицательным, если длина l пружины больше l_0). Полная энергия система равна сумме кинетической и потенциальной энергии, т. е. $mv^2 + \dfrac{kx^2}{2}$. Так как эту энергию система обрела благодаря работе силы $\vec{F}$, то

$$FL = mv^2 + \frac{kx^2}{2}, \tag{5}$$

где L — расстояние, которое прошел левый (по рисунку) кубик к тому моменту, когда длина пружины стала минимальной. Если S — расстояние, пройденное центром масс системы, то

$$L = S + \frac{1}{2}l_0 - \frac{1}{2}(l_0 - x) = S + \frac{x}{2}.$$

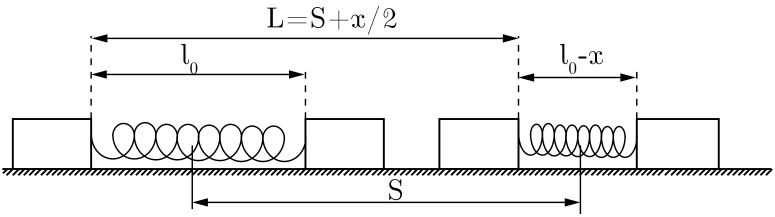


Рис. 105

Скорость $\vec{v}$ кубиков равна скорости центра масс системы. Так как на систему действует постоянная внешняя сила, то центр масс движется равноускоренно с ускорением $a = \dfrac{F}{m}$.

Поэтому, обозначив через t время от начала движения до того момента, когда длина пружины стала равна $l_0 - x$, можно записать

$$v = at, \qquad\qquad L = \frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Подставляя эти выражения для L и v в уравнение (5), получим:

$$F\left(\frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}\right) = m(at)^2 + \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{F^2t^2}{4m} + \frac{x}{2}F = \frac{F^2t^2}{4m} + \frac{kx^2}{2},$$

или $Fx = kx^2$. Решениями данного уравнения являются значения $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{F}{k}$.

Таким образом, минимальное расстояние $l_{min} = l_0 - x_2 = l_0 - \dfrac{F}{k}$, и максимальное $l_{max} = l_0 - x_1 = l_0$.

Ответ: $l_{min} = l_0 - \dfrac{F}{k}$, $l_{max} = l_0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 100. В глубоком цилиндрическом сосуде с внутренним диаметром находится вода, в которой дном вниз плавает тонкостенный металлический стакан массой m и высотой H. Благодаря направляющим стенки стакана и цилиндра остаются параллельными. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы утопить этот стакан, то есть заставить его пойти ко дну? Известно, что утопленный стакан не всплывает, а максимальная масса вмещаемой им воды равна M.

Задача 101. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициент трения мешка о пол $\mu = 0{,}7$. Где остановится мешок?

Задача 102. Какой должна быть минимальная мощность насоса, поднимающего воду по трубе на высоту $h = 10$ м? Сечение трубы $S = 10$ см^2; насос за секунду перекачивает воду объемом $V_t = 10$ (л/с).

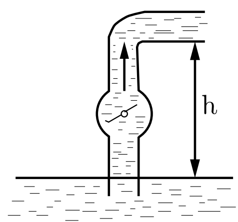


Рис. 106

Задача 103. Горка представляет собой плавный переход между двумя высокими поверхностями, отстоящими друг от друга по высоте на h (см. рис. 107). На горке и плоских поверхностях достаточно часто расположены небольшие шероховатые массивные валики (расстояние между осями соседних валиков равно l), по которым катится длинный тяжелый ковер. Определите установившуюся скорость ковра?

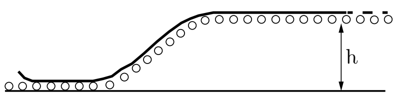


Рис. 107

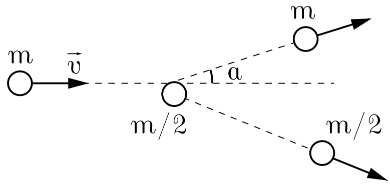


Рис. 108

Задача 104. Частица массой m, движущаяся со скоростью v, налетает на покоящуюся частицу массой $m/2$ и после упругого соударения отскакивает от неё под углом $\alpha = 30°$ к направлению своего первоначального движения (см. рис. 108). С какой скоростью начнет двигаться вторая частица?

Задача 105[3]. При упругом столкновении налетающей частицы с покоящейся первая полетела под углом α к направлению первоначального движения, а вторая — под углом β. Найдите отношение масс этих частиц.

Примечание. Данная задача может вызвать некоторые математические трудности.

Представление о колебательных процессах

Колебаниями называются процессы, в той или иной степени повторяющиеся во времени. Если мы говорим, что система колеблется, то под этим подразумевается, что некоторая физическая величина, характеризующая систему, совершает колебания, т. е. изменяется, неоднократно принимая одно и то же значение.

Колебания некоторой величины S называются периодическими, если все значения этой величины полностью повторяются через одно и то же время T, называемое *периодом*. Это означает, что $S(t) = S(t+T)$ для любого момента времени t. Говорят, что за время одного периода совершается одно колебание.

Частотой периодических колебаний $\nu = \dfrac{1}{T}$ называется количество колебаний в секунду. В системе СИ единицей измерения частоты служит *герц* (Гц), 1 Гц $= 1$ с$^{-1}$.

Пусть периодически колеблющаяся величина S меняется в пределах от $S_0 - A$ до $S_0 + A$, где $A > 0$. Тогда говорят, что величина S колеблется с амплитудой A около значения S_0.

Если величина S меняется по закону $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то такие колебания называются *гармоническими*. Величина ω называется *циклической (круговой) частотой*, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. Величина $\omega t + \varphi_0$ называется *фазой колебаний*, а φ_0 — *начальной фазой*.

При гармонических колебаниях максимальная скорость (максимальная скорость у тела в положении равновесия) связана с циклической частотой соотношением $v_{max} = A\omega$, а максимальное ускорение (ускорение максимально в крайних положениях) $a_{max} = v_{max}\omega = A\omega^2$. Приводим данные соотношения без вывода.

Гармонические колебания и их характеристики

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая гармонические колебания. При смещении из положения равновесия она испытывает действие возвращающей силы F, пропорционально смещению x:

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

где k — коэффициент жесткости системы.

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причем частота не зависит от амплитуды.

Если имеется еще и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает свободные колебания. Если же присутствует внешняя сила, зависящая от времени, то говорят, что осциллятор испытывает вынужденные колебания. Примерами гармонического осциллятора являются математический и пружинный маятники.

Пружинным маятником называется система, состоящая из пружины с коэффициентом жесткости k, один конец которой жестко закреплен, а на втором находится груз массой m (см. рис. 109).

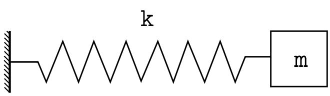


Рис. 109

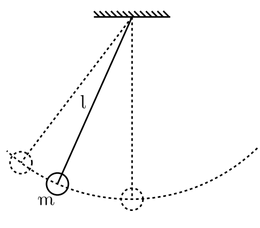


Рис. 110

Период колебаний пружинного маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Математическим маятником называется небольшое (точечное) тело массой m, подвешенное на невесомой, нерастяжимой нити длиной l (см. рис. 110).

Период колебаний математического маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Как видно из формулы, период колебаний математического маятника не зависит от массы груза.

Основные методы решения задач

Часто в задачах повышенной сложности просят найти период малых колебаний некой системы. Есть два основных приема, чаще всего применяемых для поиска данного периода. Первый из них — энергетический. Суть данного метода заключается в следующем: записывается закон сохранения механической энергии при малом отклонении Δx от положения равновесия. Далее, для нахождения периода колебаний, необходимо брать производную. После взятия производной получается уравнение гармонических колебаний, откуда легко находится период. А данном учебном пособии мы этим методом пользоваться не будем, так как для его применения требуется навыки взятия производной. Второй метод — силовой. Для этого необходимо показать, что сила, возвращающая тело в положение равновесия, линейно зависит от малого смещения Δx, притом она должна быть направлена против данного смещения. Другими словами, требуется показать, что $\vec{F}(\Delta x) = -k\Delta\vec{x}$, где k — некий коэффициент пропорциональности. Тогда период малых колебаний определяем по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где m — масса тела, совершающего колебания. Следует отметить, что большую часть задач можно решать либо первым, либо вторым способом.

Задачи с решениями

Задача 106. Груз массой m привязан нитью, перекинутой через блок, к другому грузу, который удерживается на гладком горизонтальном столе пружиной, прикрепленной к стене. Нить пережигают, и груз на столе начинает колебаться с амплитудой A. Найдите жесткость пружины.

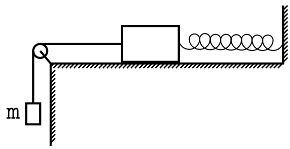


Рис. 111

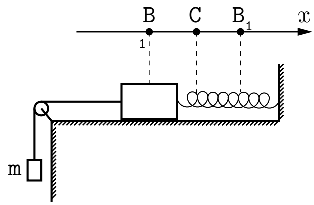


Рис. 112

Решение. Направим ось x вдоль направления возможного перемещения на столе. До пережигания нити груз на столе (какая-нибудь его точка, например центр масс) находился в точке B, (в этой точке тело находилось в положении равновесия). Удлинение пружины в этом случае равно в этом случае равно $BC = x_1 = \dfrac{mg}{k}$.

