Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

НАУКА В РЕГИОНЫ

Сборник задач по математике

Фонд развития Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ

2021

Авторы и составители:

Содержание

Преобразование рациональных выражений

Задачи для решения в классе

1. Представьте в виде многочлена:

   (a) $(a+b)(a-b+1)-(a-b)(a+b-1)$;

   (b) $(a^2-3a+1)(2a+1)^2$;

   (c) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$;

2. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения:
$$(x+2)^2-2(x+2)+1$$
неотрицательно

3. Разложите на множители

   (a) $10ab+15b^2$;

   (b) $4a^2-12ab+5b^2$;

   (c) $a^5+a^3-a^2-1$;

   (d) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$;

   (e) a^4+324;

   (f) a^6+1;

   (g) $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$;

   (h) $2a^4+a^3+4a^2+a+2$;

4. Упростите выражение
$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(b+c-a)^2$$

5. Сократите дроби:

   (a) $\dfrac{5a^2-a-4}{a^3-1}$;

   (b) $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$;

(c) $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$;

(d) $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}$;

(e) $\dfrac{(5a-4)^2+2(5a-4)(4-3a)+(3a-4)^2}{(2a+5)^2-2(2a+5)(5-3a)+(3a-5)^2}$;

(f) $\dfrac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}}$;

(g) $\dfrac{a^{2n}-b^4}{a^{n+1}-ab^2}$;

(h) $\dfrac{x^{n+2}y^n+x^ny^{n+2}}{x^4y^n-y^{n+4}}$;

(i) $\dfrac{c^4-3c^2+2}{c^5+1}$;

(j) $\dfrac{x^{n+2}-4x^{n+1}+4x^n}{x^3-6x^2+12x-8}$.

6. Докажите, что если n натуральное, то

(a) $(n^5-5n^3+4n)\,\vdots\,120$;

(b) $(5^n+7^n+9^n+11^n)\,\vdots\,4$.

7. Упростите выражение:

(a) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$;

(b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$;

(c) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}$;

(d) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}}$;

(e) $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\dfrac{2a^3}{a^4-1}$.

8. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения
$$(x-2y)^2 - \frac{8y^2(2y^2-x^2)}{(2y+x)^2}$$
неотрицательно.

9. Выполните действие:
$$\left(\frac{2a^{n+1}}{b^{n-2}}\right)^6 \cdot (0.25a^{3-2n}b^{2n+1})^3$$

10. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых - многочлены первой степени относительно x:
    (a) $\dfrac{4x+3}{x^2-1}$;
    (b) $\dfrac{x+28}{x^2-36}$;
    (c) $\dfrac{x+17}{(2x-1)(3x+2)}$.

11. Выполните деление многочлена на многочлен:
    (a) x^3-3x^2+7x-5 на $x-1$;
    (b) $8b^4-24b^3+2b^2+16b+10$ на $2b-5$.

12. Докажите, что $(10n+5)^2 = 100n(n+1)+25$. Используя данный результат, объяснить, почему $35^2 = 3\cdot 4+100+25 = 1225$. Вычислите устно:
    (a) 85^2;
    (b) 95^2;
    (c) 995^2;
    (d) 9995^2;

13. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2-2ab+b^2-2a+2$. При каких a и b оно достигается?

14. Докажите, что если a - четное число, то
$\dfrac{a}{12}+\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{a^3}{24}$ - целое число.

