Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НАУКА В РЕГИОНЫ

Термодинамика

Методические материалы
по физике
для учащихся 9 класса

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Желтоухов А. А., Яворский В. А.

А23 Термодинамика: методические материалы по физике для учащихся 9 класса / Желтоухов А. А.,Яворский В. А.. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 104 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии дается обзор приемов и методов, использующихся при решении задач по физике, с примерами решения олимпиадных задач с муниципального и регионального этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Книга предназначается учащимся 9 класса школ с углубленным изучением физики и математики, учителям физики и математики, руководителям кружков и факультативов по физике, а также всем людям, увлекающимся физикой.

Желтоухов Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры общей физики МФТИ.

Яворский Владислав Антонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Содержание

Газовые законы

Основные термодинамические понятия.

Тепловые явления изучаются двумя разделами физики: термодинамикой и молекулярной физикой. Из этих двух разделов термодинамика сформировалась первой и её развитие было тесно связано с изобретением и исследованием паровых машин. Молекулярная физика, или молекулярно-кинетическая теория (сокращённо МКТ) сформировалась несколько позже. В основе МКТ лежат три утверждения:

- Все вещества состоят из отдельных атомов или молекул, разделённых промежутками;
- Молекулы вещества находятся в состоянии непрерывного беспорядочного теплового движения;
- Между молекулами вещества существует взаимное притяжение и отталкивание.

МКТ рассматривает системы состоящие из большого числа частиц. Из–за того, что этих частиц очень много и они движутся хаотически, к ним можно применять законы теории вероятности и статистики. В результате, состояние такой системы можно описать небольшим набором параметров. Примером таких параметров являются давление, объём и температура. Термодинамика отвлекается от внутреннего устройства системы и работает только с этим небольшим числом параметров. Законы термодинамики (часть из них ещё называют «начала термодинамики») сначала были получены, как обобщения опытных фактов, и лишь потом были выведены математически на основе МКТ.

Примером таких законов является *нулевое начало термодинамики*, согласно которому изолированная система (которая не обменивается с окружающей средой ни энергией, ни веществом) при неизменных внешних условиях со временем приходит в состояние *термодинамического равновесия* — все макроскопические процессы прекращаются, а термодинамические параметры становятся постоянными по всему объёму системы. При равенстве температур говорят, что наступило тепловое равновесие, а при равенстве давлений — механическое равновесие.

Поскольку число частиц в термодинамических системах очень велико, его принято измерять не в тысячах или миллионах, а в ещё более «крупных» единицах — молях. Один моль любого вещества содержит огромное число $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ молекул, которое называется *постоянная Авогадро* (или *число Авогадро*). Таким образом, если в системе N молекул, то количество вещества в этой системе $\nu = \dfrac{N}{N_A}$. Масса одного моля вещества называется *молярной массой*. Постоянная Авогадро была выбрана так, чтобы масса одного моля в граммах численно равнялась массе соответствующей молекулы в а.е.м. (атомных единицах массы). Так, например, масса одного моля углерода равна 12 грамм.

Газовые законы

Всякое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её параметров состояния, называется термодинамическим процессом.

Пусть в сосуде с поршнем находится некоторая порция газа. Тогда примером термодинамического процесса может служить процесс, в котором при перемещении поршня происходит изменение объёма V газа в сосуде. При этом каждому значению объёма V в состоянии теплового равновесия будет соответствовать определённое значение давления газа P. Следовательно, между объёмом газа и его давлением будет существовать некоторая зависимость $P(V)$, которую можно представить графически, т. е. построить её график в координатах (P, V).

Каждая точка на графике соответствует состоянию термодинамического равновесия. Но всякое изменение одного из параметров означает, что система вышла из состояния теплового равновесия и ей уже нельзя приписать в целом ни определённого давления, ни определённой температуры. Например, при быстром опускании поршня (т. е. при сжатии газа) параметры газа (например: давление, плотность и температура) вблизи поршня изменятся довольно существенно. В то же время, вдали от поршня изменение состояния газа произойдёт несколько позже. Поэтому газ в целом имеет разные давления и температуры в различных точках, и такое состояние газа нельзя изобразить графически.

Таким образом, на графиках изображаются достаточно медленные процессы, в которых система последовательно проходит много состояний термодинамического равновесия. Такие процессы называются *равновесными* или *квазистатическими*. В дальнейшем мы будем рассматривать только квазистатические процессы.

Процессы, протекающие при постоянной массе газа и неизменном значении одного из параметров состояния газа (давление, объём или температура), принято называть *изопроцессами*. Например, процесс, происходящий при постоянной температуре, называется *изотермическим*, при постоянном объёме — *изохорическим (или изохорным)*, при постоянном давлении — *изобарическим (или изобарным)*.

Изотермический процесс. Закон Бойля—Мариотта

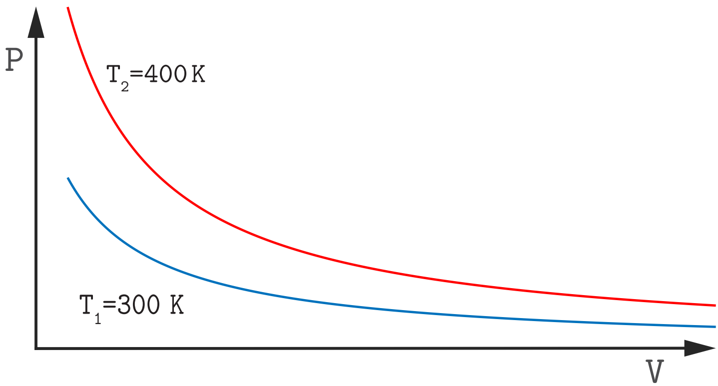

Рис. 1: Изотермы при разных температурах

В XVII веке независимо друг от друга английский физик Бойль и французский физик Мариотт экспериментально установили закон связывающий изменения давления и объёма газа в изотермическом процессе. Закон носит название закона Бойля—Мариотта и обычно записывается в виде:

$$PV = \text{const},$$

где значение константы определяется температурой, при которой происходит данный процесс. График этого процесса (изотерма) в координатах P и V изобразится кривой, определяемой уравнением $P = \dfrac{\mathrm{const}}{V}$. Эта кривая, как известно из математики, называется гиперболой. На рисунке 1 изображены изотермы одной и той же массы газа для двух разных температур T_1 и T_2, $T_2 > T_1$. Изотерма, соответствующая бóльшей температуре, проходит выше, так как при одинаковых объёмах бóльшей температуре соответствует и бóльшее давление.

Изобарический процесс. Закон Гей–Люссака

Поместим газ в сосуд с вертикальными стенками и подвижным поршнем, имеющим массу m_{Π} и площадь сечения S, который может перемещаться без трения. Пусть на поршень сверху действует атмосферное давление P_0. Рассмотрим равновесное состояние газа, характеризуемое давлением P. Величину этого давления найдём из условия механического равновесия для поршня.

На поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести $m_{\Pi} g$) и сила давления атмосферы $P_0 \cdot S$), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны газа под поршнем, значение которой равно $P \cdot S$. Условие равновесия поршня — равенство нулю равнодействующей этих сил. Отсюда для давления P газа находим:

$$P = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Внешнее давление на газ по третьему закону Ньютона также равно P.

Исследуя на опыте тепловое расширение газов при постоянном давлении, французский учёный Гей–Люссак открыл, что объём V газа данной массы при изменении температуры t изменяется по линейному закону:

$$V = V_0 \left(1 + \alpha t\right).$$

Здесь V_0 — объём газа при температуре 0 °C, α — коэффициент объёмного расширения при постоянном давлении. Оказалось, что для всех газов принимает одно и тоже значение, равное $1/273$ °C.

Изохорический процесс. Закон Шарля

Рассмотрим теперь процесс нагревания газа при постоянном объёме, или, как говорят, процесс изохорического нагревания газа. Поместим для этого газ в герметический сосуд, например, в металлический котёл с плотно завинчивающейся крышкой. Будем нагревать газ в котле, измеряя его температуру и давление. Как показывает опыт, давление газа внутри котла увеличивается с ростом температуры.

Зависимость давления газа от температуры при неизменном объёме была экспериментально установлена французским физиком Шарлем. Согласно закону Шарля, давление P газа данной массы при изменении температуры T изменяется по линейному закону:

$$P = P_0 \left(1 + \gamma T\right).$$

Здесь P_0 — давление газа при температуре 0 °C, γ — термический коэффициент давления. Оказалось, что для всех газов принимает одно и тоже значение, равное 1/273 °C. Заметим, что коэффициент γ равен коэффициенту α в законе Гей–Люссака.

Абсолютная шкала температур

Законы Гей–Люссака и Шарля выглядят гораздо проще, если вместо температурной шкалы Цельсия ввести шкалу, предложенную английским физиком Кельвином. Связь между температурой T по шкале Кельвина и температурой t по шкале Цельсия даётся формулой:

$$T = t + 273 = t + \frac{1}{\alpha} = t + \frac{1}{\gamma}.$$

Единица измерения температуры по шкале Кельвина называется кельвином и обозначается буквой К. Шкалу Кельвина также называют *абсолютной шкалой температур*. На новой температурной шкале нулю градусов Цельсия соответствует температура $T_0 = 273$ К (точнее, 273,15 К). Законы Гей–Люссака и Шарля при этом примут вид:

$$V = V_0 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0 \alpha T,$$

$$P = P_0 \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + t\right) = P_0 \gamma T,$$

где V_0 и P_0 — объём и давление газа при температуре T_0.

Уравнение состояния идеального газа

Как отмечалось выше, в состоянии термодинамического равновесия система характеризуется небольшим числом параметров, которые называются параметры состояния. Эти параметры не являются независимыми — они связаны уравнением, которое называется *уравнение состояния*. Параметрами состояния для газа являются давление P, объём V и температура T. Уравнение состояния, связывающее эти параметры, имеет вид

$$PV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная. Это уравнение также называется *уравнением (или законом) Менделеева—Клапейрона.*

Нетрудно заметить, что законы Бойля–Мариотта, Гей–Люссака и Шарля являются следствиями уравнения Менделеева–Клапейрона.

Следует также отметить, что в реальных условиях ни один из газов не подчиняется строго уравнению Менделеева–Клапейрона. Правда, отклонения от закона Менделеева–Клапейрона фактически исчезают для достаточно разреженных газов. Однако при низких температурах и больших плотностях начинаются заметные отклонения от этого закона. Отклонения от закона Менделеева–Клапейрона наблюдаются и при достаточно высоких температурах (порядка тысячи или нескольких тысяч градусов) для газов из многоатомных молекул. При этих температурах начинается распад молекул на атомы (диссоциация). При ещё более высоких температурах начинается распад атомов на электроны и ионы, и любой газ перестаёт подчиняться уравнению Менделеева–Клапейрона, даже при сколь угодно малых плотностях. В термодинамике идеальным называют газ, строго подчиняющийся уравнению Менделеева–Клапейрона.

Задачи с решениями

Задача 1. При нагревании газа при постоянном объёме на $\Delta T = 1$ К давление увеличилось на $\varphi = 0{,}2\%$. При какой начальной температуре находился газ?

Решение. В условии речь идёт о двух состояниях газа: до и после нагревания. Для каждого из них запишем уравнение состояния (уравнение Менделеева–Клапейрона):

$$P_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1, \qquad P_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2,$$

где учтено, что $V_1 = V_2 = V$.

Поделив почленно второе уравнение на первое получим:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

По условию задачи:

$$T_2 = T_1 + \Delta T,$$

$$P_2 = P_1 + \frac{\varphi}{100\%} \cdot P_1.$$

После несложных вычислений находим:

$$T_1 = \Delta T \frac{100\%}{\varphi} = 500\ K.$$

Задача 2. Спутник погрузился в тень Земли. При этом температура внутри спутника, равная вначале $T_0 = 300$ К, упала на 1%, из-за чего давление воздуха понизилось на $\Delta P = 1000$ Па. Определите массу воздуха в спутнике, если воздух занимает объём $V = 10$ м^3.

Решение. Начальное состояние воздуха в спутнике (до попадания его в тень) описывается уравнением

$$P_0 V = \frac{m}{M} R T_0,$$

где P_0 — начальное давление воздуха, m — масса воздуха, M — молярная масса воздуха. После попадания спутника в тень состояние воздуха изменилось, и теперь описывается уравнением:

$$PV = \frac{m}{M}RT,$$

где, согласно условию задачи, $P = P_0 - \Delta P$, $T = 0{,}99T_0$. Тогда, вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\Delta PV = \frac{m}{M}R \cdot 0{,}01T_0.$$

Окончательно, для массы воздуха в спутнике находим:

$$m = \frac{\Delta P \cdot V \cdot M}{R \cdot 0{,}01T_0} = 11{,}6 \text{ кг}.$$

Задача 3*. При нагревании идеального газа была получена зависимость давления от температуры, изображённая на рисунке 2. Определите, что производилось во время нагревания газа: сжатие или расширение? T — абсолютная температура.

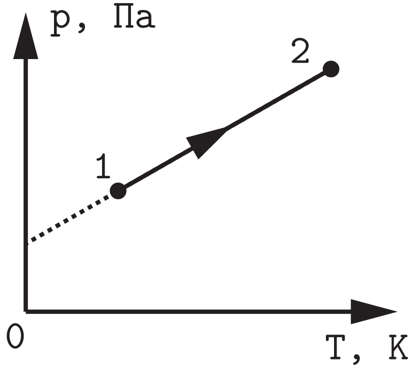

Рис. 2

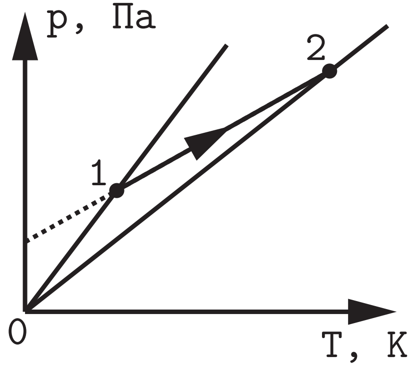

Рис. 3

Решение. Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся приёмом, основанном на вспомогательных построениях. График изохорного процесса в координатах (P, T) представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угловой коэффициент этой прямой обратно пропорционально зависит от объёма.

Проведём две изохоры, одна из которых проходит через точку 1, вторая — через точку 2 (см. рис. 3). Первая изохора соответствует объёму V_1 в состоянии 1, вторая — объёму V_2 в состоянии 2. Видно, что первая изохора идёт круче второй, следовательно, её угловой коэффициент больше. Это в свою очередь, означает, что $V_1 < V_2$, т. е. при переходе из состояния 1 в состояние 2 газ расширялся.

Задача 4. При расширении идеального газа его давление менялось по закону $P = \alpha V$, где α — постоянная величина. Во сколько раз изменится объём газа при увеличении температуры от 200 до 400 К?

Решение. Подставив данный в условии закон изменения давления в уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$, получим

$$V^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T.$$

Запишем это уравнение для двух состояний газа:

$$V_1^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_1, \qquad V_1^2 = \frac{\nu R}{\alpha} T_1.$$

Поделив второе из этих уравнений на первое и извлекая квадратный корень из обеих частей, получим:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{2}.$$

Задача 5. Один моль идеального газа совершает процесс, состоящий из двух изохор (1–2 и 3–4) и двух изобар (2–3 и 4–1), причём точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. График этого процесса в координатах (P, V) изображён на рисунке 4. Изобразите этот процесс в координатах (P, T) и (V, T).

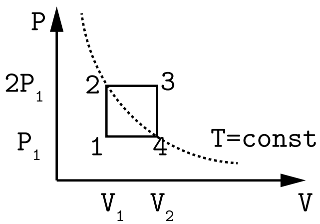

Рис. 4

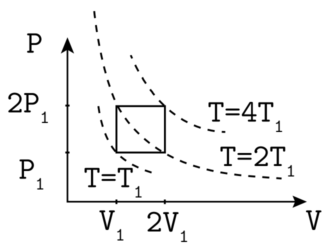

Рис. 5

Решение. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для состояний 1, 2, 3 и 4, учитывая данные задачи:

$$P_1V_1 = RT_1, \qquad 2P_1V_1 = RT_2, \qquad 2P_1V_3 = RT_3.$$

$$P_1V_3 = RT_4 = RT_2.$$

Из первых двух уравнений получаем $T_2 = 2T_1$, тогда первое и четвёртое уравнения дают $V_3 = 2V_1$. Тогда из третьего уравнения находим

$$T_3 = \frac{4P_1V_1}{R} = 4T_1.$$

Отметим, что чем больше температура на изотерме, тем дальше от начала координат находится соответствующая гипербола на графике в координатах (P, V) (см. рис. 5).

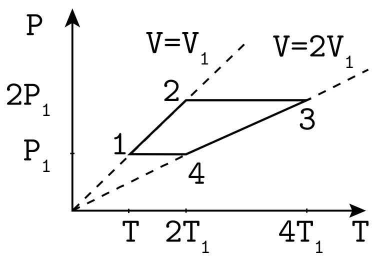

Рис. 6

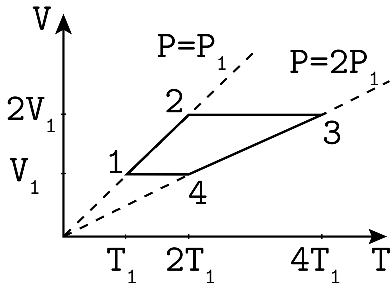

Рис. 7

Зная координаты всех ключевых точек построим графики в координатах (P, T) и (V, T). Результат представлен на рисунке 6 и рисунке 7.

Изохорные процессы 1–2 и 3–4 на графике в координатах (P, T) представляют собой отрезки прямых, проходящих через начало координат. Причём большему объёму соответствует меньший угол наклона (более пологая прямая). Аналогично изобарные процессы на графике в координатах (V, T) представляют собой отрезки прямых, проходящих через начало координат. Причём большему давлению соответствует меньший угол наклона (более пологая прямая).

Задача 6. На рисунке 8 в координатах (V,T) изображён замкнутый цикл 1231, который совершает некоторая масса азота. Известно, что минимальное давление газа в этом процессе $P_{min} = 3 \cdot 10^5$ Па. Определить массу газа и его давление в точке 1.

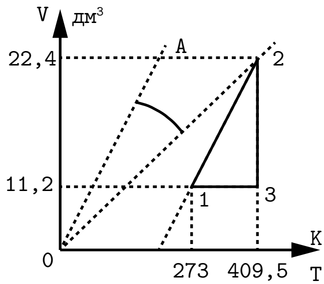

Рис. 8

Решение. Как обсуждалось в задаче **5**, изобарный процесс на графике в координатах (V,T) лежит на прямой, проходящих через начало координат, причём, чем меньше давление, тем больше угол наклона. Плавно переходя от изобары OA к изобарам с большим давлением, мы сначала коснёмся графика процесса в точке 2. Очевидно, что в точке 2 давление минимально, так как изобары, проходящие через другие точки графика цикла, соответствуют бо́льшим давлениям. В частности, максимальное давление газа в цикле достигается в точке3.

Запишем уравнение состояния газа в точке 2.

$$P_2V_2 = \frac{m}{\mu_{N_2}}RT_2,$$

где $P_2 = P_{min} = 3 \cdot 10^5$ Па, $V_2 = 22{,}4$ дм^3, $T_2 = 409{,}5$ К. В результате находим массу азота:

$$m = \frac{P_2V_2\mu_{N_2}}{RT_2} \approx 0{,}04 \text{ кг}.$$

Зная m, из уравнения Менделеева–Клапейрона для состояния газа в точке 1 мы можем найти давление в точке 1:

$$P_1 = \frac{mRT_1}{\mu_{N_2}V_1}.$$

Задача 7. Для одного моля идеального газа всегда выполняется условие $PV = RT$, где P — давление газа, V — объём газа, T — температура газа, $R = 8{,}31$ Дж/К. Экспериментатор заметил, что с одним молем идеального газа, что–то происходит, но так, что его температура зависит от параметров газа по закону $T = T_0 \cdot (1 - P_0/P)$, где T_0 и P_0 — некоторые известные положительные величины, причём давление всегда было $P > P_0$. Определите наибольший возможный объём газа в этом процессе.

Решение. Из условия задачи получаем $PV = RT_0(1 - P_0/P)$. Отсюда

$$V = R\frac{T_0}{P_0}\left(\frac{P_0}{P} - \left(\frac{P_0}{P}\right)^2\right) = R\frac{T_0}{P_0}(x - x^2),$$

где $x = P_0/P$. Выделим полный квадрат

$$x - x^2 = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2}\right) = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Следовательно, максимальное значение объёма $V = R\dfrac{T_0}{P_0} \cdot \dfrac{1}{4}$.

Задача 8. В вертикально расположенном цилиндре с гладкими стенками сечением S под поршнем массой m находится воздух при температуре T_1. Когда на поршень положили груз массой M, расстояние от него до дна цилиндра уменьшилось в n раз. На сколько повысилась температура воздуха в цилиндре? Атмосферное давление P_0.