После пережигания нити равновесное положение сместилось в точку C, соответствующей нерастянутой пружине. Так как в точке B скорость равна нулю, то полная механическая энергия равна $E_{\text{полн}}$. При колебаниях тела в точках максимального отклонения скорость равна нулю, значит точка B соответствует максимальному отклонению тела от положения равновесия, а отрезок BC — амплитуда колебаний (как и отрезок CB_1). Амплитуда колебаний $A = BC = CB_1 = x_1 = \dfrac{mg}{k}$. Откуда находим $k = \dfrac{mg}{A}$.

Ответ: $k = \dfrac{mg}{A}$.

Задача 107. Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Система совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом $T = 1$ с и максимальным значением скорости $v = 0{,}5$ м/с.

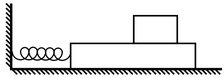


Рис. 113

При этом доска и брусок неподвижны друг относительно друга. При каких коэффициентах трения такие колебания возможны?

Решение. Доска совершает колебания под действием силы упругости пружины, брусок же совершает колебания под действием силы трения, возникающей между телами. По условию тела двигаются как единое целое (с одинаковым ускорением), величина ускорения определяется формулой $a = v\omega = A\omega^2$, где v — максимальная скорость тела, A — амплитуда колебаний, ω — циклическая частота, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T — период колебаний системы. Колебания возможны, когда сила трения способна обеспечить ускорение бруска, $\mu mg \geq ma$. После подстановки получаем:

$$\mu mg \geq mv\omega = mv\frac{2\pi}{T}.$$

Откуда находим $\mu \geq \dfrac{2\pi}{T} \cdot \dfrac{v}{g} \approx 0{,}3$.

Ответ: $\mu \geq 0{,}3$.

Задача 108. Найти период малых колебаний цилиндрического поплавка плотностью ρ и высотой l, плавающего в жидкости плотностью ρ_0.

Решение. В положении равновесия силы, действующие на поплавок, равны, $F_{\text{арх}} = mg$. Пусть x — глубина погружения поплавка в жидкость, тогда $\rho_0 gSx = mg = \rho gSl$.

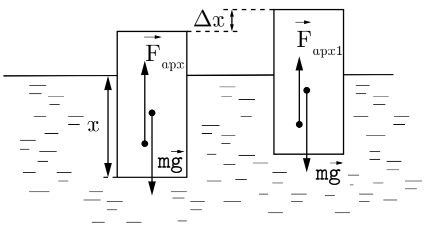


Рис. 114

Рассмотрим малое смещение поплавка вверх на величину Δx. В этом случае сила, возвращающая систему в исходное положение ΔF, равна:

$$\Delta F = mg - F_{\text{арх}_1},$$

где $F_{\text{арх}_1}$ —сила Архимеда, действующая на поплавок после его всплытия на Δx, $F_{\text{арх}_1} = rho_o gS(x - \Delta x)$. Откуда получаем:

$$\Delta F = mg - \rho_0 gS(x - \Delta x) = \rho_0 gSx - \rho_0 gS\Delta x + \rho_0 gS\Delta x = \rho_0 gS\Delta x.$$

Так как $\Delta F \sim \Delta x$ (коэффициент пропорциональности k при этом равен $k = \rho_0 gS$), то поплавок совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Sl}{\rho_0 gS}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{\rho_0 g}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho l}{\rho_0 g}}$.

Задача 109. В планете, имеющей форму шара, пробурили сквозной тоннель, проходящий через её центр. В тоннель сбросили небольшое тело массой $m = 1$ кг. Определите, какую скорость будет иметь тело в центре планеты. Через какое время тело вернется в исходную точку первый раз? Ускорение свободного падения на поверхности равно $g = 10$ м/с^2.

Решение. Ранее в данном пособии мы показали, что сила притяжения имеет вид $F(x)\dfrac{mg}{R}x$. Значит тело под действием этой силы совершает гармонические колебания, так как возвращающая сила пропорциональна смещению тела $F(x) \sim x$ с коэффициентом пропорциональности $k = \dfrac{mg}{R}$, откуда находим период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m}mg/R = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

В исходную точку тело вернется через 1 период, $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 84$ мин.

Циклическая частота ω в этом случае равна $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$. А так как тело совершает колебания с амплитудой A, равной радиусу планеты $A = R$, то максимальная скорость v_{max} в центре планеты равна $v_{max} = A\omega = \sqrt{gR} \approx 8$км/с.

Заметим, что результаты такие же, как и для движения искусственного спутника по круговой орбите.

Задача 110[3]. Доска массы m лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков L, коэффициент трения при скольжении доски по катку μ. Найдите период продольных колебаний доски.

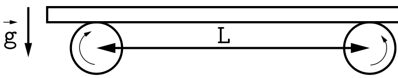


Рис. 115

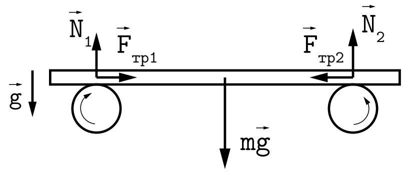


Рис. 116

Решение. Доска находится в равновесии, когда её центр расположен по середине между катками. Действительно, в этот момент $N_1 = N_2 = \frac{mg}{2}$, значит силы трения, действующие на доску со стороны катков, равны: $F_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}_2} = \mu\frac{mg}{2}$, направлены «внутрь», навстречу друг к другу.

Пусть доска сместилась вправо на небольшое расстояние x. Запишем равенство моментов сил относительно точки A:

$$mg\left(\frac{L}{2} + x\right) = N_2 L.$$

Откуда находим $N_2 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right)$. Из равенства сил в проекции на вертикальное направление $N_1 + N_2 = mg$ находим $N_1 = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)$. Силы трения тогда равны $F_{\text{тр}_1} = \mu N_1 = \mu mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)$, $F_{\text{тр}_2} = \mu N_2 = \mu mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right)$. При небольшом смещении на расстояние x на доску начинает действовать возвращающая сила $\Delta F = F_{\text{тр}_2} - F_{\text{тр}_1}$, $\Delta F = \frac{2\mu mg}{L}x$. Так как возвращающая сила пропорциональна смещению с коэффициентом пропорциональности $k = \dfrac{2\mu mg}{L}$. Откуда находим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\mu mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2\mu g}}$.

Задача 111. Найти период колебаний шарика, укрепленного на середине натянутой струны длиной l, масса шарика m. Силу натяжения струны считать постоянной и равной F, массой струны и силой тяжести пренебречь. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

Решение.

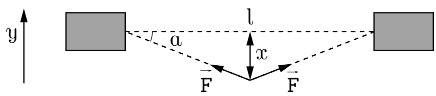


Рис. 117

Рассмотрим небольшое отклонение шарика от положения равновесия на величину x, $x << l$. Из геометрических соображений следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{l/2} = \dfrac{2x}{l}$, а в силу малости угла α, можно сделать вывод, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \dfrac{2x}{l}$.

В положение равновесия шарик возвращает суммарная проекция силы натяжения F на ось y:

$$\Delta F = 2F\sin\alpha \approx 2F\cdot\frac{2x}{l} = \frac{4F}{l}x.$$

Так как возвращающая сила линейно зависит от смещения с коэффициентом пропорциональности $k = \dfrac{4F}{l}$, то под действием данной силы шарик совершает гармонические колебания. Период малых колебаний в таком случае равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{4F/l}} = \pi\sqrt{\dfrac{ml}{F}}$.

Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{ml}{F}}$.

Задача 112[2]. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найти период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда S, масса ртути m, плотность ртути ρ.

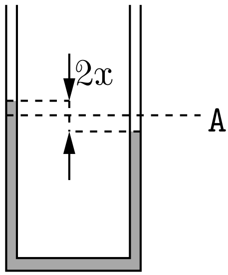


Рис. 118

Решение. В положении равновесия (состояние A) уровни ртути в левом и правом коленах равны. Пусть ртуть в левом колене сместилась на x относительно положения равновесия. Так как сечения сосудов равны, то в правом колене уровень понизился на x. Отсюда можно сделать вывод, что разница уровней в коленах составляет $2x$. При смещении уровней на ртуть действует возвращающая сила, равная силе тяжести столбика ртути высотой $2x$ в левом колене: $F = \rho g S \cdot 2x$.

Так как сила, возвращающая систему в положение равновесия, пропорциональна смещению с коэффициентом пропорциональности $k = 2\rho g S$, то ртуть совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}.$$

Ответ: $T = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho g S}}$.

Задача 113. Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой m с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью K движется со скоростью v_0. Муфта массой $4m$ покоится.

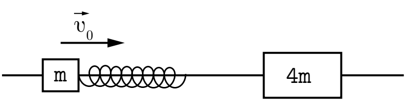


Рис. 119

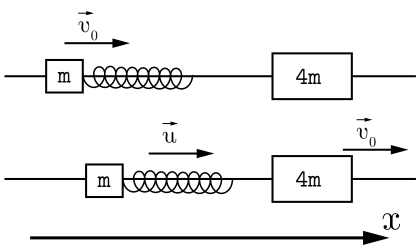


Рис. 120

Размеры муфт намного меньше длины пружины. Определить скорость муфты массой $4m$ после отрыва от пружины. Определить время контакта муфты массой $4m$ с пружиной.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух муфт. Так как по горизонтали внешние силы не действуют, то система вдоль горизонтальной оси является замкнутой — сохраняются энергия и импульс. Пусть после отрыва муфты $4m$ от пружины её скорость равна v, а скорость муфты, массой m, равна u, причем обе направлены в ту же сторону, куда и v_0. Запишем законы сохранения импульса (в проекции на ось x) и энергии:

$$\begin{cases} mv_0 = mu + 4mv, \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{4mu^2}{2}. \end{cases}$$

После группировки получим

$$\begin{cases} m(v_0 - u) = 4mv, \\ m(v_0^2 - u^2) = 4mv^2. \end{cases} \Rightarrow v_0 + u = v, \qquad u = v - v_0.$$

После подстановки получим $mv_0 = m(v - v_0) + 4mv$. После решения данного уравнения найдем $v = \dfrac{2}{5}v_0$.