15. Известно, что $\dfrac{4b+a}{5a-7b}=2$. Найти:

   (a) $\dfrac{4a-5b}{3a+b}$;

   (b) $\dfrac{3a^2-2ab+b^2}{5a^2+2b^2}$;

   (c) $\dfrac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^3}$;

16. Упростите выражение:

   (a) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}\cdot\dfrac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$;

   (b) $\left(\dfrac{x-2y}{x^3+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

17. Докажите тождество:

$$\frac{\left(\dfrac{a^3}{(b-1)^3}+1\right)\left(\dfrac{a}{b-1}-1\right)}{\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-\dfrac{a}{b-1}+1\right)}=1.$$

18. Представьте в виде рациональной дроби:

$$\frac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}.$$

Ответы

1. (a) $2a$;

   (b) $4a^4 - 8a^3 - 7a^2 + a + 1$;

   (c) Указание:

   $$(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab) = (a^a+b^2)^2-(ab)^2 = a^4+b^4-a^2b^2;$$

   ещё раз применить формулу разность квадратов и получим ответ: $a^8 + a^4b^4 + b^8$;

2. Указание: свернуть в полный квадрат.

3. (a) $5b(2a + 3b)$;

   (b) $(2a - 5b)(2a - b)$;

   (c) $(a^2 + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$;

   (d) $(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)$;

   (e) $(a^2 + 18 - 6a)(a^2 + 18 + 6a)$;

   (f) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$;

   (g) $-3(x + y)(y + z)(z + x)$;

   (h) $(2a^2 + a + 2)(a^2 + 1)$.

4. $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$.

5. (a) $\dfrac{5a+4}{a^2+a+1}$;

   (b) $\dfrac{a^4+1}{a+1}$;

   (c) $\dfrac{a^2-1}{a^4-2a^2+4}$;

   (d) $\dfrac{1}{a^2-b^2}$;

   (e) 0,16;

   (f) $\dfrac{a^{11}+1}{a^{11}}$;

   (g) $\dfrac{a^n+b^2}{a}$;

   (h) $\dfrac{x^n}{x^2-y^2}$;

   (i) $\dfrac{(c^2-2)(c-1)}{c^4-c^3+c^2-c+1}$;

   (j) $\dfrac{x^n}{x-2}$.

6. Указание:
   (a) Использовать разложение на множители;
   (b) Использовать формулу $a^n - b^n$.

7. (a) $\dfrac{1}{n+1}$;
   (b) $n(n+1)$;
   (c) $\dfrac{n+2}{(n+1)!}$;
   (d) $\dfrac{32}{1-a^{32}}$;
   (e) $\dfrac{a^3+3a+2}{a^4-1}$.

9. $a^{15}b^{15}$.

10. (a) $\dfrac{7}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$;
   (b) $\dfrac{10}{3(x-6)} - \dfrac{11}{6(x+6)}$;
   (c) $\dfrac{5}{2x-1} - \dfrac{7}{3x+2}$;

11. (a) $x^2 - 2x + 5$;
   (b) $4b^3 - 2b^2 - 4b - 2$.

13. Наименьшее значение 1 при $a = b$, $a = 1$.

15. (a) $\dfrac{3}{7}$;
   (b) $\dfrac{9}{22}$;
   (c) $\dfrac{2}{19}$.

16. (a) $\dfrac{x+2y}{2x-y}$;
   (b) $\dfrac{1}{x+2}$.

18. $\dfrac{x-z}{y-z}$.

Задачи для решения дома

1. Представьте в виде многочлена:

   (a) $(2b+3)(b-2)^3$;

   (b) $(a+1)^4+(a-1)^4$;

   (c) $(b-2)(b^4+2b^3+4b^2+8b+16)$;

2. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения:

   (a) $(x-y)(x-y-6)+9$ неотрицательно;

3. Разложите на множители

   (a) $a^4-2a^3+a^2-1$;

   (b) $c^8-c^4-2c^2-1$;

   (c) $a(a+2)-(b+1)(b-1)$;

   (d) $2a^3-a^2+3$;

   (e) a^4+64;

   (f) $a^3(a^2-7)^2-36a$;

   (g) $x(y+z)^2+y(x+z)^2+z(x+y)^2-4xyz$;

   (h) $y^8-y^6-4y^2-16$;

4. Упростите выражение и найдите его числовое значение

   (a) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ при $a=2{,}5, b=-3$

5. Сократите дроби:

   (a) $\dfrac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$;