Решение. В первой ситуации на поршень действуют две силы, направленные вертикально вниз (сила тяжести mg и сила давления атмосферы P_0S), и направленная вертикально вверх сила давления со стороны воздуха под поршнем P_1S. Из равенства нулю равнодействующей этих сил (условие механического равновесия поршня) для начального давления P_1 воздуха находим:

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Рассуждая аналогичным образом, для давления P_2 воздуха во второй ситуации (на поршень положили дополнительный груз массой M) имеем:

$$P_1 = P_0 + \frac{(m+M)g}{S}.$$

Пусть H_1 и H_2 — расстояния от дна цилиндра до поршня в начале и в конце опыта. Тогда для начального (V_1) и конечного (V_2) объёмов воздуха можно записать: $V_1 = H_1 S$, $V_2 = H_2 S$. С учётом полученных соотношений уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний воздуха принимают вид:

$$P_1 V_1 = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) H_1 S = \nu R T_1,$$
$$P_2 V_2 = \left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) H_2 S = \nu R T_2,$$

где ν — число молей воздуха в цилиндре. Учитывая, что объём воздуха уменьшился в n раз ($H_2 = H_1/n$,) для отношения температур воздуха находим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) H_1 S}{\left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) H_2 S} = \frac{n\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) S}{\left(P_0 + \frac{(m+M)g}{S}\right) S}.$$

Теперь для изменения температуры $\Delta T = T_2 - T_1$ получаем:

$$\Delta T = T_1 \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{Mg}{n(P_0 S + mg)}\right).$$

Заметим, что воздух будет нагреваться, если выражение в скобках больше нуля.

Задача 9. Воздушный шар, наполненный водородом H_2, имеет объём $V = 1000$ м^3. Чему равна подъёмная сила шара у поверхности Земли? Давление и температура водорода и окружающего воздуха одинаковые и составляют соответственно 760 мм.рт.ст. и 20 °C. Оболочка шара тонкая и имеет массу 9 кг, молярная масса воздуха $M_{\text{возд}} = 29$ г/моль.

Решение. Подъёмная сила шара равна разности силы Архимеда (выталкивающей силы), действующей на аэростат со стороны окружающего его воздуха, и силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород внутри него: $F_{\text{под}} = F_{\text{арх}} + F_{\text{тяж}}$.

Для силы Архимеда имеем:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{возд}} g V \text{ , где } \rho_{\text{возд}} = \frac{P M_{\text{возд}}}{RT}.$$

Здесь P — давление воздуха, $M_{\text{возд}}$ — его молярная масса, T — температура. Учитывая уравнение состояния водорода, для силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород, получаем:

$$F_{\text{тяж}} = (m + m_{\text{вод}})g = (m + \rho_{\text{возд}}V)g = \left(m + \frac{PM_{\text{возд}}V}{RT}\right)g,$$

где m — масса оболочки, $M_{\text{вод}}$ — молярная масса водорода. Теперь для подъёмной силы находим:

$$F_{\text{под}} = \left(\frac{PV(M_{\text{возд}} - M_{\text{вод}})}{RT} - m\right)g = 1020 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_{\text{под}} = 1020$ Н.

Задача 10[3]. На какую глубину в жидкость плотности ρ надо погрузить открытую трубку длины L, чтобы закрыв верхнее отверстие вынуть столбик жидкости высотой $L/2$? Атмосферное давление равно P.

Решение. Обозначим глубину погружения трубки x. Тогда уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха в верхней части трубки будет иметь вид:

$$PS(L - x) = \nu RT.$$

После того как трубку закрывают и вынимают количество вещества ν, температура T воздуха в её верхней части не меняются. Уравнение Менделеева–Клапейрона для нового состояния будет иметь вид:

$$P_1 S\left(L - \frac{L}{2}\right) = \nu RT.$$

Приравнивая левые части этих уравнений и сокращая на S, получаем.

$$P\left(L - x\right) = P_1 \frac{L}{2}.$$

Чтобы жидкость не вытекала из трубки, наружное давление P должно уравновешивать давление воздуха внутри P_1 и давление столба жидкости $\rho g \dfrac{L}{2}$.

$$P = P_1 + \rho g \frac{L}{2}.$$

В результате имеем:

$$P(L-x) = \left(P - \rho g \frac{L}{2}\right) \cdot 0{,}5 \cdot L,$$

$$x = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\rho g L}{2P}\right).$$

Задача 11[3]. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжёлый поршень. Масса газа и его температура над поршнем и под ним одинаковы. Отношение внутреннего объёма части сосуда над поршнем к внутреннему объёму части сосуда под поршнем равно 3. Каким будет это соотношение, если температуру газа увеличить в 2 раза?

Решение. Чтобы поршень находился в равновесии, давление газа под ним должно быть больше давления газа над ним на величину $\dfrac{mg}{S}$, где m — масса поршня, а S — его площадь (она равна площади горизонтального сечения сосуда). Обозначим суммарный объём газа V. Тогда объём над поршнем $\dfrac{3}{4}V$, а под поршнем — $\dfrac{1}{4}V$. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа над поршнем и под поршнем до нагрева:

$$P \cdot \frac{3}{4}V = \nu RT,$$

$$\left(P + \frac{mg}{S}\right) \cdot \frac{1}{4}V = \nu RT.$$

Из этих двух уравнений получаем $\dfrac{mg}{S} = 2P = \dfrac{8\nu RT}{3V}$.

Обозначим отношение объёмов над поршнем V_1 и под поршнем V_2 после нагрева через $x = \dfrac{V_1}{V_2}$. Тогда из условия $V_1 + V_2 = V$ получаем $V_2 = \dfrac{V}{1+x}$, $V_1 = x \cdot V_2$.

Теперь запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа над поршнем и под поршнем после нагрева:

$$P^* \cdot \frac{x}{1+x}V = \nu R2T, \qquad (P^* + \frac{mg}{S}) \cdot \frac{V}{1+x} = \nu R2T.$$

Аналогично случаю до нагрева, из этих двух уравнений получим:

$$\frac{mg}{S} = P^*(x-1) = \frac{(x^2-1)\nu R2T}{x \cdot V}.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{(x^2-1)2}{x} = \frac{8}{3}, \qquad 3x^2 - 4x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \approx 1.9.$$

Ответ: $x \approx 1{,}9$.

Задача 12. На дне озера глубиной h температура воды равна T_1, а на поверхности — T_2. Пузырёк воздуха, имеющий начальный объём V_1 медленно поднимается со дна. Чему равен объём пузырька у поверхности воды? Атмосферное давление равно P_0.

Решение. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа внутри пузырька на дне и у поверхности:

$$P_1V_1 = \nu RT_1, \qquad P_2V_2 = \nu RT_2.$$

Вблизи поверхности давление равно атмосферному $P_2 = P_0$, а на дне озера — $P_1 = P_0 + \rho gh$. В результате, получаем:

$$V_2 = \frac{\nu RT_2}{P_0} = \frac{P_1V_1T_2}{P_0T_1} = \frac{(P_0+\rho gh)V_1T_2}{P_0T_1}.$$

Задача 13[2]. С какой максимальной силой прижимается к телу человека медицинская банка, если площадь её отверстия $S = 12.6$ см^2? В момент прикладывания к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80$ °C, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °C. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Изменением объёма воздуха в банке (из–за втягивания кожи) пренебречь.

Решение. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для газа в банке в момент прикладывания к телу и в момент, когда воздух в ней охладился до t_0:

$$P_0V = \nu RT, \qquad P_2V = \nu RT_0.$$

Отсюда получаем $P_2 = P_0\dfrac{T_0}{T}$. Снаружи банка прижимается к коже атмосферным давлением с силой P_0S. С другой стороны давление воздуха в банке стремиться оттолкнуть банку от кожи с силой P_2S. В результате, сила с которой прижимается банка равна

$$F = P_0S - P_2S = P_0S\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) = 21\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 21$ Н.

Задача 14. U–образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с вертикально расположенными коленами заполняется ртутью так, что в каждом из открытых колен остаётся слой воздуха длиной $L = 320$ мм (см. рис. 9). Затем правое колено закрывается небольшой пробкой. Какой максимальной длины слой ртути можно долить в левое колено, чтобы она не выливалась из трубки? Опыт производится при постоянной температуре, внешнее давление составляет 720 мм.рт.ст.

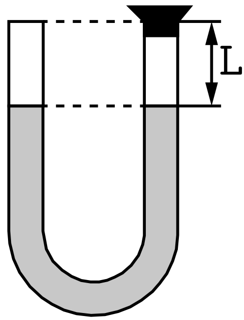

Рис. 9

Решение. Пусть S — площадь сечения трубки. Тогда, после того как правое колено закрыли пробкой, между пробкой и ртутью оказался заперт воздух, занимающий объём $V_1 = SL$ при давлении $P_1 = 720$ мм.рт.ст. Равновесное состояние этого воздуха описывается уравнением Менделеева–Клапейрона $P_1V_1 = \nu RT$ где ν — число молей воздуха, T — его температура. При доливании в левое колено максимально возможного количества ртути оно будет заполнено ртутью полностью, т. е. уровень ртути поднимется на L, а в правом колене уровень ртути поднимется на некоторую высоту h. Таким образом, полная высота столбика ртути, долитой в трубку, равна $L + h$.

Ртуть в трубке находится в равновесии. Условием равновесия является равенство давлений в точках, расположенных в правом и левом коленах на одном горизонтальном уровне. Выберем уровень, проходящий на расстоянии L от верхнего края трубки. Давление в левом колене $P_{\text{п}} = P_1 + \rho_{\text{рт}}gL$, где P_1 — атмосферное давление на открытую поверхность ртути.

Давление в правом колене $P_л = P_2 + \rho_{рт}gh$, где P_2 — давление воздуха запертого в правом колене. Тогда условие равновесия ртути в трубке можно записать следующим образом

$$P_п = P_1 + \rho_{рт}gL = P_2 + \rho_{рт}gh = P_л.$$

Новое равновесное состояние запертого в правом колене воздуха описывается уравнением

$$P_2V_2 = P_2S(L-h) = \nu RT.$$

Используя составленные соотношения, получаем квадратное уравнение для определения h

$$P_2S(L-h) = P_1 + \rho_{рт}g(L-h)S(L-h) = P_1SL,$$

решая которое, находим: $h = 80$ мм (второй корень уравнения $h = 1280$ мм не удовлетворяет условию задачи). Следовательно, в трубку можно долить слой ртути максимальной высотой $L + h = 400$ мм. *Ответ:* $L + h = 400$ мм.

Задача 15[23]. Пробирку длиной $l = 35$ см, перевернули вверх дном и полностью погрузили в ртуть так, что дно пробирки касается поверхности жидкости (пробирка вертикальна). При этом жидкость заполнила часть пробирки длиной $h = 4$ см. Затем пробирку медленно подняли вверх так, что её нижний край оказался чуть ниже поверхности ртути (пробирку из ртути не вынимали). Считайте, что в процессе подъема температура воздуха в пробирке не менялась и оставалась равной $T_0 = 300$ K. Затем температуру воздуха в пробирке изменили, и ртуть вновь заполнила часть пробирки длиной h. Найдите конечную температуру T воздуха в пробирке. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм.рт.ст.

Решение. Проверим, не выходит ли часть воздуха из пробирки при её (почти полном) извлечении из ртути.

Обозначим площадь внутреннего сечения пробирки, перпендикулярного её оси, через S, а высоту столба ртути, соответствующую атмосферному давлению — $H = 760$ мм.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха в пробирке в момент погружения и в момент, когда её (почти полностью) подняли из ртути:

$$\rho g(H+l-h)S(l-h)=\nu_0 RT_0,$$

$$\rho gHSl=\nu RT_0.$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{\nu_0}{\nu}=\frac{(H+l-h)(l-h)}{Hl}=\frac{(76+31)\cdot 31}{76\cdot 35}=1{,}23>1,$$

следовательно, в процессе подъема часть должна была выйти из пробирки. Таким образом, после подъема в пробирке содержится ν молей воздуха при атмосферном давлении.

Для состояния после того, как температуру изменили, уравнение Менделеева–Клапейрона будет иметь вид:

$$\rho g(H-h)S(l-h)=\nu RT.$$

Подставляя в это уравнение ν, получаем

$$\frac{T}{T_0}=\frac{(H-h)(l-h)}{hl}\Rightarrow T=252\ \text{К}.$$

Если не учитывать уменьшение количества воздуха в пробирке и вместо ν использовать ν_0, получается ответ

$$\frac{T}{T_0}=\frac{(H-h)(l-h)}{(H+l-h)(l-h)}\Rightarrow T=202\ \text{К},$$

за который давали 3 балла из 10.

Ответ: 252 К.

Задача 16[13]. В закрытом с обоих концов откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. В пространство под поршнем вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту h (см. рис. 10). На какой высоте h_1 установится поршень, если этот газ нагреть от начальной температуры T до T_1? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.

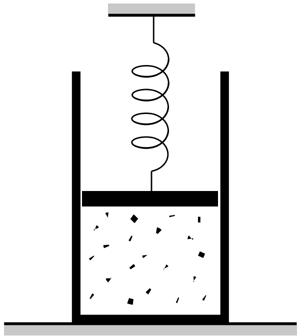

Рис. 10

Решение. Поршень всегда будет устанавливаться в таком положении, при котором сила давления газа равна силе сжатой пружины $F = kh$. Тогда уравнение Менделеева–Клапейрона будет иметь вид:

$$\frac{kh}{S} \cdot Sh = \nu RT, \qquad h^2 = \frac{\nu R}{T}, \qquad \frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{T_1}{T}}.$$

Ответ: $h = h_1\sqrt{\dfrac{T_1}{T}}$.

Задача 17[12]. Открытую с обоих концов трубку длины $L = 2$ м погружают в вертикальном положении на половину ее длины в сосуд с ртутью. В трубку вдвигают поршень. На каком расстоянии l от поверхности ртути в сосуде должен находиться поршень, чтобы из трубки вышла половина воздуха? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Решение. При вдвигании поршня сначала воздух будет выдавливать ртуть из трубки. После того, как вся ртуть выдавится, из трубки начнет выдавливаться воздух.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для газа в трубке в момент времени перед вставкой поршня и в момент, когда в трубке осталась половина воздуха.

$$p_0V_0 = \nu RT, \qquad (p_0 + \rho g\frac{L}{2})V_1 = \frac{\nu}{2}RT.$$

Обозначим площадь внутреннего сечения пробирки, перпендикулярного её оси, через S, а высоту столба ртути, соответствующую атмосферному давлению — $H = 760$ мм. Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\rho g H S \frac{L}{2} = \nu R T,$$

$$\rho g (H + \frac{L}{2}) S (L - l) = \frac{\nu}{2} R T.$$

Делим второе уравнение на первое:

$$\frac{(H + \frac{L}{2})(\frac{L}{2} - l)}{H \frac{L}{2}} = \frac{1}{2}.$$

После преобразований получаем:

$$l = \frac{L}{2} - \frac{HL}{4(H + \frac{L}{2})} = 0{,}784 \text{ м}.$$

Ответ: 0,784 м.

Задача 18[3]. Герметически закрытый бак высотой H заполнен жидкостью плотности ρ, причем на дне имеется пузырек воздуха. Давление на дно бака p_0. Каким станет давление на дно бака, если пузырек всплывет?

Решение. Давление воздуха в пузырьке равно давлению жидкости вблизи дна бака p_0. (Это следует из условия равновесия тонкого слоя жидкости, окружающей пузырек.)

Поскольку объем бака постоянен и жидкость практически несжимаема, объем пузырька при всплытии не изменится. Температуры внутри пузырька также можно считать постоянной. Тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что давление воздуха тоже не меняется. Таким образом, давление воздуха на поверхности жидкости станет равно p_0.

Тогда давление на дно бака равно $p = p_0 + \rho g H$.

Ответ: $p = p_0 + \rho g H$.

Задача 19. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд разделён тонким подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится кислород $\mathrm{O_2}$, а слева — смесь гелия He и водорода $\mathrm{H_2}$. Масса кислорода $m_{\mathrm{O_2}} = 32$ г. Поршень при этом находится в равновесии посередине сосуда. Материал поршня, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии четверти длины цилиндра от левой стенки. Определите массы гелия и водорода в смеси. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

Решение. В начальный момент кислород и смесь водорода с гелием занимают одинаковые объёмы. Температуры в обеих частях сосуда одинаковы, так как поршень хорошо проводит тепло. Процесс диффузии происходит гораздо медленнее, чем процесс выравнивания давлений. Поэтому в первый момент давления слева и справа от поршня также одинаковы (поршень находится в равновесии). Это позволяет сделать вывод о том, что в начальный момент число молей газа в обеих частях сосуда одинаковое. Справа от поршня находится 1 моль кислорода ($\nu_{\mathrm{O_2}} = m_{\mathrm{O_2}}/M_{\mathrm{O_2}}$, $M_{\mathrm{O_2}} = 32$ г/моль), следовательно, слева от поршня находится 1 моль смеси гелия и водорода ($\nu_{\mathrm{H_2}} + \nu_{\mathrm{He}} = 1$моль).

После окончания процесса диффузии гелий займёт весь объём сосуда, так как перегородка для него проницаема. Подчеркнём, что гелий будет находиться в обеих частях сосуда, причём давление его слева $p_{\mathrm{He,Л}}$ и справа $p_{\mathrm{He,П}}$ будет одинаковым: $p_{\mathrm{He,Л}} = p_{\mathrm{He,П}}$.

В новом положении равновесия давление смесей газов слева и справа от поршня будет одинаковым. При этом давление слева складывается из давления кислорода и гелия, а справа — водорода и гелия:

В новом положении равновесия давление смесей газов слева и справа от поршня будет одинаковым. При этом давление слева складывается из давления кислорода и гелия, а справа водорода и гелия:

$$p_{\mathrm{Л}} = p_{\mathrm{He,Л}} + p_{\mathrm{H_2}} = p_{\mathrm{П}} = p_{\mathrm{He,П}} + p_{\mathrm{O_2}}.$$

Следовательно, давления кислорода $p_{\mathrm{O_2}}$ и водорода $p_{\mathrm{H_2}}$ оказываются одинаковыми: $p_{\mathrm{O_2}} = p_{\mathrm{H_2}}$.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для кислорода и водорода имеем

$$\frac{3}{4}p_{O_2}V = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}RT, \qquad \frac{1}{4}p_{H_2}V = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}RT,$$

где m_{H_2} — масса водорода, $M_{O_2} = 32$ г/моль и $M_{H_2} = 2$ г/моль — молярные массы кислорода и водорода. Отсюда находим массу водорода

$$m_{H_2} = \frac{M_{H_2}m_{O_2}}{3M_{O_2}} = \frac{2}{3}\text{г},$$

что соответствует числу молей водорода $\nu_{H_2} = 1/3$. Следовательно, число молей гелия $\nu_{He} = 2/3$, а масса гелия в смеси $m_{He} = \nu_{He}M_{He} = 8/3$ г.

Ответ: $m_B = 2/3$ г, $m_Г = 8/3$ г.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 20. Идеальный газ сначала расширяется при постоянном давлении, затем нагревается при постоянном объёме, потом газ изотермически сжимается, после охлаждается при постоянном давлении и по изохоре возвращается в начальное состояние. Нарисуйте графики этого процесса в координатах (V, P), (T, V), (T, P).

Задача 21*. Уравнение теплового процесса $PV^2 = \alpha$, где α — некоторая константа. Увеличивается или уменьшается температура газа при увеличении объёма?

Задача 22. Определите число молекул в 1 см^3 воздуха при н.у. ($P = 10^5$ Па, $T = 273$ К).

Задача 23. На рисунке 11 в координатах (P, T) изображён замкнутый цикл 1234561. Изобразите этот процесс в координатах (P, V) и (V, T).

Задача 24. Горизонтально расположенный сосуд, постоянного внутреннего сечения и длины L, разделён теплонепроницаемой подвижной перегородкой (см. рис. 12). В одной части сосуда находится азот, в другой гелий. В первоначальном состоянии температура газов 300 К, а объём занимаемый гелием в два раза больше объёма азота. Затем температуру азота повышают до 600 К. На какое расстояние переместится перегородка? Толщина перегородки много меньше L. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

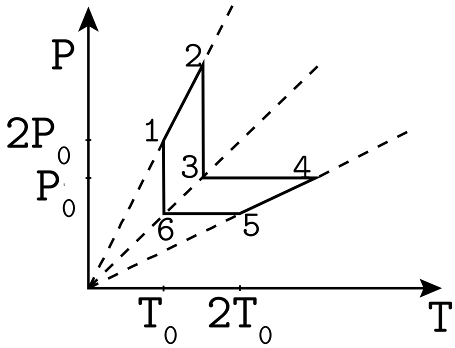

Рис. 11

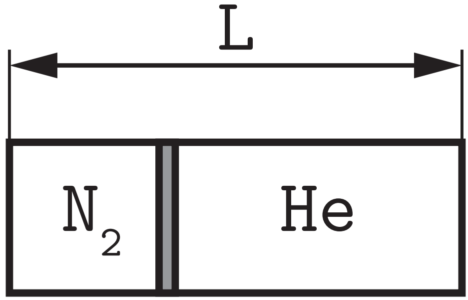

Рис. 12

Задача 25. Водитель ручным насосом накачивает полностью спустившую шину. Объём шины $V = 25$ л. Насос при каждом рабочем ходе захватывает $V_0 = 0{,}5$ л воздуха из атмосферы при нормальных условиях ($P_0 = 10^5$ Па). Сколько ходов должен сделать поршень насоса, чтобы накачать шину до давления $P = 2 \cdot 10^5$ Па?

Задача 26[3]. В горлышко бутылки вставили пробку сечением 2 см^2. Давление воздуха в бутылке равно 10^5 Па при температуре 7 °С. Чтобы вынуть пробку при этой температуре нужно приложить силу 10 Н. Насколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела?

Задача 27. Оцените, какое количество воздушных шариков наполненных гелием потребуется, чтобы поднять человека, масса которого со снаряжением равна 70 кг? Атмосферное давление 10^5 Па, температура воздуха +17 °С, объём шарика 50 л.

Задача 28. В тонкостенную колбу впаяна длинная стеклянная трубка постоянного внутреннего сечения (см. рис. 13) В трубке находится капелька ртути, отделяющая воздух в колбе от атмосферы. Изменение температуры окружающего воздуха при постоянном атмосферном давлении приводит к смещению капельки — получаем газовый термометр. При температуре $t_1 = 17$ °С. Капелька находится на расстоянии $L_1 = 20$ см от левого края трубки.