Для нахождения времени контакта муфт перейдем в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью центра масс, $v_C = \dfrac{mv_0}{5m} = \dfrac{v_0}{5}$. В этой системе отсчета скорости муфт равны $v_1 = v_0 - \dfrac{v_0}{5} = \dfrac{4}{5}v_0$ для муфты массой m, и $v_2 = -\dfrac{v_0}{5}$ для муфты массой $4m$.

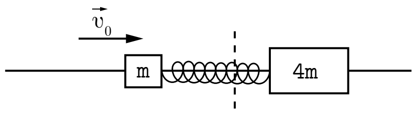


Рис. 121

Обозначим длину недеформированной пружины через L, тогда расстояние от муфты массой m до центра масс равно $l_1 = \dfrac{L}{5}$, а от муфты массой $4m$ до центра масс равно $l_2 = \dfrac{4L}{5}$.

После соприкосновения пружины с правой муфтой, в системе центра масс обе муфты будут двигаться по гармоническому закону, совершая колебания — муфта массой m совершает колебания на пружине жесткостью $K_1 = \dfrac{5}{4}K$, муфта же массой $4m$ совершает колебания на пружине жесткостью $K_2 = 5K$ (тут мы воспользовались очевидным фактом, что при уменьшении длины пружины в α раз её жесткость увеличивается в такое же число раз).

Муфта массой $4m$ не прикреплена к пружине, значит время соприкосновения будет равно $t = \dfrac{T_2}{2}$, где T_2 — период колебаний груза массой $4m$ на пружине жесткостью $5K$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4m}{5K}}$. Откуда время соприкосновения $t = \dfrac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{4m}{5K}}$.

Ответ: $v = \dfrac{2}{5}v_0$, $t = \pi\sqrt{\dfrac{4m}{5K}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 114. Доска массой m и брусок массой $9m$ колеблются вдоль прямой как единое целое на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α под действием пружины жесткостью k, прикрепленной к бруску (см. рис. 122). Коэффициент трения скольжения между бруском и доской равен μ. При какой максимальной амплитуде колебаний такие колебания возможны?

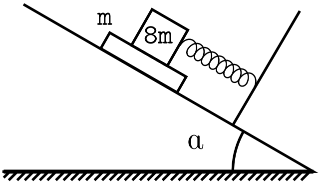


Рис. 122

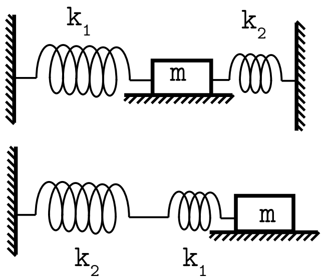


Рис. 123

Задача 115. Найти периоды колебаний осцилляторов, изображенных на рисунке 123. Масса тела m, жесткости пружин k_1 и k_2.

Задача 116. В высоком цилиндрическом сосуде радиуса $R = 4$ см с жидким гелием при температуре, близкой к абсолютному нулю (так как гелий является сверхтекучим, то трением можно пренебречь), вертикально плавает ареометр — пластмассовый цилиндр радиуса $r = 3{,}9$ см и массой $m = 500$ г. В результате малых колебаний ареометра уровень гелия в сосуде тоже колеблется, причем амплитуда этих колебаний $x = 1$ мм. Найдите максимальную скорость v уровня поверхности при этих колебаниях. Считайте, что капиллярными эффектами можно пренебречь, а плотность гелия $\rho = 122$ кг/м^3.

Задача 117[3]. В Земле прорыт прямой тоннель, не проходящий через её центр. Определите время движения поезда с выключенными двигателями по такому тоннелю, если влиянием вращения Земли на движение поезда и трением пренебречь.

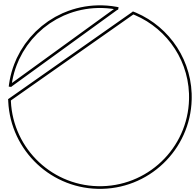


Рис. 124

Задача 118. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы из двух брусков и двух невесомых пружин (см. рис. 125). Жесткость правой пружины $k = 10$ Н/м, жесткость левой $2k = 20$ Н/м, масса каждого бруска $m = 100$ г, коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}5$. В положении равновесия правая пружина растянута на длину $\Delta x_{01} = 2$ см. Трения между нижним бруском и опорой нет.

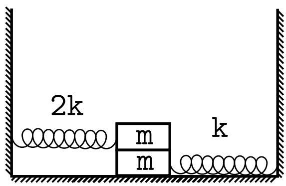


Рис. 125

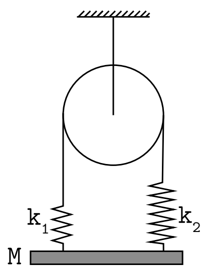


Рис. 126

Задача 119. Определить период колебаний однородного бруска, подвешенного на двух пружинах, жесткости которых равны k_1 и k_2 соответственно ($k_1 > k_2$). Пружины связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок (см. рис. 126). Масса бруска равна M. При колебаниях брусок все время остается горизонтальным.

Статика

Окружающие нас тела движутся, взаимодействуют друг с другом, некоторые тела покоятся. Условия, при которых тело покоится при наличии внешних воздействий, изучает часть механики, называемая *статикой.* Статика как наука возникла в глубокой древности и развивалась под влиянием практических нужд человечества, связанных со строительством различных наземных сооружений, мостов, кораблей.

Прежде чем говорить об условиях равновесия тела, следует договориться о том, что подразумевается под равновесием, иначе могут возникнуть недоразумения.

Будем считать, что *тело находится в равновесии в некоторой системе отсчёта, если в этой системе отсчёта* оно покоится, т. е. все макроскопические части тела неподвижны. Приведём примеры нахождения тел в равновесии.

Книжная полка, висящая на стене в комнате, находится в равновесии относительно инерциальной системы отсчёта, связанной с комнатой. Стул, стоящий на вращающейся сцене театра, находится в равновесии относительно неинерциальной системы, связанной со сценой. Чемодан, стоящий на полу движущегося вагона, находится в равновесии в системе отсчёта, связанной с вагоном. Если вагон движется прямолинейно и равномерно, то эта система отсчёта инерциальна, а если ускоренно, то неинерциальна.

Статика — частный случай динамики, когда все скорости равны нулю. Поэтому все условия, при которых наступает равновесие тела, могут быть получены из законов динамики, а значит, и из законов Ньютона, лежащих в основе динамики. В дальнейшем при исследовании условий равновесия тела ограничимся рассмотрением условий равновесия только в инерциальных системах отсчёта, поскольку в них нами уже изучены законы динамики. В следующем параграфе уточним, как работать с силами, и понятие равнодействующей силы. Затем разберём частные случаи равновесия тела и общий случай.

Сила. Эквивалентность сил. Равнодействующая. Сложение сил. Разложение силы

Сила характеризуется точкой приложения к телу, направлением в пространстве и численным значением, что даёт основание считать силу векторной величиной.

Но силу нельзя полностью отождествлять с таким математическим понятием, как вектор. Вектор можно переносить в пространстве параллельно самому себе, и он остаётся по определению тем же вектором. Это означает, что в математике мы имеем дело с так называемыми *свободными векторами.* Операции с такими векторами и изучаются в курсе математики. Одной из важных операций является операция сложения двух векторов по известному правилу параллелограмма.

Однако попробуйте перенести силу параллельно самой себе, т. е. перенести точку приложения силы. Вы увидите, что характер движения тела изменится. Например, потяните за верёвку, привязанную к одной из ножек стула, а затем потяните с той же по модулю и направлению силой за верёвку, привязанную уже к другой ножке.

Итак, результат действия силы зависит от точки её приложения, и сила не является свободным вектором. Возникает вопрос о том, как работать с силами и какие математические операции над свободными векторами будут справедливы для сил? Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Многочисленные опытные факты подтверждают справедливость того, что *точку приложения силы можно переносить по линии её действия в любую точку твёрдого тела и что две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложенные в одной точке тела и направленные под углом друг к другу, оказывают на тело такое же воздействие, как и одна сила $\vec{F}$ найденная как их векторная сумма $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ по правилу параллелограмма и приложенная в той же точке.*

Напомним, что *твёрдое тело* — это тело, расстояние между частями которого, не изменяется при действии на него сил.

Несколько сил, приложенных к твёрдому телу, будем называть *системой сил.* Если одну систему сил можно заменить другой системой сил, не изменив при этом характер движения тела, то такие системы сил называются *эквивалентными.* В частности, если систему сил удаётся заменить одной силой, то эта сила называется равнодействующей силой. Следовательно, равнодействующая сила оказывает на тело такое же воздействие, как и эквивалентная ей система сил. Равнодействующая считается равной нулю, если приложенные к телу силы не изменяют характер движения тела.

В курсах теоретической механики показывается, как произвольную пространственную систему сил, действующих на тело, можно заменить более простой эквивалентной системой, а в некоторых случаях и только одной силой, т. е. равнодействующей. Оказывается, что не всякую систему сил можно привести к равнодействующей, т. е. не у всякой системы сил есть равнодействующая сила. В наиболее общем случае пространственная система сил приводится к совокупности одной силы, вызывающей движение тела как целого, и так называемой пары сил, вызывающей вращение тела.

Парой сил называются две равные по модулю и противоположно направленные силы, не лежащие на одной прямой (см. рис. 127).