   (b) $\dfrac{2a^4+7a^2+6}{3a^4+3a^2-6}$;

   (c) $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$;

   (d) $\dfrac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$;

(e) $\dfrac{(4b+5)^2+32b^2-50+(4b-5)^2}{(4b-5)^2+(4b+5)^2+50-32b^2}$;

(f) $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$;

(g) $\dfrac{x^{n+1}-2x^n-3x^{n-1}}{x^2-5x+6}$;

(h) $\dfrac{b^{n+1}+7b^n+12b^{n-1}}{b^{n+2}+b^{n+1}-12b^n}$;

(i) $\dfrac{a^2-b^2-c^2+2bc}{b^2-c^2-a^2-2ac}$;

(j) $\dfrac{x^{47}+x^{46}+\cdots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\cdots+x+1}$;

6. Докажите, что если n - натуральное, то

(a) $(2a^3+3a^2+a)\,\vdots\,6$;

(b) $(1^n+3^n+5^n+7^n)\,\vdots\,4$;

7. Упростите выражение:

(a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!}$;

(b) $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$;

(c) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n-1)!}$;

(d) $\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{2a}{1+a^2}-\dfrac{4a^3}{1+a^4}-\dfrac{8a^7}{1+a^8}$;

(e) $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right)$.

8. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\frac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\frac{18a}{27a^3+8}-\frac{1}{3a+2}$$

равно нулю.

9. Выполните действие:

$$\left(\frac{a^{2n-1}b^{3n+2}}{c^{3-n}}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^{1-n}b^{2-2n}}{c^{3n+1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{b^{2n-1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^{n+3}}{a^{n-1}}\right)^3$$

10. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых - многочлены первой степени относительно x:

    (a) $\dfrac{x+2}{x^2-25}$;

    (b) $\dfrac{3x-4}{x^2+10x+24}$;

    (c) $\dfrac{7x-6}{(4x-1)(3x-5)}$.

11. Выполните деление многочлена на многочлен:

    (a) $8b^4 - 22b^3 + b^2 + 16b - 15$ на $2b - 5$;

    (b) $y^3 - 21y - 20$ на $y + 4$.

12. Докажите, что $(10a + b) \cdot 11 = 100a + 10(a + b) + b$. Используя данный результат, объясните, почему $35 \cdot 11 = 385 (8 = 3 + 5)$, и $75 \cdot 11 = 825 (12 = 7 + 5)$. Вычислите:

    (a) $81 \cdot 11$;

    (b) $72 \cdot 11$;

    (c) $87 \cdot 11$;

    (d) $93 \cdot 11$;

13. Найдите наибольшее значение выражения $2ab - a^2 - 2b^2 + 4b$. При каких a и b оно достигается?

14. Докажите, что если $a \in \mathbb{N}$, то
    $\dfrac{a^5}{120} + \dfrac{a^4}{12} + \dfrac{7a^3}{24} + \dfrac{5a^2}{12} + \dfrac{a}{5}$ - целое число.

15. Найдите a и b из тождества:

    (a) $\dfrac{1}{(x-6)(x+1)} = \dfrac{a}{x-6} + \dfrac{b}{x+1}$.

16. Упростите выражения:

(a) $\dfrac{2x^2+xy-6y^2}{6x^2-5xy+y^2} : \dfrac{2x^2-7xy+6y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$;

(b) $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)$;

17. Докажите тождество:

$$\frac{\dfrac{x^6+y^6}{x^3y^3}\left(\dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{y^3}{x^3}\right)}{\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}+1}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2}{y^2}.$$

18. Представьте в виде рациональной дроби:

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{y}}}}$$

Ответы

1. (a) $2b^4 - 9b^3 + 6b^2 + 20b - 24$;
   (b) $2a^4 + 12a^2 + 2$;
   (c) $b^5 - 32$.