Минимальная температура, которую можно измерить таким термометром, равна $t_0 = 7$ °C. При какой температуре t_2 капелька будет находиться на расстоянии $L_1 = 40$ см от колбы? Атмосферное давление считать неизменным.

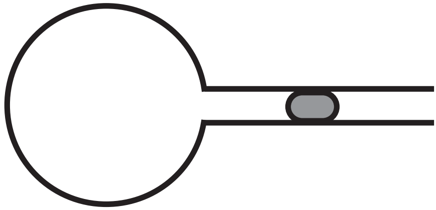

Рис. 13

Задача 29. В вертикально расположенной тонкостенной трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 280$ мм заперт слой воздуха длиной L. Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Опыт производится при постоянной температуре, внешнее давление составляет 770 мм.рт.ст.

Задача 30. Два моля идеального газа находились в баллоне, где имеется клапан, выпускающий газ при давлении внутри баллона более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па. При температуре 300 К давление в баллоне было равно $1 \cdot 10^5$ Па. Затем газ нагрели до температуры 600 К. Сколько газа при этом вышло из баллона? Ответ приведите в молях.

Указание. Клапан работает следующим образом. При давлении внутри баллона более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па клапан открывается. Как только давление в баллоне становится менее $1{,}5 \cdot 10^5$ Па, клапан закрывается. Таким образом, давление в баллоне поддерживается не более $1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

Задача 31. Газ находится в вертикальном цилиндре с гладкими стенками под тяжёлым поршнем с площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2. Когда цилиндр перевернули открытым концом вниз, оказалось, что в новом равновесном состоянии объём газа в три раза больше первоначального. Определите массу поршня. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, $g = 10$ м/с^2. Температура поддерживается постоянной.

Задача 32[2]. Пробирка длиной L, содержащая газ при температуре T, полностью погружена в жидкость плотности ρ, так что дно пробирки касается поверхности жидкости. При этом жидкость заполняет половину пробирки. Пробирку поднимают вверх до тех пор, пока она не коснется поверхности жидкости своим открытым концом. Как надо изменить температуру газа в пробирке, чтобы жидкость снова заполнила половину пробирки? Атмосферное давление p_0.

Задача 33[2]. Шар–зонд, наполненный водородом имеет нерастяжимую герметичную оболочку вместимостью $V = 50$ м^3. Масса шара вместе с водородом $M = 5$ кг. На какую максимальную высоту сможет подняться шар–зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5$ км высоты? Температура воздуха в стратосфере $t = -53$ °C, температура водорода равна температуре окружающего воздуха.

Задача 34[2]. В запаянную с одного конца U–образную трубку длиной $2L$ налита жидкость так, что в правом запаянном колене остался воздух. Уровень жидкости в открытом колене совпадает с краем трубки. Разность между уровнями равна $L/3$ (см. рис. 14). Какую часть жидкости нужно выпустить через кран в нижней части сосуда, чтобы уровни жидкости в открытом и закрытом коленах сравнялись? Давлением паров жидкости пренебречь. Плотность жидкости равна ρ, атмосферное давление равно p_0.

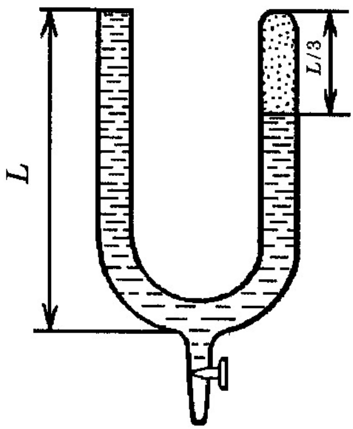

Рис. 14

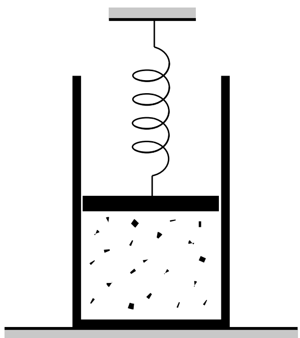

Рис. 15

Задача 35[3]. Газ находится в сосуде при давлении 2 МПа и температуре 27 °C. После нагревания на 50 °C в сосуде осталась только половина газа (по массе). Определите установившееся давление.

Задача 36. В комнате в вертикально расположенном цилиндре под весомым поршнем, который может перемещаться без трения, находятся ν молей идеального газа при температуре T (см. рис. 15). Поршень подвешен на пружине жесткостью k. Газ нагревают, так что в конечном состоянии его давление увеличивается в $\alpha = 2$ раза, а температура увеличивается в $\beta = 3$ раза. Найдите начальное давление газа. Площадь поршня равна S.

Молекулярно–кинетическая теория

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Законы идеальных газов, найденные опытным путём, находят довольно простое объяснение в молекулярно–кинетической теории (МКТ). Она исходит при этом из упрощённых представлений о строении газа. Это обусловлено рядом причин, в частности, неточным знанием сил взаимодействия между молекулами. Однако, как оказывается, даже такая упрощённая модель газа позволяет найти уравнение состояния, правильно описывающее его поведение.

В молекулярно–кинетической теории принимается следующая идеализированная модель газа — *идеальный газ*. Молекулы газа считаются твёрдыми, абсолютно упругими шариками, причём размеры молекул малы по сравнению со средним расстоянием между ними. Это означает, что собственный суммарный объём молекул значительно меньше объёма сосуда, в котором находится газ. Взаимодействие между молекулами проявляется только при непосредственном столкновении их друг с другом. Между столкновениями молекулы движутся по инерции. Движение молекул подчиняется законам механики Ньютона. Для нахождения уравнения состояния газа необходимо сделать ещё важное упрощающее предположение, а именно, считать движение любой молекулы газа беспорядочным, хаотичным.

Аккуратный вывод основного уравнения молекулярно–кинетической теории идеального газа требует принимать во внимание ряд моментов, например, наличие в газе молекул, движущихся с разными по величине скоростями, столкновения молекул между собой, характер столкновения отдельной молекулы со стенкой сосуда (упругий или неупругий).

Давление, которое оказывает газ на стенку сосуда, есть результат ударов молекул газа о стенку. Если бы в сосуде содержалось всего несколько молекул, то их удары следовали бы друг за другом редко и беспорядочно. Поэтому нельзя было бы говорить ни о какой регулярной силе давления, действующей на стенку. Стенка подвергалась бы отдельным практически мгновенным бесконечно малым толчкам. Если же число молекул в сосуде очень велико, то велико и число ударов их о стенку сосуда. Одновременно о стенку сосуда ударяется громадное количество молекул. Очень слабые силы отдельных ударов складываются при этом в значительную по величине и почти постоянную силу, действующую на стенку. Среднее по времени значение этой силы, отнесённое к единичной площадке, и есть давление газа, с которым имеет дело термодинамика.

Пусть в сосуде объёма V находятся N одинаковых молекул идеального газа, а m_0 — масса одной молекулы. В рамках молекулярно-кинетической теории показывается, что давление p газа определяется выражением

$$p = m_0 n\overline{v^2}/3, \tag{1}$$

где $n = N/V$ — концентрация молекул газа, $\overline{v^2}$ — среднее значение квадрата скорости молекулы. Выражение (1) называют *основным уравнением молекулярно–кинетической теории идеального газа.*

Заметим, что величина $m_0\overline{v^2}/2$ есть средняя кинетическая энергия $\overline{E}$ поступательного движения молекулы. Поэтому полученную формулу можно представить в другом виде:

$$p = 2n\overline{E}/3. \tag{2}$$

Молекулярно–кинетический смысл температуры

Найдём связь между средней кинетической энергией $\overline{E}$ поступательного движения молекулы газа и его температурой T. Учитывая соотношение $n = N/V$, перепишем уравнение (2) в виде:

$$pV = 2N\overline{E}/3.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением Менделеева–Клапейрона

$$pV = \nu RT = \frac{N}{N_A}RT,$$

получаем для средней кинетической энергии $\overline{E}$:

$$\overline{E} = \frac{m_0\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}kT,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. С учётом этого соотношения выражение (1) для давления можно записать в виде:

$$p = nkT.$$

В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия поступательного движения любых молекул имеет одно и то же значение, т. е. средняя кинетическая энергия молекул обладает основным свойством температуры — в состоянии теплового равновесия она одинакова для всех молекул газов, находящихся в тепловом контакте, а также для различных молекул газовой смеси. Величину $\overline{E}$ можно принять поэтому за меру температуры газа. В этом и состоит физический смысл температуры с молекулярно–кинетической точки зрения.

Скорость хаотического (теплового) движения молекул характеризуется *средней квадратичной скоростью*

$$v_{\text{ср. кв.}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Дополнительно хочется отметить, что

$$E_{\text{полн}} \propto kT,$$

где в $E_{\text{полн}}$ входит средняя кинетическая энергия поступательного, вращательного, колебательного и других движений молекулы. Более того в классической термодинамике эта пропорциональность справедлива не только для газообразных, но и для жидких и твёрдых тел и сред.

Таким образом, ещё раз напоминаем, что температура есть мера средней кинетической энергии молекул. В этом и состоит молекулярно–кинетический смысл температуры. В частности при температуре $T = 0$ К прекращается всякое тепловое движение молекул.

Внутренняя энергия

Внутренней энергией тела называют сумму всех кинетических и сумму всех потенциальных энергий молекул, из которых оно состоит.

Внутренняя энергия тела, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, не зависит от того, каким способом данное тело приведено в данное состояние, а определяется параметрами состояния, например, температурой и объёмом. (Как обсуждалось выше, температура определяет кинетическую энергию движения молекул, а объём — среднее расстояние между молекулами, что влияет на потенциальную энергию их взаимодействия)

В случае идеального газа взаимодействием между молекулами можно пренебречь, следовательно, внутренняя энергия идеального газа — это сумма кинетических энергий его молекул.

Степени свободы

Число степеней свободы — это число *независимых* параметров (координат), необходимых для однозначного описания положения тела в пространстве.

Для описания положения в пространстве одноатомной молекулы потребуется всего три координаты, что соответствует тому, что она обладает тремя степенями свободы. Изменение координат приводит к поступательному движению, поэтому данные степени свободы называют поступательными.

В качестве примера рассмотрим твердое тело в форме параллелепипеда. Для описания его положения в пространстве необходимо и достаточно задать, во–первых, положение (три координаты) одной его точки, например его центра масс, во–вторых его ориентацию относительно этой точки (три угла). Изменение углов приводит к вращению, поэтому данные степени свободы называют вращательными. Таким образом, твердое тело в общем случае имеет шесть степеней свободы — три поступательные и три вращательные.

У симметричных тел может оказаться меньше трех вращательных степеней свободы. Например, для цилиндра вращение вокруг его оси не приводит к изменению его положения. Аналогично для двухатомной молекулы вращение вокруг оси, соединяющей атомы, не приводит к изменению положения этой молекулы. Таким образом, двухатомная молекула имеет 5 степеней свободы — 3 поступательные и 2 вращательные. Заметим, что расстояние между атомами в молекулах может меняться, что соответствует колебательному движению. Каждая связанная пара атомов в молекуле обладает еще и колебательной степенью свободы. При низких температурах амплитуда колебаний мала и расстояния между атомами можно считать неизменным. Таким образом, колебательные степени свободы нужно учитывать только при высоких температурах (больше 1000 °C для большинства молекул).

Внутренняя энергия идеального газа

Для идеального газа справедлива теорема равнораспределения энергии по степеням свободы: если макроскопическая система подчиняется законам классической механики, то на каждое слагаемое в энергии молекулы, квадратично зависящее от координат или скоростей молекул, приходится в среднем $kT/2$.

Можно также использовать более простую формулировку: на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем $kT/2$. Но тогда нужно добавить исключение — на каждую *колебательную* степень свободы молекулы приходится в среднем kT (Это связано с тем, что при колебаниях атомов в молекуле следует учитывать не только их кинетическую энергию, но и их потенциальную энергию взаимодействия).

Способы изменения внутренней энергии

Внутреннюю энергию тела можно изменить:

- теплопередачей (теплопроводностью, конвекцией и излучением);
- совершением механической работы над телом (трение, удар, сжатие и др.).

Энергия тела, которую оно получает или отдает при обмене теплом с другими телами (без совершения работы), называют *количеством теплоты*.

$$Q = \Delta U.$$

Виды теплопередачи

Теплопроводность — явление передачи теплоты (энергии) от одной части тела (более нагретой) к другой (менее нагретой). Передача теплоты осуществляется в основном за счет движения и столкновения отдельных молекул. При этом, при столкновениях некоторая доля кинетической энергии молекул из одной (более нагретой) части тела передается молекулам другой (менее нагретой) его части. Важно заметить, что при теплопроводности само вещество не перемещается, а теплопередача всегда идёт в определённом направлении: внутренняя энергия горячего тела уменьшается, а внутренняя энергия холодного тела увеличивается.

В твёрдых металлических телах теплопроводность осуществляется преимущественно за счет движущихся свободных электронов (в металлах также осуществляется перенос тепла колеблющимися атомами, но их вклад сравнительно небольшой).

Благодаря непрерывному взаимодействию соседствующих молекул теплопроводность в твёрдых телах и жидкостях происходит заметно быстрее, чем в газах. Интенсивность теплопроводности между телами зависит от разности их температур, площади поверхности через которую происходит теплопередача, а также от свойств вещества, расположенного между телами.

В обычных условиях для расчёта количества теплоты Q, передаваемого через слой вещества путем теплопроводности, пользуются следующим соотношением (Законом Фурье):

$$Q = \kappa \frac{S\Delta T}{h} t.$$

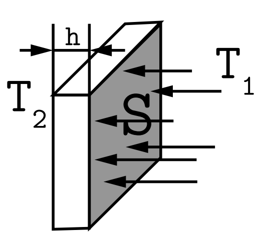

Рис. 16

Здесь κ — коэффициент теплопроводности вещества слоя, S — площадь поверхности, через которую происходит теплопередача (см. рис. 16), h — толщина слоя вещества, t — время наблюдения, $\Delta T = T_1 - T_2$ разность температур между границами слоя, $T_1 > T_2$.

Следует отметить, что значения коэффициентов теплопроводности различных веществ отличаются столь сильно, что некоторые вещества применяют как эффективные теплопроводники (металлы, термомастика), а другие, наоборот, как теплоизоляторы (кирпич, дерево, пенопласт).

В поле силы тяжести ещё одним механизмом теплопередачи может служить конвекция. Естественной конвекцией называют процесс перемешивания вещества, осуществляемый силой Архимеда, вследствие большой разности температур.

Конвекция может быть обнаружена в газах, жидкостях или сыпучих материалах.

Например, в кастрюле (см. рис. 17) нагреваемая снизу вода расширяется, плотность её уменьшается. Сила Архимеда, действующая на небольшой фрагмент прогретой воды, поднимает её вверх. На поверхности прогретая вода остывает, смешиваясь с более холодной водой, испаряясь и т.п.

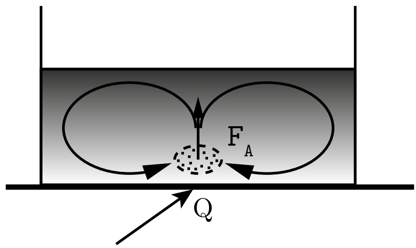

Рис. 17

Вследствие чего вода сжимается, становится более плотной, и тонет. Возникает конвективная ячейка.

В практике часто встречается принудительная конвекция, осуществляемая насосами или специальными перемешивающими механизмами.

Все тела, температура которых отлична от абсолютного нуля, излучают электромагнитные волны, которые переносят энергию. При комнатной температуре это в основном инфракрасное излучение. Так происходит *лучистый теплообмен*, или теплопередача посредством теплового излучения.

Из этого факта следует, что энергией в форме излучения обмениваются практически все окружающие нас тела. Этот процесс также приводит к выравниванию температур тел, участвующих в теплообмене.

Согласно теории равновесного теплового излучения интенсивность I

излучения так называемого абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры T тела (Закон Стефана–Больцмана):

$$I = \sigma T^4.$$

6 (Подробно речь об этом пойдёт в курсе теоретической физики университета).

В замкнутой системе теплообмен должен привести к установлению теплового равновесия. Теперь понятию «замкнутой системы» можно придать более отчётливые очертания: если границы некоторой области пространства имеют очень малый коэффициент теплопроводности (граница — слой теплоизолятора), и излучение через него не проходит, то содержащаяся внутри области пространства энергия изменяться не может и будет сохраняться.

Работа и изменение внутренней энергии. Работа газа при расширении и сжатии

Для изменения внутренней энергии тела необходимо изменить кинетическую или потенциальную энергию его молекул. Этого можно добиться, не только при теплопередаче, но и деформируя тело. При упругой деформации изменяется расположение молекул или атомов внутри тела, приводящее к увеличению сил взаимодействия (а значит, и потенциальной энергии взаимодействия), а при неупругой изменяются и амплитуды колебаний молекул или атомов, что увеличивает кинетическую энергию молекул или атомов.

При ударе молотком по свинцовой пластине молоток заметно деформирует поверхность свинца. Атомы поверхностных слоёв начинают двигаться быстрее, внутренняя энергия пластины увеличивается.

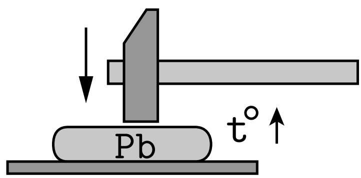

Рис. 18

Стоя на улице в морозную погоду и потирая руки, мы совершаем работу, что также приводит к увеличению внутренней энергии.

Если сила трения возникла из–за взаимодействия шероховатостей, то при прохождении одной шероховатости мимо другой, возникают колебания частей тела. Энергия колебаний превращается в тепло. Тот же процесс происходит и при разрывах шероховатостей.

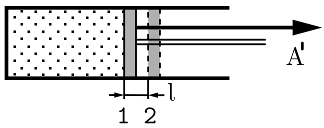

Рис. 19

Если работу совершает газ, закрытый в цилиндре, и поршень будет перемещаться из положения 1 в положение 2, то работа будет равна:

$$A' = F \cdot l \cdot \cos\alpha = (pS)l \cdot 1 = p\Delta V. \tag{3}$$

Здесь F — сила, действующая на поршень со стороны газа, p — давление газа, S — площадь поверхности поршня, ΔV — изменение объёма газа.

В некоторых случаях для расчета работы газа в тепловом процессе удобно воспользоваться графическим методом. Суть его можно представить следующим образом.

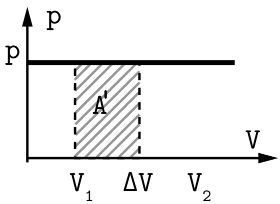

Рис. 20

Допустим, что газ изобарно расширяется от начального объёма V_1 до конечного объёма V_2. На pV–диаграмме график процесса представляет собой отрезок прямой линии. Сравним полученное выражение для расчёта работы A' газа (3) с «площадью» заштрихованного прямоугольника под графиком изобары $S = p(V_2 - V_1)$. Нетрудно убедиться, что $S = A'$, т. е. работа газа при расширении от объёма V_1 до объёма V_2 численно равна площади прямоугольника под графиком процесса на этом участке зависимости.

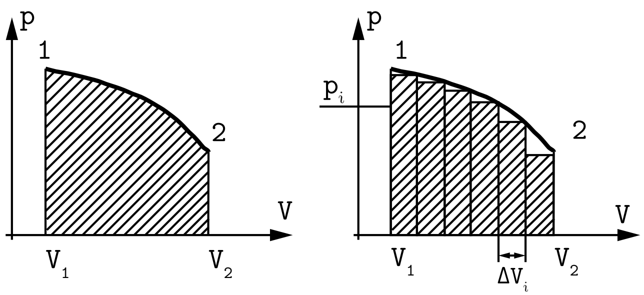

Рис. 21

Если же процесс является более сложным (см. рис. 21), то и в этом случае графически работу можно было бы найти как площадь фигуры под графиком процесса 1–2.

Докажем это, рассмотрев переход газа из состояния 1 в состояние 2 не по кривой, а по ломаной, состоящей из N отрезков изохор и изобар. Работа на i–ой изобаре (на рисунке $i = 5$) равна $A_i = p_i \Delta V_i$. Суммируя площади под всеми изобарами, получим площадь фигуры под ломаной, которую можно приближённо считать равной работе газа при расширении:

$$A = p_1 V_1 + \ldots + p_N V_N.$$

Эту работу можно вычислить точнее, если увеличить число изобар и изохор ломаной (увеличить N и уменьшить ΔV_i). Площадь под ломаной при этом возрастёт, так как к площади заштрихованной фигуры добавятся новые площади.

Если число изобар и изохор устремить к бесконечности так, чтобы длина отрезков любой изобары и изохоры неограниченно уменьшалась, то ломаная линия совпадёт с кривой. Это и доказывает утверждение о том, что графически работу газа можно вычислить, найдя площадь фигуры под графиком процесса.

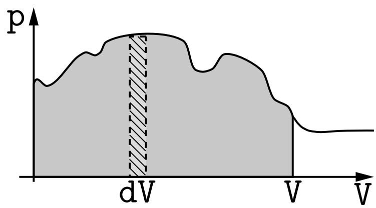

Рис. 22

Аналогично подсчитывают работу газа при его сжатии (уменьшении объёма). Необходимо только помнить, что работа газа в этом случае отрицательна.

При разбиении фигуры, образованной графиком процесса, изохорами и осью объёмов, на бесконечно малые элементы, изменение объёма записывается как dV. В этом случае малый элемент общей работы (элементарную работу) можно найти как $dA = PdV$ а всю работу получим суммированием всех элементарных работ на участке расширения:

$$A = \int dA = \int_{V_0}^{V_1} PdV.$$

Работа газа численно равна площади фигуры под графиком $p(V)$.