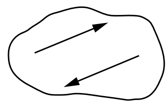


Рис. 127

Пара сил является наиболее простым примером системы сил, не имеющих равнодействующей. Действительно, попытайтесь мысленно найти точку приложения какой-либо одной силы, вызывающей у тела (см. рис. 127) такое же движение, как пара сил.

Операция нахождения равнодействующей силы называется *сложением сил.* Сложение сил не надо путать со сложением векторов. При сложении векторов получается свободный вектор, а при сложении сил получается векторная величина, имеющая точку приложения.

Для нахождения равнодействующей двух сил, линии действия которых пересекаются в точке O переносят силы вдоль их линий действия и прикладывают в точке O а затем складывают по правилу параллелограмма.

При выяснении существования равнодействующей нескольких сил имеет смысл попытаться её найти.

Для этого находят равнодействующую каких-либо двух сил, затем складывают эту равнодействующую с третьей силой и т. д., т. е. заменяют систему сил более простой эквивалентной системой. Если в результате такого последовательного сложения сил получается одна сила, то она и будет равнодействующей.

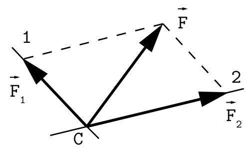


Рис. 128

Из предложенного метода поиска равнодействующей ясно следующее: если равнодействующая нескольких сил существует, то она равна векторной сумме этих сил.

Операция замены одной силы эквивалентной системой из нескольких сил называется *разложением силы*. На практике часто приходится разлагать одну силу $\vec{F}$ (см. рис. 128) по двум направлениям 1 и 2, проходящим через точку C приложения силы. В этом случае при замене одной силы на две удобно использовать *правило параллелограмма*. Для этого через конец вектора $\vec{F}$ проведём прямые, параллельные направлениям 1 и 2, и на сторонах получившегося параллелограмма построим векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ начинающиеся в точке C. Так осуществляется разложение одной силы $\vec{F}$ на две составляющие силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по направлениям 1 и 2.

Равновесие материальной точки

Перед нами стоит задача выяснить, при каких условиях материальная точка, т. е. тело, размеры которого можно не учитывать, находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта. Поскольку материальная точка покоится в этой системе отсчёта, то её ускорение равно нулю. Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot 0 = 0.$$

Итак, *условием равновесия материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчёта будет равенство нулю суммы всех сил,* *действующих на материальную точку*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \tag{6}$$

Поскольку все силы приложены в одной точке, то их можно сложить с использованием правила параллелограмма. Получим равнодействующую $\vec{R}$ равную сумме этих сил и приложенную к материальной точке. Тогда можно сказать, что условием равновесия материальной точки будет равенство нулю равнодействующей силы, т. е. $\vec{R} = 0$.

Векторное равенство (6) можно записать в проекциях на любую ось в пространстве. Записав (6) в проекциях на три координатные оси x, y и z в пространстве, получим систему из трёх скалярных равенств, эквивалентных одному равенству (6):

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{yi} = 0, \qquad \sum_i F_{zi} = 0. \tag{7}$$

Здесь F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} — проекции силы $\vec{F}_i$ на оси координат x, y, z. Каждое из равенств системы (7) утверждает, что при равновесии материальной точки алгебраическая сумма проекций на соответствующую ось всех сил, действующих на материальную точку, равна нулю.

Заметим, что система координат x, y, z не обязательно прямоугольная. Если только оси x, y, z не параллельны друг другу и не лежат сразу все три в одной плоскости, то (6) и (7) будут всё равно эквивалентны. Эквивалентность означает, что при выполнении (6) обязательно будет выполняться (7), а если справедливы сразу все три равенства системы (7), то отсюда последует и справедливость векторного равенства (6).

В технике встречается значительное число практических задач, когда все силы лежат в одной плоскости (плоский случай). Совместим с этой плоскостью оси координат x и y а ось z направим перпендикулярно ей. Тогда в системе (7) последнее равенство обратится в тождество, и условия равновесия материальной точки в плоском случае запишутся в виде:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0.$$

Условие (6) являются необходимым, но недостаточным условием равновесия. Это означает, что из того факта, что материальная точка находится в равновесии, обязательно (необходимо) следует справедливость (6). Но из того, что для материальной точки выполняется равенство (6), ещё не следует, что она будет в равновесии. Из равенства нулю суммы всех сил следует, согласно второму закону Ньютона, равенство нулю ускорения материальной точки. А это говорит о том, что она может не только покоиться, но и двигаться прямолинейно и равномерно.

Ещё раз подчеркнём, что условие равновесия (6) есть фактически уравнение второго закона Ньютона для материальной точки, записанное для частного случая, когда ускорение равно нулю. Поэтому методы и приёмы, используемые при решении задач на равновесие материальной точки, аналогичны тем, которые используются в задачах, связанных с применением уравнения второго закона Ньютона.

Равновесие тела при отсутствии вращения

Пусть по каким-либо причинам твёрдое тело, имеющее конечные размеры, ограничено в своём движении так, что не может вращаться. Например, брусок на наклонной плоскости или поршень в цилиндре. Если тело находится в равновесии, то ускорение его центра масс $\vec{a}_C$ равно нулю. Из динамики известно, что $\sum\limits_i \vec{F}_i = m\vec{a}_C$. Отсюда следует, что сумма всех внешних сил $\sum\limits_i \vec{F}_i$ действующих на него, равна нулю.

Таким образом, *условием равновесия твёрдого тела при отсутствии вращения в некоторой инерциальной системе отсчёта будет равенство нулю суммы всех внешних сил, действующих на тело*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \tag{8}$$

Условие равновесия (8) совпало с условием равновесия (6) для материальной точки. И это не случайно, т. к. при отсутствии вращения тела на него можно смотреть как на материальную точку, о чём уже говорилось в динамике.

Векторное равенство (8) даёт возможность записать условие равновесия тела в виде трёх скалярных уравнений: $\sum\limits_i F_{ix} = 0$, $\sum\limits_i F_{iy} = 0$, $\sum\limits_i F_{iz} = 0$. Всё сказанное в предыдущем разделе об осях координат, эквивалентности равенств, необходимости, но недостаточности условий равновесия остаётся справедливым и здесь.

Равновесие тела с закрепленной осью вращения в плоском случае. Момент силы

Пусть твёрдое тело может только поворачиваться вокруг неподвижной фиксированной оси O (см. рис. 129) и не может перемещаться вдоль этой оси.

На рисунке ось O перпендикулярна плоскости рисунка. Напомним, что твёрдым телом называется тело, деформациями которого под действием сил можно пренебречь. Рассмотрим плоский случай, т. е. случай, когда все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения. Чтобы не загромождать рисунок, показаны только две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложенные в точках K и E. Нас интересуют условия, при которых тело не вращается, т. е. находится в равновесии.

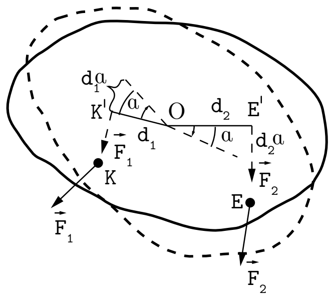


Рис. 129

Опустим из т.O на линии действия сил перпендикуляры OK' и OE' и обозначим расстояния от оси вращения до этих линий через d_1 и d_2. Перенесём точки приложения сил вдоль линий их действия в точки K' и E'.

Если Вы слабо знакомы с понятием работы силы, то следующий абзац текста, являющийся выводом условия равновесия, можно опустить и начинать чтение с уравнения (9).

Проведём мысленно такой эксперимент. Пусть в результате незначительного нарушения равновесия, к примеру, из-за очень малого увеличения силы $\vec{F}_2$ или слабого толчка тело бесконечно медленно повернулось на сколь угодно малый угол α по часовой стрелке. В итоге точки K' и E' приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ переместятся на малые расстояния $d_1\alpha$ и $d_2\alpha$. При этом сила $\vec{F}_1$ совершит над телом отрицательную работу $A_1 = -F_1 d_1\alpha$, а сила $\vec{F}_2$ — положительную работу $A_2 = F_2 d_2\alpha$. Работа всех сил над телом равна изменению его кинетиче-ской энергии. Но при бесконечно медленном повороте тела кинетиче-ская энергия была и остаётся нулевой. Итак, учитывая, что на тело кроме указанных двух сил действуют ещё и другие силы, имеем $A_1+A_2+A_3+\ldots = 0$,

$$-F_1 d_1 + F_2 d_2 + \ldots = 0. \tag{9}$$

Последнее равенство и есть условие равновесия.

Видим, что количественной величиной, отвечающей за равновесие тела и характеризующей способность отдельной силы вращать тело, является не сама сила, а величина, равная произведению модуля силы на расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Расстояние от оси вращения до линии действия силы называется плечом силы.

Для плоского случая *величина произведения модуля силы на плечо называется моментом силы относительно оси*: $M = F \cdot d$. По этой формуле определяется абсолютная величина момента силы.

Если *моментам, вызывающим вращение по часовой стрелке, приписывать знак плюс (считать положительными), а моментам, вызывающим вращение против часовой стрелки, — знак минус (считать отрицательными)*, то условие равновесия (9) принимает вид:

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0.$$

Итак, *твёрдое тело с закреплённой осью вращения находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта, если алгебраическая сумма моментов относительно этой оси всех действующих на тело внешних сил равна нулю.*

По-другому можно сказать, что равновесие достигается, когда сумма моментов, вращающих тело по часовой стрелке, равна сумме моментов, вращающих тело против часовой стрелки. Если у сил, действующих на тело, существует равнодействующая сила, то условие равновесия формулируется так: момент равнодействующей силы относительно оси вращения равен нулю, т. е. линия действия равнодействующей силы (если она при этом отлична от нуля) проходит через ось вращения.