2. Указание: выделить полный квадрат

3. (a) $(a^2 - a - 1)(a^2 - a + 1)$;
   (b) $(c^4 - c^2 - 1)(c^4 + c^2 + 1)$;
   (c) $(a + 1 - b)(a + 1 + b)$;
   (d) $(a + 1)(2a^2 - 3a + 3)$;
   (e) $(a^2 + 8 - 4a)(a^2 + 8 + 4a)$;
   (f) $a(a^3 - 7a - 6)(a^3 - 7a + 6)$;
   (g) $(x + z)(x + y)(y + z)$;
   (h) $(y^4 + 4)(y^4 - y^2 - 4)$.

4. 8

5. (a) $\dfrac{a^2 - 4}{a^2 + 5}$;
   (b) $\dfrac{2a^2 + 3}{3a^2 - 3}$;
   (c) $\dfrac{5a - 3b}{a^2 + 2}$;
   (d) $\dfrac{1}{a^2 + a + 1}$;
   (e) $0{,}64b^2$;
   (f) $\dfrac{a + 2}{a - 1}$;
   (g) $\dfrac{x^{n-1}(x + 1)}{x - 2}$;
   (h) $\dfrac{b + 3}{b(b - 3)}$;
   (i) $\dfrac{c - a - b}{b + c + a}$;

(j) $x^{32}+x^{16}+1$;

Решение: 1-й способ:

$$\frac{x^{47}+x^{46}+\cdots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\cdots+x+1}=$$
$$=\frac{(x^{47}+\cdots+x^{32})+(x^{31}+\cdots+x^{16})+(x^{15}+\cdots+x+1)}{x^{15}+\cdots+x+1}=$$
$$=\frac{x^{32}(x^{15}+\cdots+x+1)+x^{16}(x^{15}+\cdots+x+1)}{x^{15}+\cdots+x+1}+$$
$$+\frac{(x^{15}+\cdots+x+1)}{x^{15}+\cdots+x+1}=x^{32}+x^{16}+1$$

2-й способ:

Умножить числитель и знаменатель на $(x-1)$ и, используя формулу разложения на множители x^n-1, получить $\dfrac{x^{48}-1}{x^{16}-1}=\dfrac{(x^{16})^3-1}{x^{16}-1}=x^{32}+x^{16}+1$.

6. Указание:

   (a) Использовать разложение на множители;

   (b) Использовать формулу a^n-b^n.

7. (a) $n+3$;

   (b) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

   (c) $\dfrac{1-n}{n!}$;

   (d) $\dfrac{16a^{15}}{1-a^{16}}$;

   (e) $2a$.

9. $a^{2n+2}b^{17}c^{-2n-6}$.

10. (a) $\dfrac{7}{10(x-5)}+\dfrac{3}{10(x+5)}$;

    (b) $-\dfrac{8}{x+4}+\dfrac{11}{x+6}$;

    (c) $\dfrac{1}{4x-1}+\dfrac{1}{3x-5}$;

11. (a) $4b^3 - b^2 - 2b + 3$;

    (b) $y^2 - 4y - 5$.

13. При $a = b = 2$ наибольшее значение 4.

15. $a = \frac{1}{7}, \quad b = -\frac{1}{7}$.

16. (a) $\frac{x+2y}{2x-y}$;

    (b) $\frac{1}{x+2}$.

18. $\frac{1}{y}$.

Делимость целых чисел.

Задачи для решения в классе

1. Докажите, что число является составным ($n \in \mathbb{N}$):

   (a) $4^{n+2} + 2^{n+5} + 15$;
   (b) $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$, $n > 2$;
   (c) $n^4 + 4$, $n > 1$.

2. Докажите, что

   (a) $n^2 + n \;\vdots\; 2$;
   (b) $n^3 - n \;\vdots\; 6$;
   (c) $n^3 + 5n \;\vdots\; 6$;
   (d) $n^3 + 3n^2 + 14n + 36 \;\vdots\; 6$;
   (e) $n^5 - n \;\vdots\; 30$;
   (f) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \;\vdots\; 24$.

3. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

5. Докажите, что если к произведению трех последовательных чисел прибавить их среднее арифметическое, то получится куб натурального числа.

6. Докажите, что $16^{35} + 31^4 - 2 \;\vdots\; 15$.

7. Найдите наибольший общий делитель (двумя способами) и наименьшее общее кратное чисел:

   (a) 36000 и 29040;
   (b) 19019 и 29645.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

   (a) 4400, 6500 и 6300;
   (b) 7007, 3773 и 4459.

9. Найдите натуральные числа a и b, где $a \leqslant b$, что

(a) $(a;b)=18$, $[a;b]=180$;
(b) $(a;b)=315$, $a+b=945$;
(c) $(a;b)=252$, $ab=381024$;
(d) $a+b=153$, $[a;b]=630$.

Здесь и далее $(a;b)$ и $[a;b]$ – обозначения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел a и b соответственно.

10. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел a и b, если они удовлетворяют условиям: $(a;b)=30$, $[a,b]=5250$.

11. Докажите, что для любых целых a несократима дробь:

(a) $\dfrac{a^2+2a}{a+1}$;
(b) $\dfrac{2a^2+a+1}{4a^2+3a+2}$;
(c) $\dfrac{3a^2+4a}{3a^2+a-1}$;
(d) $\dfrac{12a+1}{12a^2+43a+3}$.

12. Известно, что дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима (a,$b\in\mathbb{N}$). Докажите, что дробь $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ также несократима.

13. Известно, что дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима. На какие числа может сокращаться дробь:

(a) $\dfrac{7a+4b}{5a+2b}$;
(b) $\dfrac{3a+2b}{a+4b}$.

14. Докажите, что для любых целых m и n выражение $(3m+2n+1)^2(m+4n+8)^3$ делится на 4.

15. Десятичная запись числа A состоит из 30 единиц и нескольких нулей. Может ли число A быть полным квадратом?

16. Доказать, что 27-значное число, составленное из одинаковых цифр, делится на 999.

17. Найдите все целые n, при которых дробь $a=\dfrac{n^3+18n^2+13n-611}{n+9}$ будет целым числом.

18. Сколько натуральных делителей имеет число 16! ?

19. Сколькими нулями оканчивается число 100! ?

20. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел a и b, если они удовлетворяют условиям: $(a;b) = 30$, $[a,b] = 16!$

21. Может ли быть простым число $a+b+c+d$, если a, b, c и d – натуральные числа и $ac = cd$.

Ответы.

7. (a) $(36000;29040) = 240$, $[36000;29040] = 4356000$; (b) $(19019;29645) = 77$, $[19019;29645] = 7322315$.

8. (a) $(4400;6500;6300) = 100$ и $[4400;6500;6300] = 18018000$;
   (b) $(7007;3773;4459) = 49$ и $[7007;3773;4459] = 49049$.

9. (a) $(36,90)$ или $(18,180)$; (b) $(315,630)$; (c) $(252,1512)$ или $(504,756)$; (d) $(63,90)$.

10. $2^2 = 4$.

13. (a) 2, 3, 6; (b) 2, 5, 10.

15. нет.

17. -8, -10.

18. $(15+1)\cdot(6+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 5376$.

19. 24.

20. $2^6 = 64$.

21. Не может.

Указания.

2. Используйте идею, что произведение k последовательных чисел делится на $k!$

4. Используйте идею, что произведение простых чисел плюс один является простым числом.

6. Используйте формулу
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

12. Докажите, что $(a^2+ab+b^2; a+b) = (a+b; a^2) = (a+b; b^2) = (a^2; b^2)$.

14. Используйте факт, что разность $(3m + 2n + 1)$ и $(m + 4n + 8)$ – нечетное число.