Если идеальный газ находится в теплоизолированном сосуде (стенки сосуда не пропускают тепло), то работа внешней силы, совершённая над ним, равна изменению кинетически энергий молекул газа, т. е. равна изменению его внутренней энергии.

$$\Delta U = A.$$

В рамках молекулярно-кинетической теории этот факт можно пояснить следующим образом. При столкновении молекулы с движущимся навстречу ей массивным поршнем перпендикулярная к поршню составляющая скорости молекулы увеличится на удвоенную скорость поршня.

Первый закон термодинамики

Обобщая полученные результаты рассмотрений способов изменений внутренней энергии, можем записать:

$$\Delta U = Q + A.$$

По сути, мы видим закон сохранения энергии, записанный для тепловых процессов, но это и есть первый закон термодинамики.

Изменение внутренней энергии термодинамической системы равно сумме полученного количества теплоты и работы, совершённой над ней окружающими телами.

Можно проиллюстрировать первый закон термодинамики и на другом примере.

Если газ заперт в легком цилиндре под поршнем, а цилиндру сообщить количество теплоты Q, то газ нагреется, увеличив внутреннюю энергию, (теплоёмкостью цилиндра пренебрегаем), его давление увеличится, и он совершит работу над окружающими телами A'.

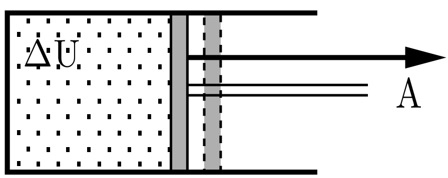

Рис. 23

$$Q = \Delta U + A'.$$

Количество теплоты, переданное термодинамической системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение работы системой над окружающими телами.

В последних формулах встретились работы A и A'. Напомним, что A' — работа термодинамической системы над окружающими телами. A — работа окружающих тел над термодинамической системой. При равномерном движении поршня сила, действующая на поршень со стороны газа, расположенного внутри цилиндра, равна по модулю и противоположна по направлению силе, действующей на газ со стороны поршня. Очевидно, что

$$A = -A'.$$

Работа окружающих тел над системой равна и противоположна по знаку работе системы над окружающими телами.

Первый закон термодинамики имеет одно важное следствие: Невозможно создать вечный двигатель первого рода, т. е. невозможно создать двигатель, который непрерывно и бесконечно долго совершал бы работу без потребления энергии из окружающей среды. И действительно: если $Q = 0$, то $\Delta U = -A'$ следовательно, система может совершить вполне конечную работу, не превосходящую запаса внутренней энергии системы.

Коротко остановимся на терминологии, используемой при описании тепловых процессов.

Термодинамический процесс называется *обратимым*, если при совершении его в прямом, а потом в обратном направлении все тела, включая саму систему, вернутся в исходное состояние.

Необходимым и достаточным условием обратимости процесса является равновесность его промежуточных состояний.

Употребляются также термины: равновесный или квазистатический процессы. Равновесные процессы можно описать графически, неравновесный — невозможно. Реальные процессы сопровождаются теплообменом, диффузией, трением (необратимыми процессами), следовательно, большинство реальных процессов являются необратимыми.

Круговым процессом (циклом) называют термодинамический процесс, в результате совершения которого система возвращается в исходное состояние. Равновесный круговой процесс можно изобразить графически, при этом график процесса представляет собой замкнутую линию.

В *прямом круговом процессе* система за цикл совершает положительную работу (см. рис. 24).

В *обратном круговом процессе* система за цикл совершает отрицательную работу (см. рис. 25).

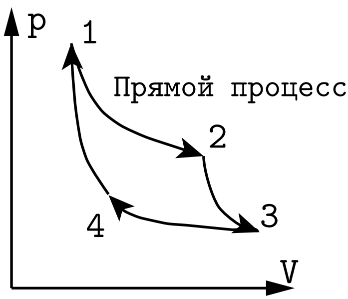

Рис. 24

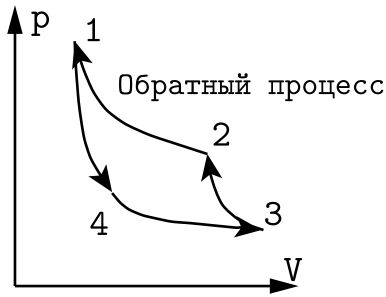

Рис. 25

Теплоёмкость

Перевод термодинамической системы (например, порции идеального газа) из состояния 1 в состояние 2 можно осуществить разными способами. На рисунке 26 показаны графики двух возможных процессов (1–а–2 и 1–в–2), позволяющих осуществить такой перевод.

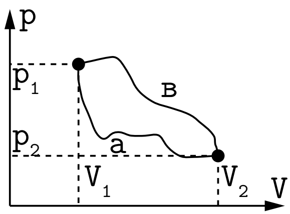

Рис. 26

Изменение внутренней энергии системы в том и в другом случае одинаково (оно определяется положениями точек 1 и 2 на pV–диаграмме), а работа, совершенная системой над окружающими телами, различна (площадь фигур под графиками процессов 1–а–2 и 1–в–2 разная, площадь под графиком процесса 1–в–2 больше).

Следовательно, и количество теплоты, затраченное на перевод системы из состояния 1 в 2 ($Q = \Delta U + A'$), будет разным.

Теплоёмкостью C термодинамической системы (тела) называют отношение бесконечно малого количества теплоты ΔQ переданного системе, к изменению ΔT её температуры, вызванным этим количеством теплоты.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Численное значение теплоёмкости тела показывает, какое количество теплоты потребуется для изменения температуры всего тела на 1 градус по шкале Цельсия (Кельвина).

При расчётах чаще пользуются удельной теплоёмкостью (теплоёмкостью 1 кг вещества).

Удельной теплоёмкостью вещества называют отношение теплоёмкости тела (системы) к массе этого тела (системы).

$$c_m = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Молярной теплоёмкостью тела (системы) называют отношение теплоёмкости тела (системы) к количеству вещества в этом теле (системе).

$$c_M = \frac{C}{\nu} = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T}.$$

Единицей измерения этой величины будет $[c_M] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Получим соотношение между удельной и молярной теплоёмкостями:

$$c_M = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T} = \frac{M\Delta Q}{m\Delta T} = c_m \cdot M.$$

Теперь найдём молярную теплоёмкость идеального газа в изобарном и в изохорном процессах. При изобарном процессе присутствуют и δU, и A', следовательно:

$$c_p = \frac{Q}{\nu\Delta T} = \frac{\Delta U + A}{\nu\Delta T}.$$

Отсюда
$$c_p = \frac{i/2R\Delta T}{\Delta T} + \frac{R\Delta T}{\Delta T} = \frac{iR}{2} + R = R\frac{i+2}{2},$$
где $c_p = R\dfrac{i+2}{2}$ — молярная теплоёмкость газа в изобарном процессе.

В изохорном процессе работа не совершается, $A' = 0$, следовательно:
$$c_V = \frac{Q}{\nu\Delta T} = \frac{\Delta U}{\nu\Delta T} = \frac{iR}{2},$$
где $c_V = \dfrac{i}{2}R$ — молярная теплоёмкость газа в изохорном процессе.

Соотношение между c_V и c_p можно записать в двух формах:

1. $c_p = c_V + R$ — Закон Майера;
2. $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V} = \dfrac{i+2}{i}$.

Для твёрдых тел теплоёмкости c_p и c_V будут почти одинаковыми. Это можно показать следующим образом. По определению $c = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$, но $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$, тогда
$$c_p = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T} = c_V + p\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

При нагревании твёрдых или жидких тел изменение объёма составляет около 10^{-6} первоначального объёма, поэтому вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, что и позволяет говорить о равенстве c_p и c_V.

Для газов $\Delta V/V$ на два порядка больше, чем для твёрдых или жидких тел, потому пренебрегать вторым слагаемым нельзя, более того, оно будет составлять заметную долю теплоёмкости c_p.

Адиабатный процесс

Адиабатным процессом называют процесс изменения термодинамического состояния, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

Какой процесс можно было бы считать адиабатным? Вопрос не столь простой. Условием адиабатности можно считать следующее условие: с одной стороны — процесс должен быть очень быстрым, чтобы за время его протекания не успел произойти теплообмен, а с другой стороны — он должен быть медленным, чтобы промежуточные состояния были обратимыми (квазистатичными).

Процесс без теплообмена не является адиабатным, если он протекает настолько быстро, что промежуточные состояния не являются квазистатическими (обратимыми)!

Если в цилиндре поршень сжимает газ, то в каждый момент времени давление и температура газа должны быть одинаковыми по всему объёму. Для осуществления этого требования требуется некоторое время, называемое временем релаксации. Иначе поршень будет «сгребать» перед собой «сугроб» из молекул.

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса будет иметь вид:

$$\Delta U + A' = 0,$$

или

$$\Delta U = -A',$$

или

$$\Delta U = A,$$

где $A = -A'$.

Если работа, совершаемая над газом внешними телами, будет положительной (отрицательной), то изменение внутренней энергии тоже будет положительным (отрицательным), следовательно, газ нагревается (остывает).

Пусть из некоторого одинакового начального состояния начинают расширяться две одинаковые порции газа. Одна порция расширяется изотермически, другая адиабатно. При увеличении объёмов газов на некоторую величину изотермический процесс приведёт к снижению давления только потому, что уменьшится концентрация молекул. При адиабатном же расширении газ уменьшает внутреннюю энергию и остывает. Давление при этом уменьшится за счёт уменьшения концентрации так же, как в и изотермическом процессе, но при этом давление ещё дополнительно уменьшится из-за уменьшения температуры. Поэтому давление в адиабатном процессе падает быстрее, чем в изотермическом процессе. Данный факт означает, что график адиабатного процесса в координатной плоскости pV будет пересекать график изотермического процесса. На качественном уровне мы уже приходим к выводу, что график адиабаты круче изотермы (см. рис. 27).

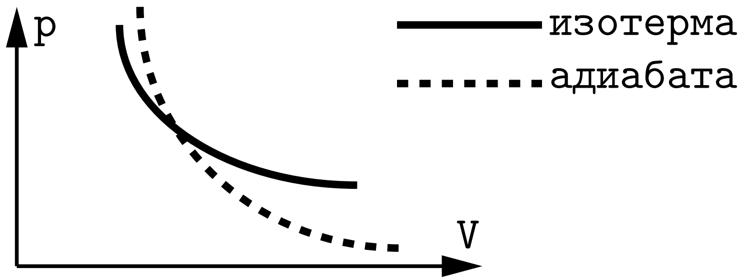

Рис. 27

Уравнение, отображающее изменения термодинамических параметров в адиабатном квазистатическом процессе, называют уравнением Пуассона. Не задаваясь целью рассмотрения вывода уравнения, запишем его в готовом виде в различных формах.

$$pV^{\gamma} = const,$$

$$TV^{\gamma-1} = const,$$

$$T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const.$$

Задачи с решениями

Задача 37. В чашке находится 500 г льда при температуре 0 °C. В нее вливают 200 г воды, нагретой до 80 °C. Какова будет установившаяся температура и что будет в чашке? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. Для определения состояния воды в чашке после установления равновесия воспользуемся методом оценок. Выясним, хватит ли тепла, запасенного в воде, чтобы растопить весь лёд. Максимальное количество теплоты вода может отдать охладившись до 0 °С: $Q_\text{в} = 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 80$ Дж $= 6{,}72 \cdot 10^4$ Дж. Количество теплоты, необходимое чтобы растопить весь лед: $Q_\text{пл} = 3{,}4 \cdot 10^8 \cdot 0{,}5$ Дж $= 1{,}7 \cdot 10^8$ Дж.

Сравнивая эти количества теплоты, видим, что даже если вода охладится до 0 °С, то растает только часть льда. Следовательно, после установления равновесия в чашке будет смесь воды и льда при температуре 0 °С.

Теперь, когда мы знаем что будет в чашке после установления равновесия, можно записать уравнение теплового баланса.

$$Q_\text{в} = \Delta m \lambda,$$

Где Δm — масса растаявшего льда. После вычислений получим $\Delta m = 0{,}2$. Следовательно, после установления равновесия в чашке находится 300 г льда и 500 г воды при температуре 0 °С.

Задача 38. Оценить с какой скоростью должна лететь муха, чтобы при ударе о стенку от нее не осталось мокрого места.

Решение. Для оценки можно считать, что муха состоит из воды, и что при ударе вся кинетическая энергия идет на ее нагрев до 100 °С и испарение.

$$\frac{mv^2}{2} = cm\Delta T + rm.$$

Для оценки можно принять начальную температуру мухи равной 20 °С. В результате, имеем

$$v = \sqrt{2(c\Delta T + r)} = \sqrt{2(4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 80 + 2{,}26 \cdot 10^6)} \approx 2300 \text{ м/с}.$$

Задача 39. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится вода и водяной пар при температуре 100 °С. Какая часть энергии, сообщенной системе, идет на совершение работы?

Решение. Давление насыщенного пара воды под поршнем при 100 °С равно атмосферному давлению $P = 10^5$ Па. Сообщим системе количество теплоты Q. При этом испарится масса воды $\Delta m = Q/r$. Вычитая уравнения Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояний пара, имеем

$$P\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT.$$

Работа пара при расширении равна $P\Delta V$. В результате имеем

$$\frac{A}{Q} = \frac{P\Delta V}{r\Delta m} = \frac{RT}{\mu r} \approx 0{,}08.$$

Задача 40. Воздух в комнате объёмом 100 м^3 прогрели от $t_1 = 10$ °C до $t_2 = 50$ °C. Давление воздуха — нормальное атмосферное. На сколько изменились масса и внутренняя энергия воздуха в комнате при повышении температуры?

Решение. Для ответа на первый вопрос воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона: $pV = \dfrac{m}{M} RT$ откуда $m = \dfrac{pVM}{RT}$. С учётом того, что процесс расширения воздуха изобарный, то

$$\Delta m = p_0 VM\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

$$\Delta m = p_0 VM\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) =$$

$$= 10^5\ \text{Па} \cdot 100\ \text{м}^3 \cdot 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \left(\frac{1}{323\ \text{К}} - \frac{1}{283\ \text{К}}\right) = -126{,}9\text{кг}.$$

Минус указывает на убыль массы воздуха в комнате.

Для изменения внутренней энергии запишем: $\Delta U = \dfrac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$

Заметим, что $p_2 = p_1 = p_0$, также $V_2 = V_1 = V$. Эти факты указывают на то, что внутренняя энергия воздуха не изменяется $\Delta U = \dfrac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 0$.

Из результата можно понять, что убыль внутренней энергии за счёт уменьшения массы, равна приросту внутренней энергии за счёт увеличения температуры.

Тогда возникает вопрос целесообразности отопления зданий, ведь внутреннюю энергию при этом мы не увеличиваем. Ответ на вопрос лежит совсем другой области: увеличение температуры воздуха помогает нашему организму терять меньше энергии (закон Фурье), и тем самым поддерживать скорость химических реакций обмена веществ в организме (метаболизм) на необходимом комфортном уровне.

Ответ: $\Delta m = -126{,}9$ кг, $\Delta U = 0$.

Задача 41. Идеальный одноатомный газ молярной массы M в количестве ν моль нагревается так, что температура растёт по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = 0$. Найти работу, совершенную газом при увеличении его объёма от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется энергия в таком процессе? Чему равна молярная теплоёмкость газа в таком процессе?

Решение. Определим сначала, как давление в этом процессе зависит от объёма при изображении процесса на pV–диаграмме. Для этого воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT = \alpha\nu RV^2.$$

Тогда получим, сокращая объём, что:

$$p = \alpha\nu RV = \beta V,$$

где $\nu R \cdot \alpha = \beta$.

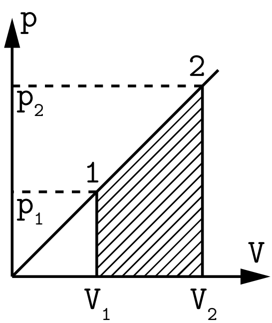

Рис. 28

Видим, что давление изменяется прямо пропорционально объёму, и графиком процесса на pV–диаграмме будет отрезок 1–2, лежащий на прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 28).
Работа численно равна площади фигуры под графиком процесса на данной диаграмме. Площадь можно найти геометрически, как площадь трапеции:

$$A' = \frac{(p_1 + p_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\beta}{2}(V_1 + V_2)(V_2 - V_1) =$$
$$= \frac{\beta}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\nu R\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$

Так как объём газа увеличивается, и давление тоже растёт, то:

- работа газа положительна $A' > 0$;
- температура, и, как следствие, внутренняя энергия увеличиваются $\Delta U > 0$.

Следовательно, в этом процессе газ получает теплоту $\Delta Q = \Delta U + A' > 0$.

Молярная теплоёмкость процесса определяется отношением:

$$c_{\text{м}} = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{\frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{(p_1+p_2)}{2} \cdot (V_2 - V_1)}{\nu\alpha(V_2^2 - V_1^2)} =$$

$$\frac{\frac{i}{2}\beta(V_2^2 - V_1^2) + \frac{\beta}{2}(V_2^2 - V_1^2)}{\nu\alpha(V_2^2 - V_1^2)},$$

$$c_{\text{м}} = \frac{i\beta/2 + \beta/2}{\nu\alpha} = \frac{\nu R\alpha(i+1)/2}{\nu\alpha} = \frac{(i+1)R}{2}.$$

Для одноатомного газа $i = 3$ получаем

$$c_{\text{м}} = 16{,}62 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}.$$

Ответ: $c_{\text{м}} = 16{,}62$ Дж/моль·К.

Задача 42. В цилиндре под поршнем находится $\nu = 0{,}5$ моль воздуха при температуре $T_0 = 300$ К. Во сколько раз увеличится объём газа при сообщении ему количества теплоты $Q = 13{,}2$ кДж?

Решение. Из текста задачи следует, что процесс нагрева газа идёт изобарно. Молярная теплоёмкость в таком процессе равна

$$c_p = (\frac{i}{2} + 1)R = \frac{7}{2}R.$$

Количество теплоты, потраченное (полученное газом) в процессе,

$$\Delta Q = c_p\nu\Delta T = \frac{c_p}{R}\nu R\Delta T = \frac{c_p}{R}p\Delta V.$$

Неизвестное давление p выразим из уравнения Менделеева–Клапейрона: $pV = \frac{m}{M}RT$ откуда $p = \frac{m}{MV}RT = \frac{\nu RT}{V}$. Подставляя это выражение в предыдущее, получим:

$$\Delta Q = \frac{c_p}{R}P\Delta V = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{\nu RT}{V}(V_1 - V) = c_p\nu T\left(\frac{V_1}{V} - 1\right),$$

откуда для искомой величины находим

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\Delta Q}{c_p\nu T} + 1 = 4.$$

Ответ: $\frac{V_1}{V} = 4$.

Задача 43. Воздушный шар, наполненный водородом (H_2), имеет объём $V = 100$ м^3. Чему равна подъёмная сила шара у поверхности Земли? Давление и температура водорода и окружающего воздуха одинаковые и составляют соответственно 760 мм.рт.ст. и 20 °C Оболочка шара тонкая и имеет массу 9 кг, молярная масса воздуха $M_{\text{возд}} =$ 29 г/моль.

Решение. Подъёмная сила шара равна разности силы Архимеда (выталкивающей силы), действующей на аэростат со стороны окружающего его воздуха, и силы тяжести, действующей на оболочку шара и водород внутри него: $F_{\text{под}} = F_{\text{арх}} - F_{\text{тяж}}$.

Для силы Архимеда имеем:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{возд}} gV, \text{ где } \rho_{\text{возд}} = \frac{PM_{\text{возд}}}{RT}.$$

Здесь P — давление воздуха, T — температура. Учитывая уравнение состояния водорода, для силы тяжести, действующей на оболочку шара и на водород, получаем:

$$F_{\text{тяж}} = (m + M_{\text{вод}})g = (m + \rho V_{\text{возд}})g = \left(m + \frac{PM_{\text{возд}}V}{RT}\right)g,$$

где m — масса оболочки, $M_{\text{вод}}$— молярная масса водорода. Теперь для подъемной силы находим:

$$F_{\text{под}} = \left(m + \frac{PV(M_{\text{возд}} - M_{\text{вод}})}{RT}m\right)g \approx 1020 \text{ Н}.$$

Ответ: 1020 Н.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 44[14]. В закрытом сосуде находится идеальный одноатомный газ, плотность которого $\rho = 1{,}8$ кг/м3. Среднеквадратичная скорость молекул газа $v_{\text{кв}} = 500$ м/с. Вычислите давление газа.

Задача 45. В цилиндре под давлением $p = 2$ атм. находится смесь газов: гелия He и водорода H_2. Изобарический нагрев смеси газов приводит к увеличению объёма цилиндра на $V = 1$ л. На сколько изменилась при этом внутренняя энергия смеси газов? Масса водорода в 1,5 раза больше массы гелия. Молярные массы гелия и водорода равны соответственно 4 г/моль и 2 г/моль.

Задача 46. Один киломоль газа при изобарическом расширении совершает работу $A = 831$ кДж. В исходном состоянии объём газа $V_1 = 3$ м^3, а температура $T_1 = 300$ К. Каковы параметры газа p_2, V_2, T_2 после расширения?

Задача 47[2]. Внутри откачанной до глубокого вакуума установки находится герметичный теплоизолированный цилиндрический сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом. Сосуд закрыт сверху теплонепроницаемым поршнем, на котором стоит гиря. Объем, занимаемый газом, равен при этом V. Гирю с поршня снимают. Найдите объем газа в новом положении равновесия. Массы поршня и гири одинаковы.