Сформулированное условие равновесия является необходимым, но недостаточным. Действительно, при равенстве нулю суммы моментов действующих на тело сил тело может не только покоиться, но и равномерно вращаться.

Следует отметить, что на тело действует и сила со стороны оси вращения, на которую оно посажено.

Ясно, что независимо от направления этой силы её момент относительно оси вращения равен нулю из-за равенства нулю плеча силы. Поэтому в записи условия равновесия тела с закреплённой осью вращения силу реакции, действующую на тело со стороны оси, иногда вообще исключают из рассмотрения.

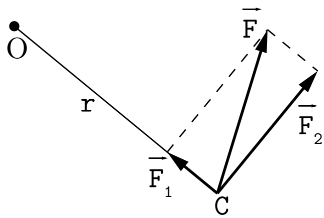


Рис. 130

Покажем ещё один удобный на практике метод нахождения момента относительно оси O силы $\vec{F}$ (см. рис. 130), точка C приложения которой находится на расстоянии r от оси. Разложим вектор силы $\vec{F}$ на силу $\vec{F}_1$ с линией действия, проходящей через ось O и силу $\vec{F}_2$ перпендикулярную $\vec{F}_1$ т. е. заменим одну силу эквивалентной системой двух сил. Момент силы $\vec{F}_1$ относительно оси O равен нулю, плечо силы $\vec{F}_2$ равно r. Поэтому момент M силы $\vec{F}$ равен моменту силы $\vec{F}_2$ относительно оси O т. е. $M = F_2 \cdot r$.

Равновесие тела в общем случае

Предварительно обобщим понятие момента силы относительно оси, когда сила $\vec{F}$ действующая на тело, не перпендикулярна оси OO' (см. рис. 131). Ось OO_1 — это мысленная ось в пространстве. Проведём через т. A приложения силы $\vec{F}$ плоскость перпендикулярно оси. Пусть ось пересекает эту плоскость в т. C. Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ так, чтобы $\vec{F}_2$ была параллельна оси, т. е. перпендикулярна этой плоскости, а $\vec{F}_1$ лежала в этой плоскости. Тогда $\vec{F}_1$ будет перпендикулярна оси.

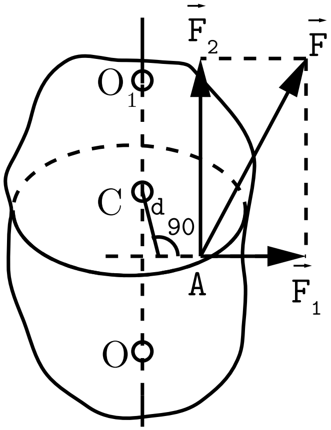


Рис. 131

Моментом силы, не перпендикулярной оси, называется момент относительно этой же оси её составляющей, перпендикулярной оси.

Таким образом, моментом силы $\vec{F}$ относительно оси OO_1 называется момент силы $\vec{F}_1$ относительно этой же оси, т. е. $M = F_1 d$ где d — плечо силы $\vec{F}_1$. Это определение легко запомнить, поскольку на интуитивном уровне ясно, что сила $\vec{F}_2$ не вызывает вращения тела вокруг оси OO_1 и её момент потому должен равняться нулю.

Если на тело действуют несколько сил, то моменты сил, стремящихся повернуть тело вокруг выбранной оси в одном направлении, берутся положительными, а в противоположном — отрицательными.

Пусть на твёрдое тело действуют несколько произвольно направленных в пространстве сил, и оно находится в равновесии. Сформулируем без доказательства условие равновесия тела в таком наиболее общем случае.

Если твёрдое тело находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта, то сумма всех внешних сил, действующих на тело, равна нулю и сумма моментов всех внешних сил относительно *любой оси в пространстве тоже равна нулю*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \qquad \sum_i M_i = 0. \tag{10}$$

Ось можно выбирать произвольно, и не обязательно, чтобы эта ось проходила через тело, и чтобы тело могло реально вращаться вокруг оси.

Условия (10) называются уравнениями равновесия твёрдого тела.

Сформулированные условия равновесия являются необходимыми, но недостаточными условиями равновесия. Действительно, при выполнении этих условий тело может не только покоиться, т. е. находиться в равновесии. Центр масс тела может ещё двигаться прямолинейно и равномерно, а тело может вращаться вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Например, для катящегося по столу шара условия (10) выполнены, но он не находится в равновесии в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом.

Сложение параллельных сил

Нахождение равнодействующей нескольких параллельных сил удобно производить, используя условие равновесия, записанное для моментов сил. Покажем это на примере.

Задача 120. На пластину в форме квадрата со стороной $a = 10$ см действуют в плоскости пластины три параллельные силы $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 40$ Н, $F_3 = 100$ Н, (см. рис. 132). Найти равнодействующую. *Решение.* Если равнодействующая есть, то $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Отсюда $R = F_3 - F_2 - F_1 = 40$ Н и направлена в сторону $\vec{F}_3$. Для нахождения точки приложения равнодействующей воспользуемся тем, что она оказывает на тело такое же действие, как и складываемые силы.

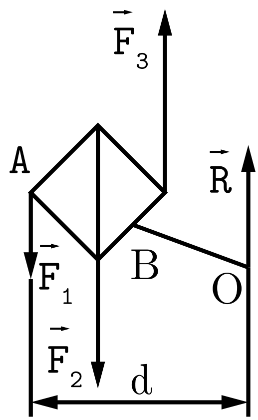


Рис. 132

Это значит, что момент равнодействующей относительно любой оси равен сумме моментов всех сил относительно той же оси. Ось удобно взять проходящей через точку A перпендикулярно плоскости пластины. Плечи сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ равны соответственно нулю, $a\sqrt{2}/2$ и $a\sqrt{2}$. Пусть плечо силы $\vec{R}$ т. е. расстояние от линии её действия до оси A равно d. Тогда

$$-Rd = F_1 \cdot 0 + F_2 a(\sqrt{2}/2) - F_3 a\sqrt{2}.$$

Отсюда $d = \dfrac{2F_3 - F_2}{2R} a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ см ≈ 28 см.

Равнодействующую $\vec{R}$ можно приложить в любой точке O на линии её действия. Реально воздействовать на пластину с силой $\vec{R}$ можно с помощью лёгкого стержня BO, жёстко скреплённого с пластиной.

Ответ: Модуль равнодействующей $R = 40$ Н. Линия её действия параллельна силам и лежит в плоскости пластины на расстоянии $d \approx$ ≈ 28 см от точки A.

Центр масс. Центр тяжести

Пусть дано тело или система тел. Мысленно разобьём тело на сколь угодно малые части с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots$. Каждую из этих частей можно рассматривать как материальную точку. Положение в пространстве i–ой материальной точки с массой m_i определяется радиус–вектором $\vec{r}_i$. Масса тела есть сумма масс отдельных его частей: $m =$ $= \sum\limits_i m_i$. По определению центром масс тела (системы тел) называется такая точка C радиус–вектор которой $\vec{r}_C$ определяется по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Можно показать, что положение центра масс относительно тела не зависит от выбора начала координат O т. е. данное выше определение центра масс однозначно и корректно.

Не вдаваясь в методы нахождения центра масс, скажем, что центр масс однородных симметричных тел расположен в их геометрическом центре или на оси симметрии, центр масс у плоского тела в виде произвольного треугольника находится на пересечении его медиан.

Оказывается, что у центра масс тела (или системы тел) есть ряд замечательных свойств. В динамике показывается, что импульс произвольно движущегося тела равен произведению массы тела на скорость его центра масс и что центр масс движется так, как если бы все внешние силы, действующие на тело, были приложены в центре масс, а масса всего тела была сосредоточена в нём.

Центром тяжести тела, находящегося в поле тяготения Земли, называют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на все части тела. Эта равнодействующая называется силой тяжести, действующей на тело. Сила тяжести, приложенная в центре тяжести тела, оказывает на тело такое же воздействие, как и все силы тяжести, действующие на отдельные части тела.

Интересен случай, когда размеры тела намного меньше размеров Земли. Тогда можно считать, что на все части тела действуют параллельные силы тяжести, т. е. тело находится в однородном поле тяжести. У параллельных и одинаково направленных сил всегда есть равнодействующая, что можно доказать. Но при определённом положении тела в пространстве можно указать только линию действия равнодействующей всех параллельных сил тяжести, точка её приложения останется пока неопределённой, т. к. для твёрдого тела любую силу можно переносить вдоль лини её действия. Как же быть с точкой приложения?

Можно показать, что при любом положении тела в однородном поле тяжести линия действия равнодействующей всех сил тяжести, действующих на отдельные части тела, проходят через одну и ту же точку, неподвижную относительно тела. В этой точке и прикладывается равнодействующая, а сама точка будет центром тяжести тела.

Положение центра тяжести относительно тела зависит только от формы тела и распределения массы в теле и не зависит от положения тела в однородном поле тяжести. Центр тяжести не обязательно находится в самом теле. Например, у обруча в однородном поле тяжести центр тяжести лежит в его геометрическом центре.

Сообщим без доказательства чрезвычайно любопытный и важный факт. Оказывается, в *однородном поле тяжести центр тяжести тела совпадает с его центром масс.* Напомним, что центр масс тела существует независимо от наличия поля тяжести, а о центре тяжести можно говорить только при наличии силы тяжести.

Местоположение центра тяжести тела, а значит, и центра масс, удобно находить, учитывая симметричность тела и используя понятие момента силы.

Задачи с решениями

Задача 121. У среднестатистического школьника дома всегда найдутся несколько листов формата A4, карандаш, миллиметровая линейка и 10–рублевая монета (масса — 5,65 г), но не динамометр или лабораторные весы. Помогите ему спланировать эксперимент для измерения массы листа бумаги.