Задача 48[2]. Температура идеального газа некоторой массы m с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$. Найдите работу, совершаемую газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется теплота в таком процессе?

Закон сохранения энергии в тепловых процессах

Задачи с решениями

Задача 49. Циклический тепловой процесс состоит из изохоры, изобары, снова изохоры, и ещё одной изобары. (Считать известными вели- чины, указанные на рисунке). На каких участках процесса газ получает теплоту, а на каких отдаёт? Чему равно изменение внутренней энергии в конце цикла? Какую работу совершает газ за цикл?

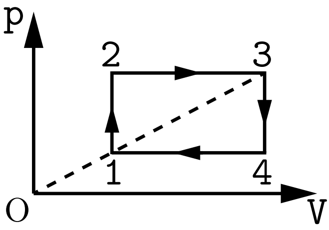

Рис. 29

Решение. Для ответа на первый вопрос задачи необходимо определить знак количества теплоты для каждого участка цикла.

Процесс 1–2 — изохорный процесс, идущий с увеличением давления. В этом процессе внутренняя энергия газа увеличивается:

$$\Delta U_{1-2} = \frac{i}{2} V_{12}(p_{23} - p_{14}) > 0$$

(здесь и далее двойной индекс означает равенство данной величины в двух состояниях (двух точках на диаграмме) $V_{12} = V_1 = V_2$ или $p_{23} = p_2 = p_3$), а работа газа равна нулю: $A_{1-2} = 0$, т. к. объём газа не изменяется. Следовательно, на изохоре 1–2 газ получает теплоту: $\Delta Q_{1-2} = (\Delta U_{1-2} + A_{1-2}) > 0$.

Процесс 2–3 изобарный, идущий с увеличением объёма. В этом процессе внутренняя энергия газа увеличивается: $\Delta U_{2-3} = \frac{i}{2} p_{23}(V_{34} - V_{12}) >$ > 0, а работа газа при увеличении объёма положительна: $A_{2-3} =$ $= p_{23}(V_{34} - V_{12}) > 0$.

Следовательно, на изобаре 2–3 газ получает теплоту:

$$\Delta Q_{2-3} = (\Delta U_{2-3} + A_{2-3}) > 0.$$

Процесс 3–4 — изохорный процесс, идущий с уменьшением давления. В этом процессе внутренняя энергия газа уменьшается: $\Delta U_{3-4} =$

$= \dfrac{i}{2}V_{34}(p_{12} - p_{23}) < 0$, а работа газа равна нулю: $A_{3-4} = 0$, т. к. объём газа не изменяется. Следовательно, на изохоре 3–4 газ отдаёт теплоту:

$$\Delta Q_{34} < 0.$$

Процесс 4–1 изобарный, идущий с уменьшением объёма. В этом процессе внутренняя энергия газа уменьшается: $\Delta U_{4-1} = \dfrac{i}{2}p_{14}(V_{12}-V_{34}) < < 0$, а работа газа при уменьшении объёма отрицательна: $A_{4-1} = = p_{14}(V_{12} - V_{34}) < 0$.

Следовательно, на изобаре 4–1 газ отдаёт теплоту:

$$\Delta Q_{4-1} = (\Delta U_{4-1} + A_{4-1}) > 0.$$

Второй вопрос требует от нас анализа итогового изменения внутренней энергии. Так как цикл замкнутый, то термодинамическая система возвращается в исходное состояние, следовательно, внутренняя энергия не изменяется (внутренняя энергия, являясь функцией состояния, определяется только температурой. Температура же после совершения замкнутого цикла примет первоначальное значение). Следовательно,

$$\Delta U_{1-2-3-4-1} = 0.$$

Работа за цикл равна сумме работ в отдельных процессах:

$$A_{1-2-3-4-1} = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = A_{1-2} + A_{4-1},$$

$$A_{1-2-3-4-1} = p_{23}(V_{34} - V_{12}) + p_{14}(V_{12} - V_{34}) = (p_{23} - p_{14})(V_{12} - V_{34}).$$

На pV–диаграмме это есть площадь фигуры, ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Задача 50. Моль гелия расширяется в изотермическом процессе 1–2, совершая работу величиной A_{12}. Затем газ охлаждается в изобарическом процессе 2–3 и, наконец, в адиабатическом процессе 3–1 возвращается в исходное состояние (см. рис. 30). Какую работу совершил газ в замкнутом цикле, если разность максимальной и минимальной температур газа в нём составила величину ΔT градусов?

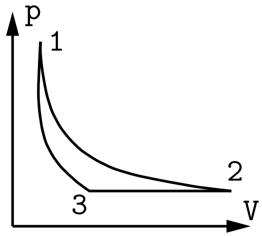

Рис. 30

Решение. Вспомним, что работа за цикл (замкнутый процесс) равна сумме количеств теплоты, потраченных (переданных газу) в каждом из процессов:

$$A_{1-2-3-1} = \Delta Q_{1-2} + \Delta Q_{2-3} + \Delta Q_{3-1}.$$

Теперь запишем первый закон термодинамики для каждого процесса в отдельности:

В первом процессе температура не изменяется, вся энергия идёт на совершение работы

$$\Delta Q_{1-2} = \Delta U_{12} + A'_{12} = 0 + A'_{12} = A'_{12}.$$

На втором процессе температура падает от T_2 до T_3, и данная величина составляет заданную в условии задачи разность температур ΔT (т. к. T_3 — минимальная температура, а $T_1 = T_2$, тогда $(T_1 - T_3) = (T_2 - T_3) = \Delta T$).

$$\Delta Q_{2-3} = \Delta U_{23} + A'_{23} = -\frac{i}{2}\nu R\Delta T - \nu R\Delta T = -\left(\frac{i}{2} + 1\right)\nu R\Delta T.$$

Для адиабатного процесса 3–1 имеем (по определению адиабатного процесса):

$$\Delta Q_{3-1} = 0.$$

Сложим полученные результаты и получим ответ:

$$A_{1-2-3-1} = \Delta Q_{1-2} + \Delta Q_{2-3} + \Delta Q_{3-1} = A'_{12} - \left(\frac{i}{2} + 1\right)\nu R\Delta T + 0.$$

Или окончательно:

$$A_{1-2-3-1} = A'_{12} - \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu R \Delta T.$$

Ответ: $A_{1-2-3-1} = A'_{12} - \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu R \Delta T.$

Задача 51. В проточном калориметре исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают электронагревателем. При этом измеряют количество газа, пропускаемое через трубопровод в единицу времени, и температуру газа перед и за нагревателем.

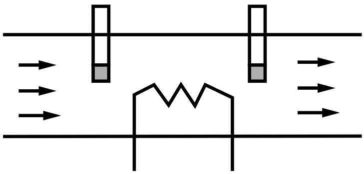

Рис. 31

При продувании воздуха в калориметре температура за нагревателем оказалась на величину $T = 5$ K выше, чем перед нагревателем. Массовый расход воздуха $m_\tau = 720$ кг/ч. Определить мощность нагревателя N. Считать, что вся теплота, выделяемая нагревателем, отдаётся газу.

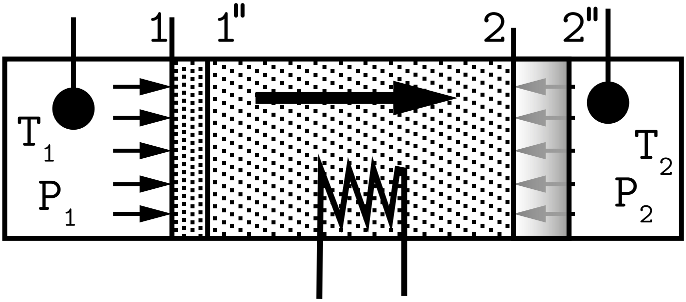

Рис. 32

Решение. Рассмотрим часть газа, находящегося в трубе в той части, где расположен нагреватель (между сечениями 1 и 2). Первый термометр (T_1) находится перед рассматриваемой областью, а второй (T_2) за ней. Запишем первый закон термодинамики для выделенной части газа:

$$\Delta Q = \Delta U + A'.$$

Теперь рассмотрим подробнее каждое слагаемое в этом уравнении. Количество теплоты, получаемое газом от нагревателя за время Δt можно записать так

$$\Delta Q = N \cdot \Delta t.$$

Изменение внутренней энергии для $\Delta\nu$ молей воздуха, прошедших через выделенную область за время Δt определяется выражением

$$\Delta U = \frac{i}{2}\Delta\nu R(T_2 - T_1).$$

Работа A' газа над окружающими телами складывается из работы газа при перемещении его левой границы (сечение 1, перемещение 1–1$''$) и работы газа при перемещении его правой границы (сечение 2, перемещение 2–2$''$):

$$A' = A'_1 + A'_2.$$

Заметим, что $A'_1 < 0$ (газ в этой области сжимается), а $A'_2 > 0$ (газ в области расширяется).

Процесс совершения работы слева идёт при постоянной температуре T_1 и постоянном внешнем давлении P_1. Совершение этой работы приводит к введению в рассматриваемую область дополнительно $\Delta\nu_1$ моль газа (показан как закрашенный участок справа от сечения 1), занимающих объём ΔV_1. Для A'_1 получаем

$$A'_1 = -P_1\Delta V_1 = -\Delta\nu_1 RT_1.$$

Процесс совершения работы справа идёт при постоянной температуре T_2 и постоянном внешнем давлении P_1. Совершение этой работы приводит к выведению из рассматриваемой области объёма газа $\Delta\nu_2$ моль газа (показан на рисунке выделенным объёмом справа от сечения 2), занимающих объём ΔV_2. Для A'_2 получаем:

$$A'_2 = P_2\Delta V_2 = \Delta\nu_2 RT_2.$$

При стационарном процессе нагрева воздуха количество вошедшего воздуха равно количеству вышедшего: $\Delta\nu = \Delta\nu_1 = \Delta\nu_2$. Тогда работа A' равна

$$A' = A'_1 + A'_2 = -\Delta\nu RT_1 + \Delta\nu RT_2 = \Delta\nu R(T_2 - T_1).$$

С учётом вышеизложенного перепишем первой закон термодинамики для рассматриваемой ситуации:

$$N \cdot \Delta t = \frac{i}{2}\Delta\nu R(T_2 - T_1) + \Delta R(T_2 - T_1) = \left(\frac{i}{2} + 1\right)\Delta R(T_2 - T_1).$$

Любопытно заметить, что процесс нагрева воздуха проходит так, что его описание совпадает с процессом изобарного нагрева.

Теперь подробнее остановимся на массовом расходе воздуха m_τ.

$$m_\tau = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta\nu M}{\Delta t},$$

тогда

$$\Delta\nu = m_\tau \frac{\Delta t}{M},$$

$$N \cdot \Delta t = \left(\frac{i}{2} + 1\right)\Delta\nu R(T_2 - T_1) = \left(\frac{i}{2} + 1\right) m_\tau \frac{\Delta t}{M} R(T_2 - T_1).$$

Откуда получаем ответ:

$$N = \left(\frac{i}{2} + 1\right)\frac{m_\tau}{M} R(T_2 - T_1) \approx 1000 \text{ Вт}.$$

Задача 52. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из адиабатического расширения 1–2, расширения в процессе 2–3, в котором теплоёмкость газа оставалась постоянной, и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма. Известно, что связь между температурами и объёмами в промежуточных состояниях 1, 2 и 3 выражается соотношениями: $T_1 = 2T_2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$.

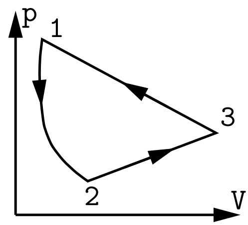

Рис. 33

Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе.

Решение. Первый закон термодинамики для процесса 1–2 можем записать так:

$$\Delta Q_{12} = 0, \text{ (адиабатическое расширение)}$$

Для процесса 2–3 первый закон термодинамики можно записать так:

$$\Delta Q_{23} = c_{23}\nu(T_3 - T_2).$$

И, наконец, для процесса 3–1 имеем:

$$\Delta Q_{31} = \Delta U_{31} + A'_{31} = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)(V_3 - V_1) = -\frac{15}{8}\nu R T_1.$$

Работа газа за весь цикл равна сумме количеств теплоты:

$$A_{1-2-3-1} = \Delta Q_{1-2} + \Delta Q_{2-3} + \Delta Q_{3-1} = C_{23}\nu(T_3 - T_2) - \frac{15}{8}\nu R T_1,$$

$$A_{1-2-3-1} = \frac{7}{15}A_{31} = -\frac{7}{8}\nu R T_1.$$

Приравняем:

$$-\frac{7}{8}\nu R T_1 = C_{23}\nu(T_3 - T_2) - \frac{15}{8}\nu R T_1.$$

Откуда, с учётом соотношений температур искомая теплоёмкость будет равна

$$c_{23} = 2R.$$

Ответ: $c_{23} = 2R$.

Задача 53[20]. Диаметр входного отверстия воздухопровода тепловой пушки (см. рис. 34) $D_1 = 20$ см, выходного $D_2 = 22$ см. При стационарной работе вентилятора и нагревателя скорость воздуха $v = 1{,}5$ м/с на входе и выходе оказалась одинаковой при разных давлениях $p_1 = 10^5$ Па и $p_2 = 1{,}05 \cdot 10^5$ Па. Найдите температуру t_2 воздуха на выходе и мощность N, потребляемую тепловой пушкой. Температура воздуха на входе в пушку равна $t_1 = 7$ °C.

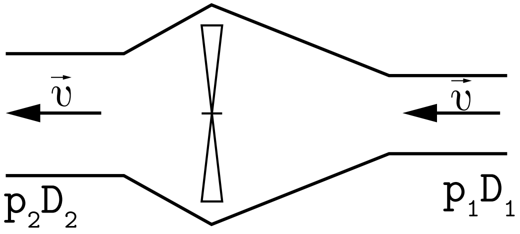

Рис. 34

Решение. При стационарном течении количество вещества ν, ежесекундно поступающего на вход, равно количеству вещества ежесекундно выходящего из пушки. За время $\tau = 1$ с в тепловую пушку входит воздух в цилиндре длиной $v \cdot \tau$ и площадью основания $\dfrac{\pi D_1^2}{4}$. Из уравнения состояния для входящего и выходящего газа имеем:

$$\nu = \frac{P_1 \pi D_1^2 v \cdot \tau}{4RT_1} = \frac{P_2 \pi D_2^2 v \cdot \tau}{4RT_2}.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \frac{P_2 \pi D_2^2}{P_1 \pi D_1^2} = 356 \text{ К}, \qquad t_2 = 83 \text{ °С}.$$

Работа тепловой пушки идет, во–первых, на увеличение внутренней энергии на $\Delta U = c_V \nu \Delta T = \dfrac{5}{2} \nu R \Delta T$ (воздух с хорошей точностью можно считать двухатомным газом, так как он содержит 78% азота и 21% кислорода, которые являются двухатомными газами), а во–вторых, на совершение работы над газом во входном и выходном отверстиях. Равнодействующая сила, приложенная к воздуху в пушке со стороны внешнего воздуха равна

$$F = P_2 \frac{\pi D_2^2}{4} - P_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = \nu R (T_2 - T_1)$$

и направлена противоположно скорости воздуха. Скорость воздуха на входе и выходе пушки одинакова, значит на воздух в среднем действует такая же сила со стороны пушки, но эта сила уже направлена вдоль скорости воздуха, значит ее работа положительна.

$$A = \left(P_2 \frac{\pi D_2^2}{4} - P_1 \frac{\pi D_1^2}{4} \right) v \cdot \tau = \nu R (T_2 - T_1).$$

Кинетическая энергия движения воздуха, как целого, после прохождения пушки не меняется. Поэтому для затрачиваемой мощности имеем:

$$N = \frac{7}{2} \nu R \Delta T = \frac{7}{2} \left(P_2 \frac{\pi D_2^2}{4} - P_1 \frac{\pi D_1^2}{4} \right) = 4{,}46 \text{ кВт}.$$

Ответ: 4,46 кВт.

Задача 54[19]. Для нагревания 100 г некоторого газа на 4 °C в процессе с прямой пропорциональностью давления объёму требуется на 831 Дж больше, чем для такого же нагревания при постоянном объёме. Что это за газ?

Решение. Изменения внутренней энергии газа в двух процессах одинаковы, следовательно заданная в условии разность теплот равна работе газа в первом процессе (работа газа во втором процессе равна нулю). Эта работа равна площади под графиком процесса в координатах (p,V) (см. рис. 35), которую проще всего найти, как разность площадей двух треугольников:

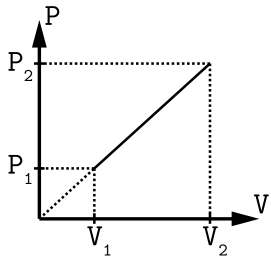

Рис. 35

$$A = \frac{1}{2}P_2V_2 - \frac{1}{2}P_1V_1 = \frac{1}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Отсюда находим молярную массу газа $\mu = \dfrac{mR\Delta T}{2A} = 2$ г. Искомый газ — водород.

Ответ: Водород.

Задача 55[21]. Идеальный одноатомный газ расширяется в политропном процессе (процесс с постоянной теплоёмкостью). При этом оказалось, что отношение совершённой газом работы к количеству подведённой к нему теплоты составило $\alpha = 2{,}5$. Вычислите молярную теплоёмкость газа в этом процессе.

Решение. Поскольку теплоёмкость в данном процессе постоянна, подведенная теплота равна $Q = C\nu\Delta T$. Тогда, пользуясь первым началом термодинамики получим

$$\alpha = \frac{A}{Q} = \frac{Q - \Delta U}{Q} = \frac{C\nu\Delta - \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T}{C\nu\Delta} = 1 - \frac{3R}{2C}.$$

В результате, искомая теплоемкость $C = \dfrac{3R}{2(1-\alpha)} = -R.$

Ответ: $-R.$

Отрицательная теплоёмкость означает, что в данном процессе к газу подводится тепло, но его температура понижается (совершенная газом работа больше подведенного тепла).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 56. Гелий из состояния с температурой $T_1 = 100$ K расширяется процессе $p^2V = \text{const}$ (p — давление, V — объём газа) с постоянной теплоёмкостью C. К газу подвели количество теплоты 2910 Дж. Конечное давление газа вдвое меньше начального. Определить конечную температуру гелия. Определить теплоёмкость C.

Задача 57. Вычислите конечную температуру и конечное давление одноатомного газа, находящегося при температуре 300 K и давлении $1{,}8 \cdot 10^5$ Па в баллоне объёмом 1,5 м^3, если газу сообщено количество теплоты $5{,}4 \cdot 10^4$ Дж.

Задача 58. Моль гелия, расширяясь в процессе 1–2, где его давление p меняется прямо пропорционально объёму V совершает работу A. Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2–3, в котором его теплоёмкость C остаётся постоянной и равной $C = R/2$ (R — постоянная). Какую работу совершит гелий в процессе 2–3, если его температура в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1?

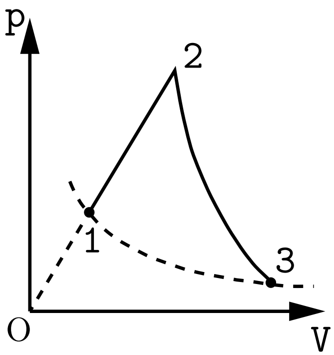

Рис. 36

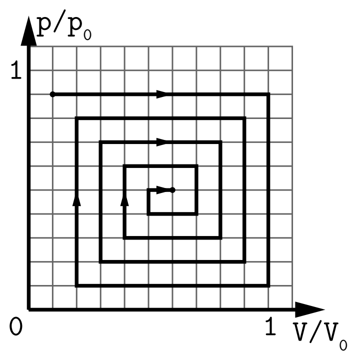

Рис. 37

Задача 59[22]. Над 1 моль метана (CH_4) совершается процесс, график которого изображен на рисунке 37. Перенесите график процесса в тетрадь и выделите на нём участки, на которых к газу подводится теплота. Какое количество теплоты было подведено к газу в этом процессе? p_0 и V_0 считать известными.

Задача 60[16]. Один моль аргона участвует в процессе, в ходе которого теплоёмкость остаётся постоянной и равной $C = 10$ Дж/К. При этом аргон увеличил свой объём, совершив работу $A = 40$ Дж. Найдите изменение температуры аргона и подведённое к нему количество теплоты.

Задача 61. На рисунках 38 и 39 представлены графики двух циклических процессов, совершаемых над идеальным газом (p и V — давление и объём газа, T — его абсолютная температура). Определите, во сколько раз работа газа в процессе ABCDA больше работы газа в процессе EHGFE, если количество газа в обоих процессах одинаковое. Известно, что $T_2 = T_1$ и $T_1 = T_3$.

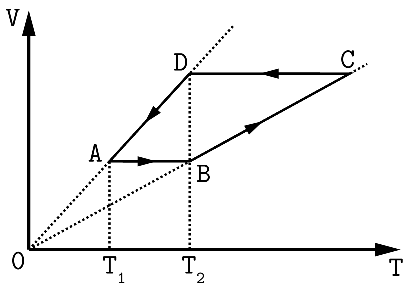

Рис. 38

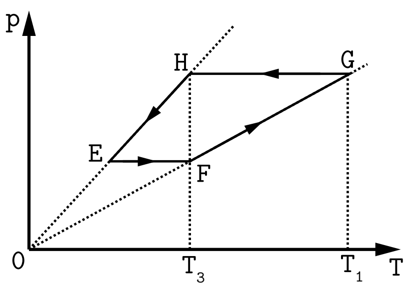

Рис. 39

Тепловые машины

Тепловые машины. Второе начало термодинамики

Тепловая машина — это устройство, которое преобразует теплоту в работу (или обратно) и действует строго периодически, то есть после завершения цикла возвращается в исходное состояние.

Каждая тепловая машина содержит три основных элемента: нагреватель (нагретое тело), рабочее тело (тело, которое получает теплоту от нагревателя и совершает работу) и холодильник (тело с температурой ниже, чем у нагревателя, необходимое, чтобы после совершения работы рабочее тело вернулось в исходное состояние).

Второе начало термодинамики гласит, что невозможна тепловая машина, единственным результатом которой было бы совершение работы за счет теплоты, взятой от одного какого–либо тела. Иными словами, тепловая машина только с нагревателем и рабочем телом не может работать без холодильника. Такие тепловые машины также называются вечными двигателями второго рода. (Вечными двигателями первого рода, называют устройства, способные бесконечное число раз производить больше работы, чем было затрачено энергии. Их существование вступило бы в противоречие с первым началом термодинамики и законом сохранения энергии.)

Коэффициент полезного действия тепловой машины(сокращенно КПД) — это отношение полезной работы, совершенной рабочим телом, к количеству теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя. КПД часто обозначается греческой буквой «эта»: η. Поскольку рабочее тело совершает циклический процесс, изменение его внутренней энергии равно нулю. Тогда первое начало термодинамики дает: $Q = Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}} = \Delta U + A = A$, где $Q_{\text{н}}$ — количество теплоты, полученное от нагревателя, а $Q_{\text{х}}$ — количество теплоты, отданное холодильнику. В результате для КПД имеем:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}}.$$

Отметим, что работу за цикл часто удобно вычислять графически — она равна площади внутри цикла в координатах (p, V)

Тепловая машина Карно

Идеальная тепловая машина построена только на обратимых процессах, и цикл такой машины состоит из чередующихся изотермических и адиабатных процессов (рис. 40).

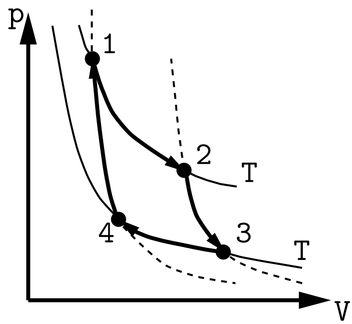

Рис. 40: Цикл Карно

Впервые такой цикл предложил использовать для тепловых машин французский ученый Сади Карно в 1824 году, потому данный цикл и основанные на нём тепловые машины называли в его честь.

С. Карно также сформулировал и доказал две теоремы, которые мы для краткости приведем без доказательства.

Теорема. «КПД любых идеальных (обратимых) тепловых машин, работающих по циклу Карно между заданными нагревателем и холодильником равны и не зависят от конкретного устройства машин и вида рабочего тела».

Теорема. «КПД любой тепловой машины, работающей между заданными нагревателем и холодильником не может превышать КПД машины Карно, работающей между этими же нагревателем и холодильником».

Приведем, также без доказательства формулу для КПД машины Карно, работающей между нагревателем и холодильником с абсолютными температурами $T_н$ и $T_х$ соответственно:

$$\eta = 1 - \frac{T_х}{T_н}.$$

Холодильные машины. Тепловой насос

Холодильная машина или тепловой насос — это устройство, которое передает теплоту от менее нагретого тела (холодильника) к более нагретому (нагревателю), потребляя работу внешних тел над рабочим телом и действует строго периодически, то есть после завершения цикла возвращается в исходное состояние.

Если основная цель тепловой машины — отнять тепло от от менее нагретого тела (холодильника), то её принято называть холодильной машиной. Эффективность холодильной машины описывается холодильным коэффициентом:

$$\eta_{\text{х}} = \frac{Q_{\text{х}}}{A} = \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}.$$

Если основная цель тепловой машины — передать тепло более нагретому телу (которое мы по–прежнему называем нагревателем), то её принято называть тепловым насосом. Эффективность теплового насоса описывается отопительным коэффициентом:

$$\eta_{\text{нагр}} = \frac{Q_{\text{н}}}{A} = \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}.$$

Нетрудно заметить, что полученные коэффициенты могут оказаться больше единицы, то есть больше 100%. Это вполне нормально.

Задачи с решениями

Задача 62. Для циклического процесса, который состоит из изохоры, изобары, снова изохоры и ещё одной изобары (см. рис. 41) найти КПД цикла.

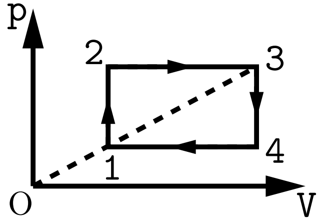

Рис. 41

Решение. Для получения коэффициента полезного действия необходимо найти количество теплоты, потраченное (оно же получено рабочим телом) на проведение цикла, и положительную работу, совершенную за цикл.

Тогда КПД находим по известной формуле:

$$\eta = \frac{A}{Q}.$$

Затраты количества теплоты происходили на первом изохорном процессе:

$$\Delta Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2} = \Delta U_{1-2} = \frac{i}{2} V_{12}(p_{23} - p_{14}) > 0$$

и на втором процессе — изобарном расширении:

$$\Delta Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + A_{2-3} = \frac{i}{2} p_{23}(V_{34} - V_{12}) + p_{23}(V_{34} - V_{12}) > 0.$$

Всего затрачено (а рабочим телом получено)

$$\Delta Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A_{1-3} = \frac{i}{2}(p_{23}V_{34} - p_{14}V_{12}) + p_{23}(V_{34} - V_{12}) =$$

$$= \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \nu R(T_3 - T_2).$$

Т. к. тепло подводится на участках $1-2$ и $2-3$ (т. е. на участке $1-2$), то

$$\eta = \frac{A_{1-2-3-4-1}}{\Delta Q_{1-3}}.$$

Работа за цикл находится уже рассмотренным ранее способом:

$$A_{1-2-3-4-1} = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = A_{2-3} + A_{4-1},$$

$$A_{1-2-3-4-1} = (p_{23} - p_{14})(V_34 - V_{12}) = \nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1).$$

При получении окончательной формулы использовано уравнение состояния идеального газа. Найдем КПД:

$$\eta = \frac{A_{1-2-3-4-1}}{\Delta Q_{1-3}} = \frac{\nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}{\frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \nu R(T_3 - T_2)}.$$

Упростив, получим

$$\eta = \frac{(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}{\frac{i}{2}(T_3 - T_1) + (T_3 - T_2)}.$$

Ответ: $\eta = \dfrac{(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}{\frac{i}{2}(T_3 - T_1) + (T_3 - T_2)}$.

Задача 63[2]. Работу карбюраторного (бензинового) двигателя внутреннего сгорания можно моделировать циклом Отто, который состоит из двух адиабат и двух изохор (см. рис. 42). Выразите теоретический КПД двигателя через степень сжатия n. (Рабочее тело — идеальный газ с известным показателем адиабаты γ)

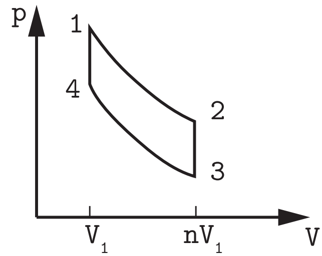

Рис. 42: Цикл Отто

Решение. По определению КПД $\eta = \dfrac{A}{Q_{\text{получ.}}}$. Рабочее тело могло получать или отдавать тепло только на изохорных участках. Получению тепла соответствует тот участок, где газ расширялся. В результате имеем

$$Q_{\text{получ.}} = \Delta U_{41} = C_V \nu R \Delta T_{41} = \frac{i}{2}(P_1V_1 - P_4V_4),$$

где i — число степеней свободы молекулы идеального газа, и мы также воспользовались уравнением Менделеева-Клапейрона.

Работа совершалась только на адиабатических участках цикла. Для ее нахождения воспользуемся первым началом термодинамики:

$$Q = A + \Delta U = 0.$$

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = -C_V \nu R \Delta T_{12} = -\frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) > 0.$$

$$A_{34} = -\Delta U_{34} = -C_V \nu R \Delta T_{34} = -\frac{i}{2}(P_4V_4 - P_3V_3) < 0.$$

Подставляя работу и количество теплоты в определение КПД, получаем:

$$\eta = \frac{P_1V_1 - P_2nV_1 + P_3nV_1 - P_4V_1}{P_1V_1 - P_4V_1} = \frac{P_1 - nP_2 + P_3 - nP_4}{P_1 - P_4}.$$

Воспользуемся уравнением Пуассона для адиабат, учитывая, что $V_2 = V_3 = nV_1$:

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_1^\gamma n^\gamma,$$
$$P_4V_1^\gamma = P_3V_1^\gamma n^\gamma.$$

Подставляя P_1 и P_4 в формулу для КПД, после несложных вычислений получаем

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{1}{n^{\gamma-1}}$.

Задача 64[18]. Рабочим телом тепловой машины является идеальный одноатомный газ. Цикл состоит из изобарного расширения 1–2, адиабатического расширения 2–3 и изотермического сжатия 3–1. Модуль работы при изотермическом сжатии равен A_{31}. Определите, чему может быть равна работа газа при адиабатическом расширении A_{23}, если у указанного цикла КПД $\eta \leqslant 40\%$?

Решение. В данном цикле теплота подводится на участке 1–2, отводится на 3–1. Тогда КПД равен $\eta = 1 - \dfrac{Q_{31}}{Q_{12}}$.

Поскольку на изотерме изменение внутренней энергии равно нулю, $Q_{31} = A_{31}$. Получим выражение для Q_{12}:

$$Q_{12} = \frac{Q_{31}}{1-\eta} = \frac{A_{31}}{1-\eta}.$$

Воспользуемся первым началом термодинамики и тем, что газ идеальный одноатомный:

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = p\Delta V_{12} + \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{5}{3}\Delta U_{12}.$$

Процесс 2–3 адиабатический (теплота не подводится, работа совершается за счёт уменьшения внутренней энергии), и изменение внутренней энергии в цикле равно нулю, поэтому: $A_{23} = -\Delta U_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{31} = \Delta U_{12} + 0 = \Delta U_{12}$.

Выражаем работу при адиабатическом расширении A_{23} через работу на изотерме A_{31} и КПД η: $A_{23} = \Delta U_{12} = \frac{3}{5}Q_{12} = \frac{3}{5(1-\eta)}A_{31}$.

КПД принимает значения $\eta \in (0, 0{,}4]$, поэтому работа при адиабатическом расширении A_{23} принимает значения: $\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \leqslant A_{31}$.

Ответ: $\frac{3}{5}A_{31} < A_{23} \leqslant A_{31}$.

Задача 65[7]. Рабочим веществом тепловой машины является гелий в количестве ν. Цикл машины изображен на диаграмме зависимости давления P от температуры T (см. рис. 43). Процесс 1–2 изобарный, процесс 2–3 идет с прямо пропорциональной зависимостью давления от температуры, процесс 3–1 изотермический.

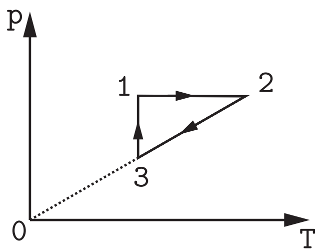

Рис. 43

Температуры в состояниях 2 и 1 отличаются в 2 раза. КПД машины равен η. Температура в состоянии 1 равна T_1. Найти работу газа за цикл. Найти количество теплоты Q ($Q > 0$), отведенной от газа за цикл.

Решение. Сначала выясним, на каких участках газ получает тепло. Участок 1–2 — изобарное расширение, значит газ получает тепло. Участок 2–3 — изохорное сжатие, значит газ отдает тепло. На участке 3–1 внутренняя энергия не меняется, следовательно $Q_{31} = A_{31} < 0$.

В результате, для КПД можем записать: $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$. Поскольку процесс 1–2 изобарный, $Q_{12} = C_p\nu(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu RT_1$. В результате, для работы газа получаем $A = \eta \cdot \frac{5}{2}\nu RT_1$.

Для определения количества теплоты Q ($Q > 0$), отведенной от газа воспользуемся первым началом термодинамики для цикла:

$$Q_{12} - Q = \Delta U + A = A,$$

$$Q = Q_{12} - A = Q_{12}(1-\eta) = (1-\eta)\frac{5}{2}\nu RT_1.$$

Ответ: $Q = (1-\eta)\frac{5}{2}\nu RT_1$.

Задача 66[3]. В океане находится лодка с куском льда массы 1 кг при 0 °C на борту. Определите максимальную работу, которую можно получить, используя процесс таяния льда. Температура воды 27 °C.

Решение. Согласно второй теореме Карно, максимальный КПД и, соответственно, максимальную работу даст машина Карно, нагревателем которой выступает вода, а холодильником — лёд.

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{х}}} = 1 - \frac{273}{300} \approx 0{,}09 = 9\%.$$

Максимальное работа соответствует максимальному количество теплоты, переданному холодильнику, то есть когда весь лед растает.

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{A}{A - Q_{\text{х}}},$$

$$A = \frac{Q_{\text{х}}\eta}{1-\eta} = 3{,}3\cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}09}{0{,}91} \approx 3{,}3\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A \approx 3{,}3\cdot 10^4$ Дж.

Задача 67[2]. КПД цикла, состоящего из участка 1–2, адиабаты 2–3 и изотермы 3–1, равен η_1, а цикла, состоящего из изотермы 1–3, изобары 3-4 и адиабаты 4-1, равен η_2 (см. рис. 44). Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 1–2–3–4–1? Все циклы обходятся по часовой стрелке, рабочее вещество — идеальный газ.

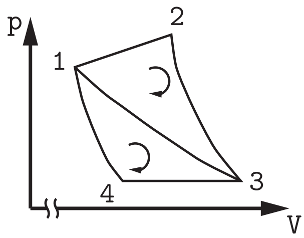

Рис. 44

Решение. Выясним сначала, на каких участках к рабочему телу подводится тепло. Из графика видно, что на участке 1–2 растет температура и объем, следовательно изменение внутренней энергии и работа положительны, а значит тепло подводится. На изотерме в направлении 3–1 тепло отдается, а в направлении 1–3 подводится. На изобаре 3–4 ситуация противоположна участку 1–2 (температура и объем уменьшаются) и, следовательно, тепло отдается. В результате, имеем

$$\eta_1 = \frac{A_{1231}}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}},$$

$$\eta_2 = \frac{A_{1341}}{Q_{13}} = \frac{Q_{13} - Q_{34}}{Q_{13}},$$

$$\eta_x = \frac{A_{12341}}{Q_{13}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}}.$$

где все количества теплоты считаются положительными, и $Q_{13} = Q_{31}$.

Таким образом, мы получили систему из трех уравнений и четырех неизвестных. Заметим, что искомое КПД η_x — безразмерная величина, а три неизвестные теплоты — размерные, поэтому для нахождения КПД η_x не обязательно знать их точные значения, а достаточны их отношения. Если мы введем новые переменные, например, $x = \dfrac{Q_{31}}{Q_{12}}$ и $y = \dfrac{Q_{34}}{Q_{31}}$, то получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, которая легко разрешается:

$$x = 1 - \eta_1, \;\; y = 1 - \eta_2,$$

$$\eta_x = 1 - x \cdot y = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \cdot \eta_2.$$

Ответ: $\eta_x = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \cdot \eta_2$.

Задача 68[2]. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ °C при температуре на улице $t_2 = -23$ °C. Предлагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0{,}4$ (40%), а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос. Какой при этом будет температура в помещении t_x?

Решение. Обозначим тепловую мощность от сжигания бензина W_0. В стационарном состоянии эта мощность равна потерям тепла через теплопроводность окон и стен, которая пропорциональна разности температур в комнате и на улице.

$$W_0 = k(t_1 - t_2),$$

где k — некоторый коэффициент, зависящей от материала и устройства стен.

Далее, запишем КПД цикла Карно

$$\eta_K = 1 - \frac{T_2}{T_x} = \frac{A}{Q_{\text{нагр}}},$$

где $A = \eta \cdot W_0$ — работа движка, а $Q_{\text{нагр}}$ — тепло, которым рабочее тело обменялось с нагревателем (в нашем случае — тепло, переданное комнате). С другой стороны, в стационарном случае это тепло $Q_{\text{нагр}}$ уходит через теплопроводность:

$$Q_{\text{нагр}} = k(t_x - t_2),$$

где k — тот же самый коэффициент, т. к. устройство комнаты не изменилось по сравнению с первым случаем.

В результате, получаем уравнение

$$1 - \frac{T_2}{T_x} = \frac{\eta \cdot k(T_1 - T_2)}{k(T_x - T_2)}.$$

Это уравнение сводится к квадратному уравнению:

$$(T_x - T_2)^2 = \eta(T_1 - T_2)T_x,$$

откуда находим $T_x = 229$ K, т. е. $t_x = 26$ °C.

Как видно, даже с использованием далеко не идеального движка, тепловой насос позволяет нагревать комнату гораздо более эффективно по сравнению с просто сжиганием топлива. Препятствием к широкому применению тепловых насосов является сложность и дороговизна их изготовления по сравнению с другими нагревательными устройствами.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 69. КПД тепловой машины, работающей по циклу (см. рис. 46), состоящему из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1, равен 0,2, а разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна T. Найти работу, совершаемую молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.

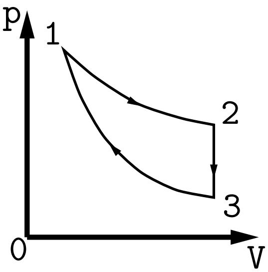

Рис. 45

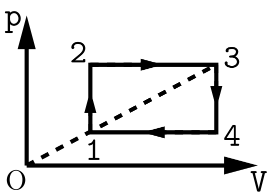

Рис. 46

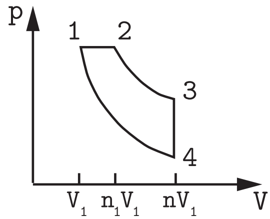

Рис. 47: Цикл Дизеля

Задача 70. Найти КПД цикла (см. рис. 46), если известно, что максимальная и минимальная температуры в цикле отличаются в 4 раза. Рабочее тело — идеальный одноатомный газ.

Задача 71. Цикл Дизеля, описывающий работу одноименного двигателя, состоит из изобары, изохоры и двух адиабат (см. рис. 47). Вычислите теоретический КПД, зная n и n_1.

Задача 72[6]. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Найдите КПД цикла, если при изобарическом сжатии над газом совершили работу A, а работа газа во всём цикле $A_ц > 0$.

Задача 73[5]. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермического расширения, изохорического охлаждения и адиабатического сжатия. Работа газа при расширении в 10 раз больше работы газа за цикл. Во сколько раз работа газа при расширении больше работы газа при сжатии? Найти КПД цикла.

Фазовые переходы

Агрегатное состояние вещества. Фаза

В повседневной жизни каждый человек сталкивается с агрегатными состояниями вещества — когда в зависимости от температуры и давления оно может пребывать в виде газа, жидкости или твердого тела. В чем же разница между ними? В газе силы притяжения между частицами не могут удержать их друг возле друга, и они разлетаются во все стороны, занимая весь доступный объем сосуда. В твердых телах, напротив, силы взаимного притяжения очень велики, вследствие чего твердое тело сохраняет свою форму достаточно продолжительное время. В кристаллах наблюдается дальний порядок, когда упорядоченное расположение частиц повторяется в пределах тысяч ячеек (кристаллическая решетка). Наконец, в жидкостях потенциальная энергия взаимодействия сравнима с кинетической энергией движения молекул, что приводит к ближнему порядку — упорядоченному относительному расположению соседних частиц жидкости. Однако эти связи существуют очень короткое время (порядка наносекунд), вследствие чего жидкости сохраняют свой объем, но не имеют своей формы.

Также к агрегатным состояниям относят плазму (когда молекулы газа теряют электроны и становятся ионами) и конденсат Бозе-Эйнштейна (состояние, при котором газ начинает вести себя как единый квантовый объект и все частицы–бозоны становятся неразличимыми).

Фаза — физически однородная область вещества, отделенная от других областей границей раздела. *Фазовая диаграмма* (например, в координатах температура–давление) показывает фазовое состояние для каждой точки. Агрегатное состояние и фаза не являются синонимами. Например, для элементарной серы возможно существование четырёх фаз: твёрдой ромбической, твёрдой моноклинной, жидкой и газообразной, а на фазовой диаграмме серы имеются два поля твёрдых фаз: область ромбической серы и область существования моноклинной серы (треугольник ABC, рисунок 48).

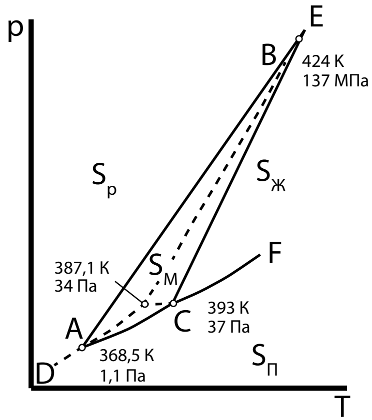

Рис. 48

При изменении внешних условий (например, температуры или давления) возможен фазовый переход (смена фазового состояния вещества):

- Испарение: жидкость → газ;
- Конденсация: газ → жидкость;
- Плавление: твердое тело → жидкость;
- Кристаллизация: жидкость → твердое тело;
- Сублимация (возгонка): твердое тело → газ;
- Десублимация: газ → твердое тело.

Различают фазовые переходы I рода (скачкообразное изменение удельного объема, плотности, внутренней энергии) и II рода (скачкообразное изменение теплоёмкости, коэффициента теплового расширения, симметрии кристаллической решётки и т. д.). Фазовые переходы I рода, к которым относятся изменения агрегатного состояния веществ, всегда сопровождаются выделением или поглощением энергии (теплота фазового перехода). Удельная (или молярная) теплота фазового перехода зависит от температуры. В справочниках, как правило, приводится значение для 0 °C или 25° C.