Решение. Свернем лист бумаги в плоскую трубочку шириной 1–2 см вдоль некоторой оси (например, стороны или диагонали прямоугольника). Трубочка должна быть достаточно жесткой, чтобы не было значительного искривления под весом монеты — тогда эту трубочку можно использовать в качестве рычага.

Кладем трубочку на край стола, на один конец трубочки кладем монету известной массы, а другой сдвигаем за край стола до тех пор, пока не будет найдена точка равновесия рычага (трубка не начнет переворачиваться). Карандашом отмечаем эту точку и потом линейкой измеряем все размеры.

Пусть длина всей трубки равна L, длина трубки за краем стола — a, расстояние от точки равновесия до центра масс монеты — b, масса монеты — m, масса листа бумаги (трубочки) — M. Предполагая плотность бумаги постоянной в разных точках трубочки, получаем, что масса трубочки за краем стола равна Ma/L, а части на столе — $M(L-a)/L$.

Учитывая, что центр масс каждого из участков трубочки находится в середине отрезка, запишем правило моментов сил:

$$M\frac{a}{L}g\frac{a}{2} = M\frac{L-a}{L}g\frac{L-a}{2} + mgb,$$

$$Mg(a^2 - (L-a)^2) = 2mgbL,$$

$$M(1 - L + a)(a + L - a) = 2mbL,$$

$$M(2a - L)L = 2mbL,$$

$$M = m\frac{2b}{2a-L}.$$

Поскольку a — длина стороны без монеты, она будет более длинная, поэтому всегда $2a - L > 0$.

Эксперимент рекомендуется провести при разных значениях параметров L и b, и потом оценить среднее значение и погрешность.

Задача 122. Прямоугольный легкий сосуд с жидкостью массой m помещен на однородный рычаг массой $3m$. В жидкость опущено тело массой $2m$, не касающееся дна сосуда и удерживаемое нитью, перекинутой через блок (см. рис. 133). Какой массы m_x груз необходимо подвесить к противоположному концу нити, для равновесия всей системы? Трения в осях рычага и блока нет. Необходимые расстояния можно взять из рисунка.

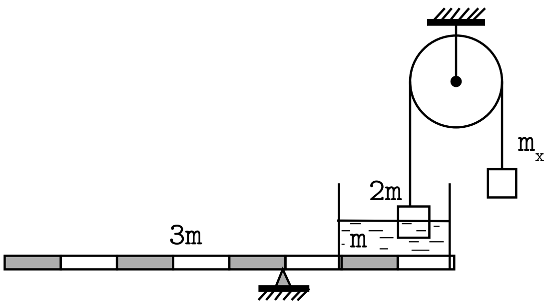


Рис. 133

Решение. Сила давления на дно сосуда F распределена равномерно по всей площади и не зависит от места погружения в жидкость тела $2m$. При этом, $F = mg + F_A$, где F_A — сила, противодействующая силе Архимеда, действующей на тело $2m$.

Из условия равновесия тела $2m$: $T + F_A = 2mg$, где T — сила натяжения нити, которая в свою очередь может быть найдена из условия равновесия груза m_x ($T = mgx$).

Правило моментов для рычага относительно точки опоры имеет вид: $3mgl = F2l$.

Решая систему уравнений, получаем $m_x = 3m/2$.

Ответ: $m = 3m/2$.

Задача 123. Прямоугольный брусок высоты a и ширины b стоит на наклонной плоскости, имеющей угол φ с горизонтальной поверхностью. Вес бруска равен P. Какую минимальную силу необходимо приложить к верхней грани бруска, чтобы нижняя грань оторвалась от поверхности и брусок начал наклоняться? При каком коэффициенте силы трения μ это возможно без проскальзывания бруска по поверхности?

Решение. Рассмотрим сначала частный случай, когда брусок стоит на горизонтальной поверхности.

Пусть точка O — вершина прямоугольника, относительно которой происходит вращение бруска. Запишем правило моментов сил относительно точки O. Сила тяжести (вес) P приложена к центру тяжести бруска, направлена вертикально вниз, плечо силы равно $b/2$. Сила F, приложенная к верхней грани, имеет плечо a, и для достижения минимального значения должна быть направлена горизонтально, вдоль ребра верхней грани. Условие равновесия:

$$Fa = P\frac{b}{2} \Rightarrow F = \frac{Pb}{2a}.$$

Условием отсутствия проскальзывания является

$$F \leq F_{\text{пр}} = \mu N = \mu P,$$

$$\frac{Pb}{2a} \leq \mu P \Rightarrow \mu \geq \frac{b}{2a}.$$

Если существует h — минимальная высота, при которой начинается переворачивание бруска, то из измерений величин b и h можно определить экспериментальное значения коэффициента трения $\mu = b/2h$.

В случае с наклонной плоскостью введем систему координат, в которой ось абсцисс направлена вдоль наклонной плоскости, а ось ординат перпендикулярна ей и направлена вдоль стороны длина a бруска.

Запишем правило моментов сил относительно точки O:

$$P_y \frac{b}{2} = P_x \frac{a}{2} + Fa.$$

Видно, что вектор веса бруска, в данной системе координат имеет 2 компоненты, соответствующие моментам сил разного знака.

$$P \cos\varphi \frac{b}{2} = P \sin\varphi \frac{a}{2} + Fa,$$

$$F = \frac{P}{2} \left(\frac{b}{a} \cos\varphi - \sin\varphi \right).$$

Отметим, что при $\frac{b}{a} \cos\varphi - \sin\varphi < 0$, или $\operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a}$ сила становится отрицательной величиной, т. е. брусок опрокинется сам.

Условие отсутствия проскальзывания можно записать как:

$$P_x + F \leq F_{\text{пр}} = \mu N = \mu P_y,$$

$$P \sin\varphi + \frac{P}{2} \left(\frac{b}{a} \cos\varphi - \sin\varphi \right) \leq \mu P \cos\varphi,$$

Отсюда

$$\mu \geq \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \operatorname{tg}\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}\varphi \right).$$

Видно, что при $\varphi =$ формулы для F и μ переходят в предельный случай горизонтальной поверхности.

Ответ: $F = \frac{P}{2} \left(\frac{b}{a} \cos\varphi - \sin\varphi \right)$, $\mu \geq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}\varphi \right)$.

Задача 124[4]. Четыре одинаковых ледяных бруска длиной L сложены так, как показано на рисунке 134. Каким может быть максимальное расстояние d, при условии, что все бруски расположены горизонтально? Считайте, что бруски гладкие (между ними нет трения), и что сила тяжести приложена к центру соответствующего бруска.

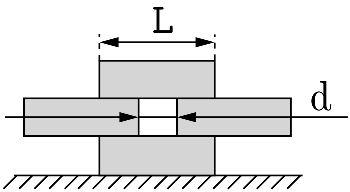


Рис. 134

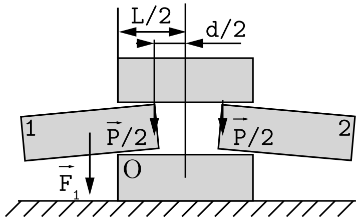


Рис. 135

Решение. Система, состоящая из 4 брусков, будет находиться в равновесии при условии, что сумма моментов внешних сил, действующих на бруски (1) и (2), равна нулю (см. рис. 135).

Запишем правило моментов сил, действующих на брусок (1), относительно точки O. Чтобы яснее представлять место приложения сил, изобразим средние бруски слегка наклоненными (это положение они займут, если их раздвинуть на расстояние чуть более, чем d). Сила тяжести $F_1 = P$ приложена к центру бруска. Поскольку он сдвинут влево на расстояние $d/2$, то и плеча силы равно $d/2$. Вес P верхнего бруска приложен к верхним ребрам брусков (1) и (2) и, следовательно, распределен между ними поровну (к каждому ребру приложена сила $P/2$). Плечо этой силы относительно точки O равно $L/2 - d/2$. Согласно правилу моментов:

$$P \cdot \frac{d}{2} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{r}{2}\right).$$

Отсюда $d = L/3$.

Ответ: $d = L/3$.

Задача 125. По длинной прямой однородной палочке слева направо со скоростью u ползёт маленькая улитка и катит перед собой лёгкий маленький шарик. Масса улитки m, а палочки M. Концы палочки опираются на две вертикальные пружины, расстояние между которыми L. Жёсткость левой пружины k, а правой $2k$. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, а их нижние концы закреплены на одном горизонтальном уровне. В начальный момент улитка находится на левом крае палочки, над левой пружиной (см. рис. 136). Определите, спустя какое время от начала движения улитки шарик начнёт скатываться по палочке в сторону правой пружины. Можно считать, что жёсткости пружин настолько велики, что угол наклона палочки всегда достаточно мал.

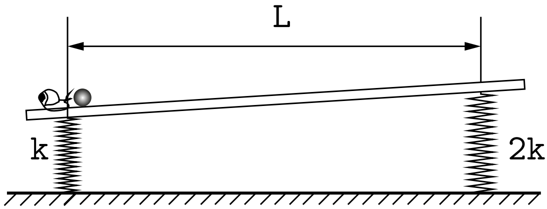


Рис. 136

Решение. Рассмотрим момент времени, когда улитка находится на расстоянии x от начального положения. Пусть в данный момент сила упругости левой пружины равна F_1, а сила упругости правой пружины равна F_2 (см. рис. 137).