Важным примером является фазовое равновесие между различными агрегатными состояниями воды (H_2O) — льдом, водой и паром (см. на рисунке 49 фазовую диаграмму воды). Поскольку вода является одним из самых распространенных веществ на Земле, в разные периоды времени на основе её свойств вводились различные эталонные величины, такие как градус Цельсия, градус Кельвина, калория.

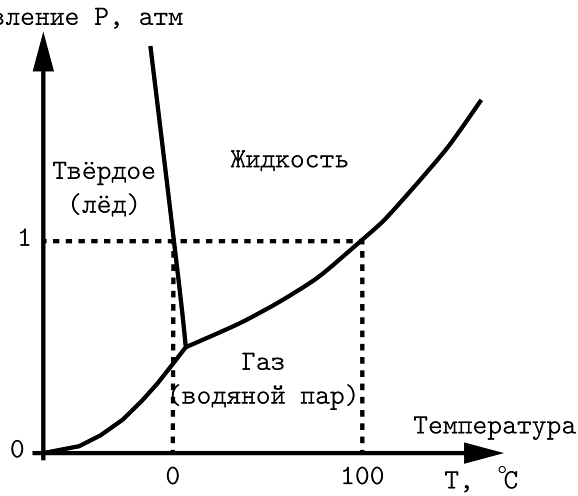

Рис. 49: Фазовая диаграмма воды

Обращаем внимание, что любая точка на фазовой диаграмме находится в *термодинамическом равновесии* — состоянии системы, при котором остаются неизменными во времени макроскопические величины этой системы (температура, давление, объём) в условиях изолированности от окружающей среды. В неравновесном состоянии состояние системы может быть произвольным — например, если положить закрытую бутылку с дистиллированной водой в морозильник, то спустя 15–20 минут вода охладится до температуры меньше 0 °С, однако может остаться в метастабильном жидком состоянии. Если теперь сильно ударить чем–нибудь по пробке, по воде пройдет волна кристаллизации. Данный эффект используют при создании многоразовых солевых грелок на основе выделении тепла при изменении фазового состояния некоторых материалов (например, кристаллизации ацетата натрия).

При решении задач используется уравнение теплового (энергетического) баланса: при замерзании воды, конденсации пара и понижении температуры системы тепло выделяется ($Q > 0$), а при плавлении льда, испарении воды и повышении температуры системы тепло поглощается ($Q < 0$). Обращаем внимание, что изменение агрегатного состояния системы происходит при постоянной температуре (например, даже при работе нагревателя температура смеси воды и льда будет 0 °C, пока весь лёд не растает).

Также необходимо обратить внимание на то, что плотность льда, образующегося в природных условиях (так называемая модификация I_h), имеет плотность меньше плотности воды ($\rho_{\text{л}} = 916{,}7$ кг/м^3 при 0°C). С этим связано явление увеличения объема воды при её замерзании (примерно на 9%), что может, например, привезти к разрыву труб при аварии на теплотрассе.

Поскольку лёд более лёгкий, то первоначальное образование льда происходит на поверхности воды, что препятствует дальнейшему её замерзанию из–за образования теплоизолирующего слоя льда. Максимум плотности жидкой воды достигается при $t = 4$ °C, это предотвращает опускание на дно приповерхностных слоев воды, остывших до температуры ниже 4 °C. Конвективное перемешивание жидкости блокируется, что сильно замедляет дальнейшее её охлаждение.

Двухфазная система «вода–пар». Влажность. уравнение теплового баланса

Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью, называется *насыщенным.* Кипением называется процесс интенсивного парообразования не только со свободной поверхности, но и по всему объёму жидкости внутрь образующихся пузырьков пара. *Температурой (точкой) кипения называется* температура жидкости, при которой давление её насыщенного пара равно или превышает внешнее давление:

$$p_{\text{н}} \geqslant p_0 + \rho g H + \frac{2\sigma}{R},$$

где p_0 — внешнее давление, $\rho g H$ — гидростатическое давление вышележащих слоев жидкости, $2\sigma/R$ — давление, связанное с кривизной поверхности пузырька (лапласово давление), H — расстояние от центра пузырька до поверхности воды, ρ и σ — плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Давление насыщенных паров различных жидкостей зависит от температуры (но не от объёма сосуда!) и является табличной величиной.

t, ° C	P		t, ° C	P	
	кПа	мм рт.ст.		кПа	мм рт.ст.
0	0,61129	4,585	48	11,171	83,79
1	0,65716	4,929	49	11,745	88,09
2	0,70605	5,296	50	12,344	92,59
3	0,75813	5,686	51	12,970	97,28
4	0,81359	6,102	52	13,623	102,2
5	0,87260	6,545	53	14,303	107,3
6	0,93537	7,016	54	15,012	112,6
7	1,0021	7,516	55	15,752	118,1
8	1,0730	8,048	56	16,522	123,9
9	1,1482	8,612	57	17,324	129,9
10	1,2281	9,212	58	18,159	136,2
11	1,3129	9,848	59	19,028	142,7
12	1,4027	10,52	60	19,932	149,5
13	1,4979	11,24	61	20,873	156,6
14	1,5988	11,99	62	21,851	163,9
15	1,7056	12,79	63	22,868	171,5
16	1,8185	13,64	64	23,925	179,5
17	1,9380	14,54	65	25,022	187,7
18	2,0644	15,48	66	26,163	196,2
19	2,1978	16,48	67	27,347	205,1
20	2,3388	17,54	68	28,576	214,3
21	2,4877	18,66	69	29,852	223,9
22	2,6447	19,84	70	31,176	233,8
23	2,8104	21,08	71	32,549	244,1
24	2,9850	22,39	72	33,972	254,8
25	3,1690	23,77	73	35,448	265,9
26	3,3629	25,22	74	36,978	277,4
27	3,5670	26,75	75	38,563	289,2

t, ° C	P		t, ° C	P	
	кПа	мм рт.ст.		кПа	мм рт.ст.
28	3,7818	28,37	76	40,205	301,6
29	4,0078	30,06	77	41,905	314,3
30	4,2455	31,84	78	43,665	327,5
31	4,4953	33,72	79	45,487	341,2
32	4,7578	35,69	80	47,373	355,3
33	5,0335	37,75	81	49,324	370,0
34	5,3229	39,93	82	51,342	385,1
35	5,6267	42,20	83	53,428	400,7
36	5,9453	44,59	84	55,585	416,9
37	6,2795	47,10	85	57,815	433,6
38	6,6298	49,73	86	60,119	450,9
39	6,9969	52,48	87	62,499	468,8
40	7,3814	55,37	88	64,958	487,2
41	7,7840	58,38	89	67,496	506,3
42	8,2054	61,55	90	70,117	525,9
43	8,6463	64,85	91	72,823	546,2
44	9,1075	68,31	93	78,494	588,8
45	9,5898	71,93	94	81,465	611,0
46	10,094	75,71	95	84,529	634,0
47	10,620	79,66	96	87,688	657,7
48	11,171	83,79	97	90,945	682,1
49	11,745	88,09	98	94,301	707,3
50	12,344	92,59	99	97,759	733,3
51	12,970	97,28	100	101,32	760,0

Таблица 2: Зависимость давления насыщенного пара воды от температуры

Заметим, что теплота испарения жидкости с ростом температуры уменьшается, пока не достигает критической точки (для воды —

$t = 374$ °C, $p = 218$ атм), в которой теплота испарения равна нулю, а граница раздела между жидкостью и газом исчезает. При сверхкритических температурах и при давлении порядка критического возможно только газообразное состояние вещества.

Влажность

Пар называется *ненасыщенным*, если его давление меньше давления насыщенного пара при данной температуре (при этом жидкая фаза отсутствует, иначе система не может находиться в состоянии термодинамического равновесия).

Абсолютной влажностью воздуха называется масса водяных паров, содержащихся в 1 м^3 воздуха при данных условиях. Поскольку из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что при фиксированной температуре плотность паров пропорциональна давлению ($p = \rho RT/\mu$), можно ввести безразмерную величину относительной влажности φ как отношение давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к давлению насыщенного водяного пара при данной температуре:

$$\varphi = \frac{P}{P_{\text{н}}}.$$

Если в неравновесной системе при некотором внешнем воздействии (например, при сжатии объема или понижении температуры) давление паров воды становится больше, чем давление насыщенного пара, то начинается конденсация. Температура, при которой водяные пары, ранее не насыщавшие воздух, становятся насыщающими, называется *точкой росы*.

Поверхностное натяжение

Молекулы жидкости, находящиеся на границе раздела фаз в равновесии с паром, отличаются от молекул внутри объёма жидкости меньшим количеством соседних молекул, невозможностью образовать все возможные связи, и, как следствие имеют повышенную потенциальную энергию. Этот избыток энергии, приходящийся на единицу площади поверхности, называется *коэффициентом поверхностного натяжения.* По сути, поверхностное натяжение σ — это удельная работа увеличения поверхности при её растяжении при условии постоянства температуры (например, в невесомости вода принимает форму шара — фигуры с минимальной площадью поверхности).

Есть также силовое (механическое) определение: поверхностное натяжение — это сила, действующая на единицу длины линии, которая ограничивает поверхность жидкости. Если поверхность жидкости ограничена периметром смачивания, то коэффициент поверхностного натяжения определяется силой F, действующей на единичную длину l периметра смачивания и направленной перпендикулярно этому периметру:

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

Это приводит к явлению удержания некоторых объектов на поверхности воды, например, водомерок, скрепок, легких монет и т. д. (см. рис 50). На границе соприкосновения твёрдых тел с жидкостями наблюдаются явления смачивания, состоящие в искривлении свободной поверхности жидкости около твердой стенки сосуда.

Рис. 50

Искривленная поверхность называется *мениском.* В точках периметра смачивания явление характеризуется *краевым углом* θ между поверхностью твёрдого тела и мениском.

Если жидкость смачивает твердую поверхность, то краевой угол острый, если не смачивает — тупой.

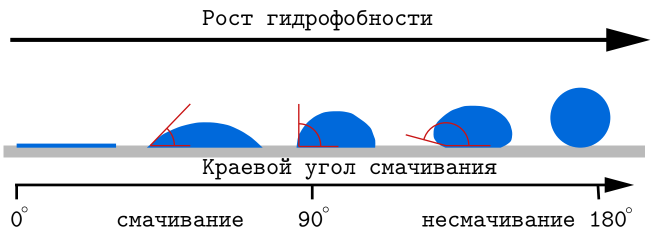

Рис. 51

Искривление поверхности создает избыточное давление на жидкость по сравнению с давлением над плоской поверхностью (закон Лапласа):

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхности в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В частности, для сферической капли жидкости $\Delta P = 2\sigma/R$, для мыльного пузыря с 2 границами воздух — мыльный раствор $\Delta P = 4\sigma/R$.

Узкие цилиндрические трубки с диаметром менее 1 мм называются *капиллярами*. Наличие избыточного давление приводит к повышению (в случае полного смачивания, $\theta = 0$) или понижению (в случае полного несмачивания, $\theta = \pi$) уровня жидкости в капилляре на высоту

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2\sigma}{\rho h R}.$$

Такое изменение высоты жидкости называется капиллярными явлениями, которые играют важную роль в жизнедеятельности живых организмов.

Задачи с решениями

Тепловой баланс

Задача 74. При беге трусцой (11 км/ч) расход энергии у человека составляет 485 ккал/ч, а при сидячей работе (решении задач по физике) — всего 75 ккал/ч. Предполагая, что при беге вся избыточная энергия выводится через потоотделение, оценить потери жидкости в организме бегуна за 1 час. Молярная теплота испарения воды — 44 кДж/моль.

Решение. По сравнению с расходом энергии при сидячей работе при беге дополнительно расходуется 410 ккал/ч, или 1722 кДж/ч. Молярная масса воды — 18 г/моль, поэтому для испарения 1 кг воды потребуется энергия 2444 Дж/г = 2444 кДж/кг. Следовательно, за час бега испарится 0,7 кг воды.

Ответ: 0,7 кг

Задача 75[3]. В кастрюлю налили холодной воды (температура 10 °C) и поставили на плиту. Через 10 минут вода закипела. Через какое время после этого момента она полностью испарится? Удельная теплоёмкость воды 4,2 Дж/г, теплота испарения при температуре кипения — 2258 Дж/г.

Решение. Пусть P — мощность плиты, m — масса воды, $T_0 = 10$ °C — начальная температура, $T_k = 100$ °C — температура кипения воды, Δt_1 — время нагрева.

Запишем уравнение теплового баланса для процесса нагрева воды

$$cm(T_k - T_0) = P\Delta t_1,$$

$$\frac{m}{P} = \frac{\Delta t_1}{c(T_k - T_0)}.$$

Предполагая, что далее мощность плиты осталась той же, запишем уравнение теплового баланса для процесса испарения воды: $Lm = P\Delta t_2$, где Δt_2 — время испарения воды. Отсюда:

$$\Delta t_2 = L\frac{m}{P} = L\frac{\Delta t_1}{c(T_k - T_0)} = 60 \text{ мин.}$$

Ответ: 60 мин.

Задача 76. Два железных астероида одинаковой массы $m = 10$ тонн летят навстречу друг другу. Происходит неупругое столкновение. Если предположить, что вся выделившаяся тепловая энергия идет на нагрев и испарение вещества астероидов, при какой минимальной скорости все вещество астероидов перейдет в газовую фазу? Удельная теплота испарения железа $q = 6120$ кДж/кг, температура кипения — $T = 3200$ °C, удельная теплоемкость $c = 449$ Дж/кг·°C. В открытом космосе температура $T_0 = -270$ °C.

Решение. Абсолютно неупругий удар — это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое. При этом выполняется закон сохранения импульса, а некоторая часть кинетической энергии выделяется в виде тепла.

Для определения скорости тел после столкновения u запишем закон сохранения импульса:

$$mv + (-mv) = 2mu.$$

Отсюда получаем $u = 0$ м/с, т. е. в данном случае вся кинетическая энергия движения, согласно закону сохранения энергии (полной энергии, а не энергии движения), переходит в тепло:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + Q,$$

$$Q = 2\frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

По условию задачи, выделившееся тепло идет на нагрев вещества до температуры кипения и его испарение (и далее на нагрев пара). Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q = mv^2 \geqslant c \cdot 2m(T - T_0) + q \cdot 2m.$$

Отсюда находим минимальную скорость, необходимую для превращения железа в пар:

$$v = \sqrt{2(c(T - T_0) + q)} \approx 3{,}9 \text{ км/с}.$$

Обращаем внимание на то, что искомая скорость не зависит от исходной массы астероидов.

Ответ: 3,9 км/с.

Влажность

Задача 77. В баллон объемом $V = 10$ л, из которого откачан воздух, помещают $m = 10$ г воды, после чего баллон герметично закрывают и помещают в термостат, в котором может поддерживаться любая заданная температура. Какая доля воды в баллоне перейдет в пар при температуре $T_1 = 100$ °C? Чему будет равна относительная влажность газа в баллоне при температуре $T_2 = 150$ °C, если давление насыщенного пара воды при этой температуре равно $p_{\text{н}2} = 5{,}1$ атм? Молярная масса воды — $\mu = 18$ г/моль.

Решение. Найдем массу насыщенного пара при температуре $T_1 = 100$ °C, предполагая, что система находится далеко от критической точки и объемом жидкой воды можно пренебречь. Считая пар идеальным газом, запишем для него уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1,$$

$$m_1 = \frac{\mu p_{\text{н}2} V}{R T_1}.$$

Подставляя значения величин молярной массы $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ г/моль, температуры $T_1 = 100$ °C $= 373$ K, универсальной газовой постоянной $R = 8{,}31$ Дж/моль·K, объема $V = 10^{-2}$ м^3 и давления насыщенных паров воды при этой температуре $p_{\text{н}1} = 1$ атм $= 105$ Па, получаем $m_1 = 5{,}8$ г. Следовательно, при этой температуре испарится 58% от исходного количества воды.

Возникает вопрос: а почему не вся вода (не 100%)? Напомним, что температурой (точкой) кипения называется температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно или превышает внешнее давление. Поскольку баллон герметично закрыт, то при увеличении температуры внешнее давление также увеличивается в изохорном процессе. Точкой кипения в замкнутом объеме будет температура, при которой пересекутся кривая зависимости давления насыщенного пара от температуры и кривая зависимости давления ненасыщенных паров воды от температуры в изохорическом процессе.

Аналогично предыдущему пункту, найдем массу насыщенного пара при температуре $T_2 = 150$ °C $= 423$ K. При этой температуре давление насыщенных паров равно $p_{\text{н}2} = 5{,}1$ атм $= 5{,}1 \cdot 10^5$ Па.

$$m_2 = \frac{\mu p_{\text{н}2} V}{R T_2} = 26{,}1 \text{ г}.$$

Эта величина больше исходной массы воды в баллоне, следовательно, вся вода испарится при более низкой температуре, а при температуре T_2 пар является ненасыщенным. Найдем его давление для данной массы и температуры из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P_2 = \frac{m R T_2}{\mu V} \approx 1{,}9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Отсюда находим относительную влажность:

$$\varphi = \frac{P_2}{P_{н2}} \approx 38\%.$$

Ответ: при 100 °C испарится 58% воды, при 150 °C относительная влажность равна 38%.

Задача 78. Маленький мальчик при помощи собственного дыхания легко надувает воздушный шарик сферической формы до радиуса 25 см. Воздух из легких имеет температуру 36 °C и относительную влажность 100%. Какая масса воды сконденсируется на внутренней поверхности шара, если его оставить на улице при температуре 17 °C? Какую относительную влажность будет иметь воздух внутри шарика, если его принести в русскую баню (50 °C)?

Решение. Т. к. шарик может надуть даже маленький мальчик, то можно пренебречь давлением со стороны стенок шарика, которые обусловлены силами упругости.

Рассмотрим систему при температуре $T_1 = 36$ °C $= 309$ K. Согласно таблице 2, давление насыщенных паров воды внутри шара $p_{1н} \approx 6$ кПа. Объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \approx 6{,}53 \cdot 10^{-2}$ м^3.

Т. к. пар не проходит через поверхность шара, то при изменении температуры общая масса воды во всех агрегатных состояниях сохраняется. Определим массу воды из уравнения Менделеева–Клапейрона для идеального газа (предполагается, что система находится далеко от критической точки):

$$PV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Отсюда

$$m_1 = \frac{\mu p_{1н} V_1}{RT_1} \approx 2{,}75 \text{ г}.$$

Рассмотрим шарик на улице при температуре $T_2 = 17$ °C $= 290$ K. Если принять, что атмосферное давление осталось тем же, то изменение давление будет обусловлено остыванием воздуха в шаре и уменьшением его размера.

Для изобарического процесса запишем закон Гей–Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

отсюда

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 6{,}12 \cdot 10^{-2} \text{м}^3.$$

Согласно таблице 2, давление насыщенных паров при температуре T_2 равно $p_{2\text{н}} \approx 2$ кПа. Отсюда, по аналогии с предыдущим пунктом, можем найти массу паров воды внутри шара:

$$m_2 = \frac{\mu p_{2\text{н}} V_2}{RT_2} \approx 0{,}91 \text{ г}.$$

Поскольку вся вода остается внутри шара, то на поверхности шара сконденсировалось 1,84 г воды.

Рассмотрим шарик бане при температуре $T_2 = 50$ °C $= 323$ К. Если принять, что атмосферное давление осталось тем же, то изменение давления будет обусловлено нагреванием воздуха в шаре и увеличением его размера.

Из закона Гей–Люссака:

$$V_3 = V_1 \frac{T_3}{T_1}.$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для идеального газа:

$$p_3 = \frac{m_1}{\mu} \frac{RT_3}{V_3} = p_{1\text{н}} \approx 6 \text{ кПа},$$

т. е. следует интересный вывод о неизменности давления ненасыщенного пара воды при повышении температуры и постоянном внешнем давлении. В то же время давление насыщенных паров растет, и согласно таблице 2 при температуре T_3 составляет $p_{3\text{н}} \approx 12{,}4$ кПа.

Отсюда находим относительную влажность:

$$\varphi = \frac{p_3}{p_{3\text{н}}} = \frac{p_{1\text{н}}}{p_{3\text{н}}} \approx 48{,}4\%.$$

Ответ: 1,84 г, 48,4%.

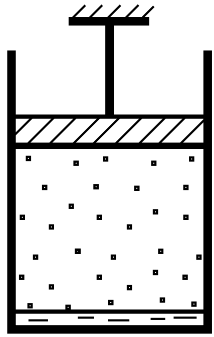

Рис. 52

Задача 79[10]. В вертикальном теплопроводящем цилиндре массы m, закрытом подвижным поршнем, находится водяной пар и небольшое количество воды (см. рис. 52). Поршень площади S привязан нитью к штативу. Температура окружающей среды 100 °C, атмосферное давление p_0. Вначале цилиндр удерживают, а затем отпускают. Какая влажность установится в цилиндре после того, как система придет в тепловое равновесие? На сколько процентов изменится объем под поршнем, если внешнюю температуру уменьшить на 10%?

Решение. Тепловое и механическое равновесие наступит после того, как вся вода испарится и пар станет ненасыщенным (по условию, в цилиндре находится небольшое количество воды).

При механическом равновесии сумма всех сил, действующих на цилиндр, равна 0 (первый закон Ньютона). Что же это за силы? Это сила, связанная с атмосферным давлением p_0, направленная вверх; сила, связанная с давлением паров внутри цилиндра p, направленная вниз; сила тяжести mg, направленная вниз. Цилиндр будет опускаться вниз до тех пор, пока сила, обусловленная разностью атмосферного и внутреннего давлений, не скомпенсирует силу тяжести.