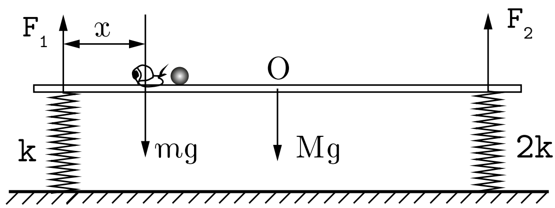


Рис. 137

Тогда сжатие левой пружины равно $\Delta x_1 = \dfrac{F_1}{k}$, а сжатие правой пружины равно $\Delta x_2 = \dfrac{F_2}{2k}$.

Сумма сил, действующих на палочку, должна быть равна нулю:

$$F_1 + F_2 = (m + M)g.$$

Запишем уравнение моментов относительно оси O, проходящей через центр масс палочки перпендикулярно плоскости рисунка:

$$F_1 \frac{L}{2} = mg\left(\frac{L}{2} - x\right) + F_2 \frac{F}{2}.$$

Как видно из этого уравнения, в начале движения (при небольших x) $F_1 > F_2$, а значит, и $\Delta x > \Delta x_2$, то есть левый конец палочки находится ниже, чем правый. При таком положении палочки шарик стремится скатиться влево, но ему мешает улитка. Но как только правый край станет хоть немного ниже левого, шарик скатится. В критический момент, когда сжатия пружин равны, а палочка горизонтальна:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow F_2 = 2F_1,$$

$$F_1 + F_2 = 3F_1 = (m+M)g, \text{ откуда } F_1 = \frac{(m+M)g}{3}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение моментов, получим

$$\frac{(m+M)g}{3}\frac{L}{2} = mg\left(\frac{L}{2} - x\right) + 2\frac{(m+M)g}{3}\frac{L}{2},$$

откуда

$$x = \frac{L}{2} + \left(\frac{m+M}{m}\right)\frac{L}{6} = \left(4 + \frac{M}{m}\right)\frac{L}{6}.$$

Значит, шарик начнёт скатываться спустя время $t = \dfrac{x}{u} = \left(4 + \dfrac{M}{m}\right)\dfrac{L}{6u}$.

Ответ: $t = \left(4 + \dfrac{M}{m}\right)\dfrac{L}{6u}$.

Задача 126. Шар массой $m = 0{,}2$ кг удерживается двумя нитями, прикреплёнными к потолку и стене (см. рис. 138). Одна нить горизонтальна, другая составляет угол $\alpha = 60°$ с потолком. Найти силы натяжения нитей.

Решение. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нитей $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (см. рис. 138). Запишем условие равновесия шара, считая его материальной точкой:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0. \tag{11}$$

Дальнейшее решение задачи проведём тремя способами, что очень полезно для получения практических навыков. Фактически это будут три математических приёма, с помощью которых из записанного векторного равенства, отражающего физику явления, мы найдём интересующие нас величины.

1–й способ решения. Сложим какие–нибудь две силы, например $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Получим силу $\vec{F}_{12}$ (см. рис. 138), заменяющую эти две силы. Поскольку сумма сил $\vec{F}_{12}$ и mg равняется нулю, то сила $\vec{F}_{12}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе mg. Из полученного параллелограмма сил находим $F_1 = mg\operatorname{ctg}\alpha$, $F_2 = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$. С учётом числовых данных $F_1 = \dfrac{mg}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1$ Н, $F_2 = \dfrac{2mg}{\sqrt{3}} \approx 2{,}2$ Н.

2–й способ решения. Запишем векторное равенство (11) в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y (см. рис. 139):

$$\begin{cases} -F_1 + F_2\cos\alpha = 0, \\ F_2\sin\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно F_1 и F_2, получаем:

$$F_1 = mg\operatorname{ctg}\alpha, \qquad F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

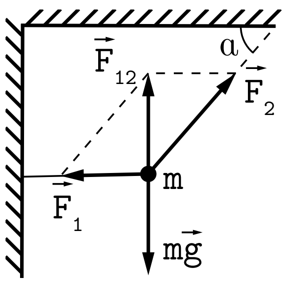


Рис. 138

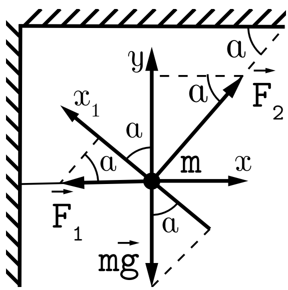


Рис. 139

3–й способ решения. Иногда возникает необходимость или желание получить из векторного равенства такое скалярное, в которое не входила бы проекция конкретного (обычно неизвестного) вектора. Нетрудно догадаться, что для этого надо записать векторное равенство в проекциях на ось, перпендикулярную этому вектору.

В нашей задаче направим ось x_1 (см. рис. 139) перпендикулярно силе F_2 а ось y перпендикулярно силе F_1. Условие равновесия (11), записанное в проекциях на эти оси, имеет вид:

$$\begin{cases} F_1\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0, \text{ на } x_1, \\ F_2\sin\alpha - mg = 0, \text{ на } y. \end{cases}$$

В каждом уравнении получили только по одной неизвестной величине, что очень удобно. Из первого уравнения находим F_1 из второго F_2.

Анализ третьего способа решения задачи позволяет дать два полезных практических совета при решении задач.

1. Для получения из векторного равенства независимых скалярных уравнений, т. е. не следующих друг из друга, *можно записать векторное равенство в проекциях не только на взаимно перпендикулярные оси, но и на оси, направленные друг к другу под острым или тупым углом.* Вопрос об эквивалентности векторного равенства и совокупности скалярных равенств уже затрагивался в начале параграфа;
2. *Выбирать оси координат следует из соображений удобства*, стараясь направить их перпендикулярно неизвестным векторам, в особенности тем, которые в данной задаче не просят искать. Например, пусть в задаче требуется найти только F_1. Тогда записываем лишь одно уравнение в проекциях на ось x_1 и находим из него F_1. Рациональный выбор осей координат помогает сократить математические выкладки.

Задача 127. На наклонной плоскости (см. рис. 140) с углом наклона $\alpha = 30°$ лежит брусок массой $m = 1$ кг. Найти силу трения между бруском и наклонной плоскостью.

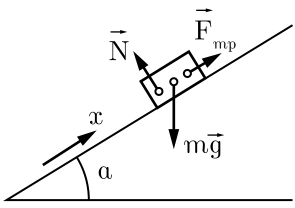


Рис. 140

Решение. На брусок действует сила тяжести $m\vec{g}$ сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила нормального давления $\vec{N}$. Вопрос о точке приложения силы $\vec{N}$ затрагивать пока не будем, т. к. это не существенно для решения данной задачи. Условие равновесия бруска:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = 0.$$

Неизвестную силу $\vec{N}$ искать в задаче не требуется. Поэтому направим ось x перпендикулярно ей и запишем условие равновесия бруска в проекциях на эту ось: $-mg\sin\alpha + F_{\text{тр}} = 0$. Отсюда $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$.

Задача 128. Однородный стержень массой m_1 (см. рис. 141) шарнирно закреплён в нижней точке A и удерживается за верхний конец лёгким тросом BC составляющим угол β со стержнем. В т. B подвешен груз массой m_2. Угол наклона стержня к горизонту α. Найти силу натяжения троса.

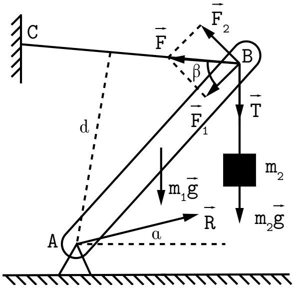


Рис. 141

Решение. На стержень действуют сила натяжения троса $\vec{F}$, сила $\vec{T}$ со стороны груза, сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре стержня, и сила реакции $\vec{R}$ со стороны шарнира. Обозначим длину стержня через L. Запишем выражение для моментов сил относительно оси A. Момент силы $\vec{R}$ равен нулю. Момент $m_1 g$ силы есть $M_1 = m_1 g \dfrac{L}{2}\cos\alpha$. Момент силы $T = m_2 g$ равен $M_2 = m_2 g L\cos\alpha$. Плечо силы $\vec{F}$ есть $d = L\sin\beta$ её момент $M_3 = -Fd = -FL\sin\beta$.

Момент M_3 можно найти и другим способом, разложив силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и заметив, что $M_3 = -F_2 L = -(F\sin\beta)L$.

Запишем условие равновесия стержня с закреплённой осью A:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0.$$

Таким образом,

$$m_1 g\frac{L}{2}\cos\alpha + m_2 gL\cos\alpha - FL\sin\beta = 0.$$

Отсюда

$$F = \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right) g\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Задача 129. На лёгком стержне (см. рис. 142) закреплены шары массами $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 3$ кг. Расстояние между центрами любых ближайших шаров $a = 10$ см. Найти положение центра тяжести и центра масс конструкции.

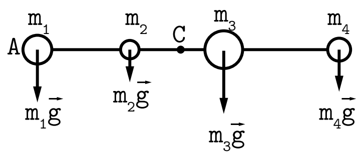


Рис. 142

Решение. Положение относительно шаров центра тяжести конструкции не зависит от ориентации стержня в пространстве. Для решения задачи удобно расположить стержень горизонтально, как показано на рисунке 142. Пусть центр тяжести находится на расстоянии L от центра левого шара, т. е. от т. A. В центре тяжести приложена равнодействующая всех сил тяжести, и её момент относительно оси A равен сумме моментов сил тяжести шаров. Имеем: $R = (m_1+m_2+m_3+m_4)g$, $RL = m_2ga + m_3g2a + m_4g3a$. Отсюда

$$L = \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}a = 16{,}4 \text{ см}.$$

Ответ: Центр тяжести совпадает с центром масс и находится в точке C на расстоянии $L \approx 16{,}4$ см от центра левого шара.

Задача 130. Лестница массой m приставленная к гладкой стене, покоится (см. рис. 143). Центр тяжести лестницы в её середине, нижний конец лестницы на расстоянии l от стены, а верхний на расстоянии h от пола. Найти силы, действующие на лестницу со стороны стены и пола.

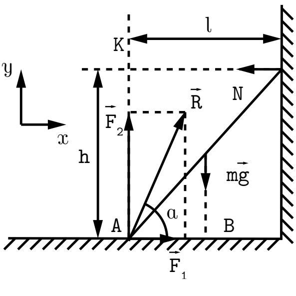


Рис. 143

Решение. На лестницу действуют сила $\vec{N}$ со стороны стены перпендикулярно ей, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$ со стороны стола. Для удобства разложим силу $\vec{R}$ на горизонтальную и вертикальную составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Кстати, $\vec{F}_1$ называется силой трения, а $\vec{F}_2$ — силой нормального давления.

Найдя $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ легко найти R и угол α. Мы имеем дело с плоской системой сил. Решим задачу тремя способами.

1–*й способ.* Запишем уравнения равновесия лестницы для проекций сил на оси x и y, а уравнение равновесия для моментов сил запишем для оси A: $F_1 - N = 0$, $F_2 - mg = 0$, $mg\dfrac{l}{2} - Nh = 0$.

Отсюда $F_1 = N = \dfrac{mg}{2} \cdot \dfrac{l}{h}$, $F_2 = mg$. Теперь находим R и α:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2h}{l}.$$

2–й способ. Запишем уравнение равновесия для проекций сил только на ось y, а уравнение равновесия для моментов сил запишем для двух осей A и K:

$$F_2 - mg = 0, \qquad mg\frac{l}{2} - Nh = 0, \qquad mg\frac{l}{2} - F_1 h = 0.$$

Заметим, что в каждом уравнении получилось только по одной неизвестной силе, что очень удобно. Из последних трёх уравнений находим F_1, F_2, N, а затем R и α.

3–й способ. Теперь запишем все три уравнения для моментов сил. Возьмём оси A, K и B: $mg\dfrac{l}{2} - Nh = 0$, $mg\dfrac{l}{2} - F_1 h = 0$, $F_2\dfrac{l}{2} - Nh = 0$. Эти три уравнения тоже дают возможность найти все неизвестные силы.

Ответ: Стена действует на лестницу с силой $N = \dfrac{mg}{2} \cdot \dfrac{l}{h}$, а пол с силой $R = mg\sqrt{1 + (l/2h)^2}$ под углом α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2h}{l}\right)$к горизонту.

Задача 131. Однородная горизонтальная балка массой $m = 60$ кг опирается на опоры в точках A и B (см. рис. 144). На конце балки висит груз массой $m_1 = 50$ кг. Определить силы действия балки на опоры, если $l_1 = 2$ м, $l_2 = 0{,}5$ м.

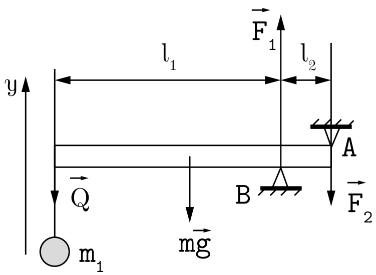


Рис. 144

Решение. На балку действуют силы: $\vec{Q}$ со стороны груза, сила тяжести $m\vec{g}$ силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в опорах. Ясно, что $Q = m_1 g$. Балка находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил. Решим задачу двумя способами.

1–*й способ.* Запишем уравнения равновесия балки для проекций сил на ось y и для моментов сил относительно оси A:

$$-m_1g - mg + F_1 + F_2 = 0,$$

$$-m_1g(l_1 + l_2) - mg\frac{1}{2}(l_1 + l_2) + F_1l_2 = 0.$$

Имеем два уравнения с двумя неизвестными силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Подставив в уравнение числовые данные из условия задачи, находим $F_1 \approx \approx 4 \cdot 10^3$ Н, $F_2 = 2{,}9 \cdot 10^3$ Н. Мы нашли силы, действующие на балку. Но по третьему закону Ньютона, балка давит на опоры с такими же по модулю силами.

2–*й способ.* Уравнения равновесия балки запишем для моментов сил относительно осей A и B:

$$-m_1g(l_1 + l_2) - mg\frac{1}{2}(l_1 + l_2) + F_1l_2 = 0,$$

$$-m_1gl_1 - mg\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_2\right) + F_2l_2 = 0.$$

В каждом уравнении оказалось только по одной неизвестной силе, их легко найти.

Ответ: Балка давит на опоры с силами $F_1 \approx 4\cdot 10^3$ Н, $F_2 \approx 2{,}9\cdot 10^3$ Н.

Задача 132. На двух взаимно перпендикулярных гладких плоскостях (см. рис. 145) лежит однородный шар массой m ($mg = 60$ Н). Определить силы давления шара на плоскости, если одна из плоскостей составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$.

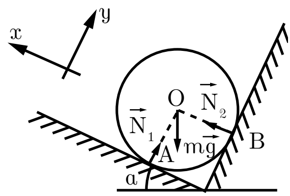


Рис. 145

Решение. На шар действуют перпендикулярно плоскостям силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре шара. Имеем дело с плоской системой сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Решим задачу тремя способами.

1–*й способ.* Направим ось x перпендикулярно одной плоскости, а ось y — другой. Запишем уравнения равновесия шара для проекций сил на эти оси:

$$N_2 - mg\sin 30^\circ = 0,$$

$$N_1 - mg\cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = mg \cdot \sin 30^\circ = 30 \text{ Н},$$

$$N_2 = mg \cdot \cos 30^\circ \approx 52 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона с такими же по модулю силами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ шар давит на плоскости.

2–*й способ.* Запишем одно уравнение равновесия для проекций сил на ось x, а второе уравнение равновесия для моментов сил относительно оси B:

$$N_2 - mg\sin 30^\circ = 0,$$

$$N_1R - mgR\cos 30^\circ = 0.$$

Здесь R — радиус шара. Из этих уравнений находим N_1 и N_2.

3–*й способ.* Запишем уравнения равновесия для моментов сил относительно осей A и B:

$$-N_2R + mgR\sin 30^\circ = 0,$$

$$N_1R - mgR\cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда легко находятся N_1 и N_2.

Ответ: $N_2 = 30$ Н, $N_1 \approx 52$ Н.

Задача 133. К вертикальной гладкой стене (см. рис. 146) подвешен на нити длиной l однородный шар радиусом R и массой m. Определить натяжение нити и силу давления шара на стену.

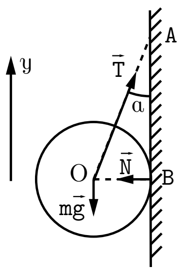


Рис. 146

Решение. На шар действуют сила тяжести, приложенная в центре тяжести шара O, сила давления $\vec{N}$ стены на шар, направленная из–за отсутствия трения перпендикулярно стене к т.O и сила натяжения нити $\vec{T}$. Поскольку шар находится в равновесии, то сумма моментов всех трёх сил относительно т. O должна равняться нулю. Линии действия сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ проходят через т. O и их моменты — нуль. Значит, и момент силы $\vec{T}$ тоже нуль, т. е. линия действия силы $\vec{T}$ должна проходить через центр шара.

Постараемся составить такие уравнения равновесия, в которые бы входило только по одной неизвестной силе. Уравнение равновесия для моментов сил относительно оси A даёт уравнение с одной неизвестной силой N:

$$-mgR + N \cdot AB = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{mgR}{AB} = mg\frac{R}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

С такой же по модулю силой шар давит на стену.

Уравнение равновесия для моментов сил относительно оси B даёт уравнение, содержащее только вторую неизвестную силу T:

$$-mgR + TR\cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = mg\frac{R+l}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

Найти силу T можно ещё проще, записав уравнение равновесия для проекций сил на вертикальную ось y: $-mg + T\cos\alpha = 0$.

Ответ: $T = mg\dfrac{R+l}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}$, $N = mg\sqrt{R}\sqrt{l^2 + 2Rl}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 134. На горизонтальной поверхности земли лежит однородное бревно постоянного сечения массой 110 кг. Какую наименьшую силу надо приложить к бревну, чтобы приподнять его за один конец?

Ответ: 55 кг.

Задача 135. Доска опирается верхним концом о гладкую вертикальную стену, а нижний конец находится на полу. Коэффициент трения скольжения между доской и полом $\mu = 0{,}5$. При каких углах наклона доски к горизонту доска не упадёт на пол?

Ответ: более 30 градусов.

Задача 136. Расстояние между вертикальными стенками равно l. Какой длины d стержень, поставленный наискось между стенками, не будет опускаться, если коэффициент трения между стержнем и стенками равен μ (см. рис. 147)?

Ответ: $l < d < l\sqrt{\mu^2 + 1}$.

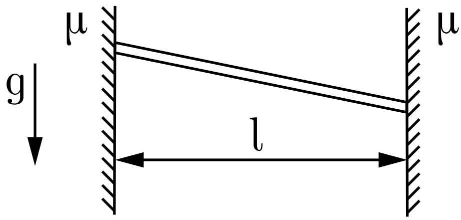


Рис. 147

Список литературы

1. Всероссийская олимпиада школьников 1992–1993 гг.

2. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике: пособие для самообразования. 5–е изд., перераб.– М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1987. — 416 с.

3. И.И. Воробъёв, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко и др. Задачи по физике: Учеб. пособие; Под ред. О.Я. Савченко. 3-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с.

4. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2013–2014 гг.