Отсюда

$$pS + mg = p_0 S,$$

$$p = p_0 - \frac{mg}{S}.$$

Т. к. температура окружающей среды 100 °C = 373 K, а цилиндр теплопроводящий, из таблицы находим, что давление насыщенных паров равно атмосферному давлению $p_0 = 1$ атм. Отсюда находим относительную влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{p}{p_0} = 1 - \frac{mg}{Sp_0}.$$

Как следует из решения предыдущей задачи, при постоянном внешнем давлении и уменьшении температуры окружающей среды на 10%

(на 37,3 К) давление ненасыщенного пара внутри цилиндра меняться не будет, а объем по закону Гей–Люссака уменьшится на 10%, т. е. цилиндр будет подниматься вверх.

Ответ: $\varphi = 1 - \frac{mg}{Sp_0}$, объем уменьшится на 10%.

Задача 80. Мыльная вода вытекает из капилляра по каплям. В момент отрыва капли диаметр ее шейки равен $d = 1{,}00$ мм. Масса капли — $m = 0{,}0129$ г. Определить коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды.

Решение. Капля оторвется от капилляра при условии $P > F$, где $P = mg$ — сила тяжести, F — сила поверхностного натяжения.

Условие равновесия: $P =$ F, отсюда $mg = \sigma l = \sigma\pi d$, где l — периметр шейки капли.

Отсюда $\sigma = \frac{mg}{\pi d} = 4{,}03 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Ответ: $\sigma = 4{,}03 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Задача 81. Оценить молярную и удельную теплоты испарения неполярной жидкости исходя из данных о коэффициенте поверхностного натяжения σ, плотности ρ и молярной массы μ.

Решение. Данная задача показывает взаимосвязь величин теплоты парообразования и коэффициента поверхностного натяжения.

Рассмотрим 1 моль жидкости в виде куба, в котором все молекулы выстроены по плоскостям (некий аналог кристаллической решетки). Если a — длина ребра этого куба, то объем куба равен

$$V = \frac{\mu}{\rho} = a^3,$$

отсюда $a = \sqrt[3]{\dfrac{\mu}{\rho}}$, а площадь грани $S = a^2 = \left(\dfrac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$. Моль вещества содержит $N_a \approx 6 \cdot 10^{23}$ молекул, тогда вдоль одного ребра находится $n = (N_a)^{1/3}$ молекул. Заметим, что $n >> 1$.

Если проведем плоскость между 2 произвольными частями куба параллельно некоторым граням, и разнесем эти части на бесконечность, то затратим энергию $2\sigma S$, необходимую для совершения работы по увеличению площади поверхности соприкосновения жидкости с воздухом. Если проведем $n - 1 \approx n$ плоскостей параллельно каждой из 3 пар граней, и разнесем полученные маленькие кубики с молекулами внутри на бесконечно большое расстояние, то мы переведём жидкость в пар.

Энергия, которую необходимо при этом затратить, равна молярной теплоте испарения:

$$q_{\text{мол}} = 3n \cdot 2\sigma S = 6\sigma (N_a)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{2/3}.$$

Аналогично можно найти удельную теплоту испарения:

$$q_{\text{уд}} = \frac{q_{\text{мол}}}{\mu} = \frac{\sigma}{\rho^{2/3}} \left(\frac{N_a}{\mu}\right)^{1/3}.$$

Полученные формулы позволяют с достаточно хорошей точностью вычислять молярную теплоту парообразования. Обращаем внимание на предположение модели, что даже единичный слой молекул жидкости способен хорошо воспроизвести коэффициент поверхностного натяжения. Для этого необходимо, чтобы вещество состояло из крупных неполярных молекул (без способности образовывать ионные связи или взаимодействовать заряженными группами). Для небольших полярных молекул приходится учитывать влияние нескольких слоев, и модель значительно усложняется.

Тепловой баланс

Задача 82. Для охлаждения коктейля из морозилки достали несколько кубиков льда (общая масса $m = 30$ г, температура $t_L = -18$ °C) и положили в $M = 270$ г напитка. Определите конечную температуру напитка, если исходно он имел комнатную температуру ($t_K = 25$ °C). Удельная теплоемкость льда $C_L = 2050$ Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость воды в коктейле $C_B = 4200$ Дж/(кг·°C), теплота плавления льда = 330 кДж/кг.

Решение. Пусть t_x — конечная температура напитка. Учитывая, что тепло от охлаждения коктейля тратится последовательно на нагрев льда от температуры t_L до 0 °C, плавление льда и нагрев воды от 0 °C до температуры t_x, запишем уравнение теплового баланса:

$$C_L m(0 - t_L) + \lambda m + C_B m(t_x - 0) = C_B M(t_K - t_x).$$

Отсюда получим

$$t_x = \frac{C_B M t_K + C_L m t_L - \lambda m}{C_B(m + M)} = 14\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 14 °C.

Задача 83[15]. В калориметр поместили 100 г льда и налили 25 г воды. После установления теплового равновесия оказалось, что масса льда не изменилась. Какие значения начальной температуры могли быть у льда в таком эксперименте? Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°C). Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Решение. Так как после теплообмена лед находится в равновесии с жидкостью, то температура получившейся смеси 0 °C. Масса льда не изменилась, что указывает на отсутствие процессов плавления и кристаллизации. По условию вода изначально была в жидком состоянии, следовательно, остыть она могла не более чем на 100 °C.

Составим уравнение теплового баланса:

$$m_L c_L \Delta t_L = m_B c_B \Delta t_B.$$

Откуда, с учетом масс и теплоёмкостей, максимальное изменение температуры льда 50 °C. Окончательно, лёд мог иметь температуру от 0 до -50 °C.

Ответ: от 0 до -50 °C.

Задача 84[11]. В сосуде, из которого непрерывно откачивают находящийся в нём газ, находится некоторое количество воды при температуре 0 °C. За счёт интенсивного испарения вода постепенно превращается в лёд. Какая доля β первоначальной массы воды может быть превращена в лёд таким способом? Тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплота парообразования воды L и удельная теплота кристаллизации воды связаны соотношением $L/\lambda = 6{,}7$.

Решение. Пар образуется за счет тепла, выделяющегося при замерзании воды. Пусть m_1 — масса замерзшей воды, тогда выделилось теплота

$$q = \lambda m_1.$$

Этой энергии хватит на образование пара массой

$$m_2 = q/L = \lambda m_1/L,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{L}{\lambda} = \alpha.$$

Так как вся вода превратилась либо в лёд, либо в пар, то первоначальная масса воды равна

$$m = m_1 + m_2.$$

Отсюда получаем выражение для доли воды, перешедшей в лёд:

$$\beta = \frac{m_1}{m} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} = 0{,}87.$$

Ответ: $\beta = 0{,}87$.

Задача 85. Оцените снижение температуры плавления льда под весом конькобежца массой $m = 60$ кг, если суммарная площадь лезвий коньков составляет $S = 6$ см^2, а температура плавления льда снижается на 1 °С при повышении давления на $p_0 = 133$ атм (1 атм $= 10^5$ Па). Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Конькобежец оказывает на лед давление $p = mg/S = 60$ кг $\cdot$ $\cdot\, 10$ м/с$^2/(6 \cdot 10^{-4}$ м$^2) \approx 10^6$ Па $= 10$ атм. Если давление 133 атм приводит к снижению температуры плавления на 1 °С, то давление p — пропорционально меньше, т. е. примерно 0,1 °С. Очевидно, что эта величина существенно меньше характерных температур зимой. Поэтому низкое трение скольжения коньков не является результатом понижения температуры под действием повышенного давления, а появляется вследствие выделения теплоты трения.

Ответ: 0,1 °С.

Задача 86[17]. Бармен помещает в морозилку в формочках 1 литр воды с целью получить кубики льда для коктейлей. Предполагая, что вода в формочках предварительно была охлаждена практически до 0 °С, оценить величину работы, выполняемой морозильником (т. е. сколько электроэнергии он потребит из электрической розетки). Морозильник можно считать идеальной машиной Карно, температура фреона $T_x = -10$ °C, температура окружающего воздуха поддерживается равной $T_н = 23$ °C. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Решение. 1 литр воды имеет массу 1 кг. Для того, чтобы превратить 1 кг воды в лед, необходимо затратить энергию $Q = 330$ кДж. Однако работа, выполняемая морозильником, будет существенно меньше.

Напомним принцип работы холодильной машины: за счет внешней механической работы тепло отнимается от более холодного резервуара (морозильной камеры) и передается более горячему резервуару (окружающей среде). Полезный эффект холодильной машины определяется количеством теплоты Q_x, отобранной у охлаждаемого тела, а затраченная энергия — это внешняя работа A, совершенная над рабочим телом. Отношение $\varepsilon = Q_x/A$ называют холодильным коэффициентом. Если холодильная машина работает по идеальному обратному циклу Карно, то $\varepsilon = T_x/(T_н - T_x)$. При некотором соотношении температур $T_н$ и T_x холодильный коэффициент может быть больше 100%, однако это не противоречит закону сохранения энергии, поскольку тепло, отбираемое у охлаждаемого тела, и энергия, затраченная на совершение работы извне, не переходят друг в друга, а отдаются нагревателю (в частности, окружающей среде).

Предположим, что теплоемкость газа в морозильной камере мала по сравнению теплоемкостью воды или льда, тогда $Q_x = Q = 330$ кДж. Во время фазового перехода температура внутри морозильной камеры будет поддерживаться постоянной, примем её равной температуре фреона $T_x = -10$ °C.

$$\frac{Q_x}{A} = \frac{T_x}{(T_н - T_x)},$$

$$A = Q_x \frac{T_x}{(T_н - T_x)}.$$

Подставляя значения $Q_x = 330$ кДж, $T_Н = 296$ K, $T_x = 263$ K, получаем $A = 41{,}4$ кДж.

Ответ: 41,4 кДж.

Плотность

Задача 87[10]. В сосуде с водой плавает кусок льда массы $m = 0{,}5$ кг. Система находится в тепловом равновесии. Сколько тёплой воды при температуре $t = 30$ °C нужно добавить в сосуд, чтобы объем выступающей из воды части льда уменьшился в $n = 2{,}4$ раза? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды в коктейле $c_B = 4200$ Дж/(кг·°C).

Решение. Пусть в воде плавает кусок льда массы m, при этом над водой находится часть его объема V. Тогда объем кусочка льда равен $V_0 = m/\rho_{\text{л}}$, а объем его погруженной части — $V_{\text{погр}} = V_0 - V$.

В состоянии равновесия сила Архимеда, действующая на погруженную часть, уравновешивает силу тяжести: $\rho_{\text{в}} V_{\text{погр}} g = mg$, откуда $\dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} m - \rho_{\text{в}} V = m$.

Окончательно получаем: $V = \dfrac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}\rho_{\text{в}}}$. Как видим, уменьшение в n раз объема выступающей части соответствует уменьшению массы льдинки во столько же раз. Предположим, что $m_{\text{в}}$ — искомая масса подлитой воды. Заметим, что после установления равновесия в сосуде ещё остается лёд. Это значит, что подлитая масса воды остывает до температуры льда $t_0 = 0$ °C. Из условия теплового баланса:

$$\left(m_0 - \frac{m_0}{n}\right)\lambda = m_{\text{в}} c_{\text{в}} (t - t_0).$$

Отсюда находим:

$$m_{\text{в}} = \frac{n-1}{n}\frac{m_0\lambda}{c_{\text{в}}(t - t_0)} \approx 0{,}76 \text{ кг}.$$

Ответ: 0,76 кг.

Задача 88[4]. Цилиндрический стакан заполнен кусочками льда (льдинками) до высоты $h = 10$ см. Промежутки между льдинками сквозные и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают 60% объема. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и промежутков между ними остается неизменным. Определить уровень воды в стакане, после таяния 70% льда.

Решение. Объем, заполненный льдинками с воздушными промежутками, составляет $V = hS$. В этом объеме собственно льдинки занимают объем $V_л = 0{,}6 \cdot hS$. Масса льда составит $m_л = 0{,}6\rho_л hS$. Согласно условию растает и превратится в воду масса $m_в = 0{,}7m_л = 0{,}42\rho_л hS = \rho_в h_в S$.

Уровень воды после таяния $h_в = 0{,}42\rho_л h/\rho_в$. В этой воде будут плавать 0,3 массы льда, вытесняя некоторый объем воды и повышая ее уровень на

$$\Delta h = \frac{0{,}3m_л}{\rho_в} = 0{,}18\frac{\rho_л}{\rho_в}h.$$

Таким образом, уровень воды в стакане $H = h + \Delta h = (0{,}42 + 0{,}18)\dfrac{\rho_л}{\rho_в}h = 5{,}4$ см.

Ответ: 5,4 см.

Задача 89[9]. В прямоугольном теплоизолированном сосуде, дно которого имеет форму квадрата со стороной 10 см, находятся в тепловом равновесии лёд и вода. Надо льдом закреплена сетка, препятствующая его всплыванию. В сосуд налили 0,9 л горячей воды, имеющей температуру 80 °C, так что она полностью покрывает лёд. Насколько изменится уровень воды в сосуде, после того как наступит тепловое равновесие, если известно, что при этом растает часть льда? Теплоёмкость воды — 4,2 кДж/кг·К, её плотность — 1000 кг/м^3, теплота плавления льда — 336 кДж/кг, его плотность — 900 кг/м^3.

Решение. Поскольку вначале вода и лёд в сосуде находятся в тепловом равновесии, их температура равна температуре плавления льда $T_0 = 0$ °C. Поскольку после добавления горячей воды, растает только часть льда, конечная температура воды в сосуде также равна $T_0 = 0$ °C.

Массу растаявшего льда Δm можно выразить из уравнения теплового баланса — часть льда массой Δm расплавится за счёт остывания добавленной в сосуд горячей воды массой ρV:

$$\lambda \Delta m = c\rho V(T - T_0), \tag{4}$$

где λ — удельная теплота плавления льда, c — удельная теплоёмкость воды, T — температура горячей воды, V — объём горячей воды, ρ —

плотность воды.

После таяния льда объём, занимаемый водой со льдом, изменится на

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} - \frac{\Delta m}{\rho_{\text{л}}}, \tag{5}$$

а уровень воды в сосуде изменится на

$$\Delta h = \frac{V}{a^2}.$$

Подставив сюда ΔV из (5) и Δm из (4), найдём

$$\Delta h = -\frac{V}{a^2}\frac{c\rho}{\lambda}(T - T_0)\left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho}\right) \approx 10 \text{ см}.$$

Ответ: 1 см.

Задача 90[8]. Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?

Решение. Возможны 2 варианта системы: (а) лед полностью скрыт под керосином; (б) лед выступает над керосином. В первом варианте учитываем, что объём воды меньше объёма растаявшего куска льда, следовательно, суммарный объём уменьшится, и уровень керосина относительно дна сосуда понизится. Для разбора ситуации во втором случае применим метод «деформации жидкостей» — заменим слой керосина толщины H_1 таким слоем воды толщины H_2, что положение куска льда не изменится. Поскольку плотность воды больше плотности керосина, то $H_2 < H_1$. При плавлении льда в воде уровень воды не меняется (возможность доказать это утверждение предоставляем школьникам). Если теперь совершить обратную замену и вернуть керосин, то выяснится, что слой керосина над поверхностью, которую раньше образовывала вода, растекается по большей площади и уровень керосина понижается, по сравнению с исходным уровнем.

Ответ: понижается.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 91. Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110 °C. Вода занимает при этом 0,1% объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объёма вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу величиной $A = 177$ Дж, а объём, который он занимал, увеличился на $\Delta V = 1{,}25$ л. Найти давление $p_{\text{п}}$, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

Ответ: $p_{\text{п}} = 1{,}5$ атм, $m_{\text{в}} = 1{,}0$ г, $m_{\text{п}} = 0{,}8$ г.

Задача 92. За сутки ($T = 24$ часа) из цилиндрического стакана диаметром $D = 7$ см испаряется $\nu = 1$ моль воды. Считая, что молекулы располагаются мономолекулярными слоями, оценить время испарения одного слоя молекул.

Ответ: $6 \cdot 10^{-3}$ с.

Задача 93. При изотермическом уменьшении объема водяного пара в цилиндре в 3 раза при температуре $T = 373$ К его давление выросло в два раза. Определите массу m водяного пара в начале опыта, если начальный объем цилиндра равен 3,44 л.

Ответ: 1 г.

Задача 94. На поверхность воды положили жирную (полностью несмачиваемую водой) стальную иголку. Определить наибольший диаметр иголки, при котором она не потонет в воде. Плотность стали ρ, коэффициент поверхностного натяжения воды равен σ.

Ответ: $d \leqslant \sqrt{\dfrac{8\sigma}{\rho\pi g}}$

Задача 95. 204 грамма льда, охлажденного до температуры -10 °C, опустили в калориметр с водой, находящейся при температуре 0 °C. После того как температура льда достигла 0 °C, его вынули из воды. Какова масса вынутого льда? Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/кг·°C, удельная теплоемкость льда вдвое меньше, удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

Задача 96. В колбе над газовой горелкой греют воду со льдом. В некоторый момент времени из морозильника достают новую порцию льда, бросают в колбу и продолжают нагревать. На протяжении всего эксперимента измеряют температуру в колбе. График зависимости температуры от времени приведён на рисунке 53. Величины T_1, T_2, t_1, t_2, t_3, t_4 измерены и известны.

Определить, какой была температура в морозильнике, где находился лёд. Скорость подвода тепла к колбе считать постоянной. Удельная теплоемкость воды c_1, льда — c_2, теплота плавления льда λ.

Ответ: $T = \dfrac{\lambda}{c_2} - \dfrac{c_1}{c_2}\dfrac{(t_3 - t_1)T_1T_2}{(t_4 - t_3)T_1 - (t_2 - t_1)T_2}$.

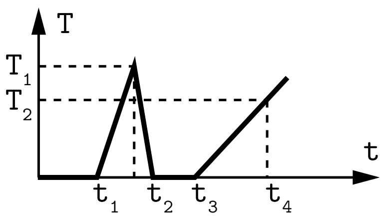

Рис. 53

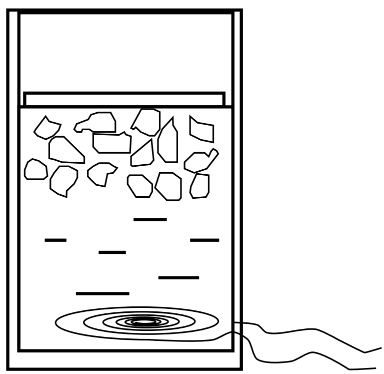

Рис. 54

Задача 97. В теплоизолированном сосуде находится смесь воды со льдом при температуре 0 °С (см. рис. 54). Площадь поршня $S = 100$ см^2, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 800$ кг/м^3. Вблизи дна цилиндра находится нагревательный элемент мощностью $P = 3$ кВт. С какой скоростью будет перемещаться поршень в процессе плавления льда, если удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг?

Ответ: $v = 6$ мм/мин.

Задача 98. Экспериментатор Глюк проводил опыты по определению растворимости различных веществ в воде. Для этого в калориметр, в котором изначально было некоторое количество воды при температуре $t_1 = 20$ °C, он добавлял маленькими порциями растворяемое вещество до тех пор, пока не образовывался насыщенный раствор (вещество переставало растворяться). Глюк обнаружил, что лед (взятый при температуре $t_2 = 0$ °C) тоже «растворяется» в воде. Какую «растворимость» льда он намерил? Удельная теплота плавления льда $q = 335$ кДж/кг, теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·°C.

Примечание. Растворимость — это отношение максимальной массы растворенного вещества к массе растворителя.

Ответ: 0,251.

Задача 99. В теплоизолированный горизонтально расположенный цилиндрический сосуд поместили 10 г льда, имеющего температуру $t_л = 0$ °C. Цилиндр плотно закрыли теплонепроницаемым поршнем площадью $S = 0{,}04$ м^2. Начальное давление P_a воздуха в сосуде было равно атмосферному (105 Па), а температура — комнатной. На какое расстояние x сместится поршень к моменту, когда весь лед в сосуде растает? Считать воздух идеальным двухатомных газом, а удельную теплоту плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Трением поршня о стенки пренебречь. Объем льда много меньше объема воздуха в цилиндре, а давление насыщенных паров воды много меньше атмосферного давления.

Ответ: 0,24 м.

Список литературы

1. Всероссийская олимпиада школьников 1992–1993 гг.

2. Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М. Сборник задач по физике. М.: Вербум–М, 2003. —264 с.: ил.

3. И.И. Воробъёв, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко, А.М. Трубачев , В.Г. Харитонов Задачи по физике: Учеб. пособие; Под ред. О.Я. Савченко. 3–е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с.

4. Петров, К.А., Глущенко, С.И., Колосовская, С.Б., Корбан, Н.Р., Развин, Ю.В. Изменение уровня жидкости в сосуде при различных условиях погружения в неё тающего льда — 2014. — № 5.

5. Олимпиада «Физтех–2014».

6. Олимпиада «Физтех–2012».

7. Олимпиада «Физтех–2017».

8. Журнал «Квант», 1971 г.

9. Олимпиада школьников «Сила Сибири», 2016–2017 г.

10. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2009–2010 гг.

11. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2001–2002 гг.

12. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2011–2012 гг.

13. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2013–2014 гг.

14. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2014–2015 гг.

15. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2015–2016 гг.

16. Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников в г. Москва, 2016–2017 гг.

17. Баканина Л., Журнал «Квант», 1979 год.

18. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2014–2015 гг.

19. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2012–2013 гг.

20. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2013–2014 гг.

21. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2009–2010 гг.

22. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2010–2011 гг.

23. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников, 2015–2016 гг.