18. В какой степени в разложение числа $N!$ на простые множители входит простое число p? Пусть m – такое число, что $p^m \leqslant N < p^{m+1}$. Тогда степень числа p в разложении на простые множители равна $\left[\dfrac{N}{p}\right] + \left[\dfrac{N}{p^2}\right] + \ldots + \left[\dfrac{N}{p^m}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

21. Заметьте, что $a + b + c + d = a + b + c + \dfrac{ab}{c} = \dfrac{(a + c)(b + c)}{c}$.

Задачи для решения дома

1. Докажите, что число является составным ($n \in \mathbb{N}$):

   (a) $15^n - 5^n + 3^{3n} - 1$;
   (b) $36n^4 - 4n^2 + 1$;
   (c) $n^4 + 64$.

2. Докажите, что

   (a) $n^3 - 3n^2 + 2n \,\vdots\, 6$;
   (b) $n^3 - 3n^2 + 8n + 12 \,\vdots\, 6$;
   (c) $n^5 + 4n \,\vdots\, 5$;
   (d) $n^5 + 5n^4 - 5n^2 - n \,\vdots\, 30$.

3. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не может делиться на 3.

4. Докажите, что не существует простого числа, которое можно представить в виде суммы нескольких последовательных положительных нечетных чисел.

5. Докажите, что если к произведению четырех последовательных натуральных чисел прибавить единицу, то получится число, равное квадрату некоторого натурального числа.

6. Докажите, что

   (a) $10^{100} + 28^{33} - 2 \,\vdots\, 9$;
   (b) $36^5 + 19^5 - 64 \,\vdots\, 17$.

7. Найдите наибольший общий делитель (двумя способами) и наименьшее общее кратное чисел:

   (a) 7425 и 49005;
   (b) 22477 и 7007.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

   (a) 180, 7425 и 2574;
   (b) 286286, 28028 и 2002.

9. Найдите натуральные числа a и b, где $a \leqslant b$, что

(a) $(a;b) = 175$, $[a;b] = 2450$;

(b) $(a;b) = 1925$, $a + b = 13475$;

(c) $(a;b) = 90$, $ab = 623700$;

(d) $a + b = 931$, $[a;b] = 2940$.

10. Решите в натуральных числах уравнение $(a;b) + [a;b] = ab$.

11. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел a и b, если они удовлетворяют условиям: $(a;b) = 91$, $[a,b] = 207025$.

12. Докажите, что для любых целых a несократима дробь:

(a) $\dfrac{a+1}{2a^2+3a}$; (b) $\dfrac{3a^2-2}{6a^2+a-3}$; (c) $\dfrac{6a^2+8a+1}{6a+1}$.

13. Докажите, что для любых целых p и q выражение $(3q+7p+2)^2(q+9p+5)^3$ делится на 4.

14. Докажите, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получится число, которое делится на 9.

15. Докажите, что если натуральное число $\overline{abc} \mathrel{\vdots} 37$, то число $\overline{cab} \mathrel{\vdots} 37$.

16. Известно, что дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима. На какие числа может сокращаться дробь:

(a) $\dfrac{9b+a}{6b+2a}$; (b) $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.

17. Найдите все целые n, при которых дробь $a = \dfrac{n^3+16n^2+5n+9}{n+4}$ будет целым числом.

18. Сколько натуральных делителей имеет число $18!$?

19. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел a и b, если они удовлетворяют условиям: $(a;b) = 60$, $[a,b] = 22!$

20. Число партий, сыгранных между шахматистами на некотором турнире, оказалось простым числом. Каждый шахматист сыграл с каждым ровно один раз. Сколько игроков было на этом турнире?

Ответы:

7. (a) $(7425; 49005) = 1485$, $[7425; 49005] = 245025$;

   (b) $(22477; 7007) = 91$, $[22477; 7007] = 1730729$.

8. (a) $(180; 7425; 2574) = 18$ и $[180; 7425; 2574] = 386100$;

   (b) $(286286; 28028; 2002) = 2002$ и $[286286; 28028; 2002] = 4008004$.

9. (a) $(175, 2450)$ или $(350, 1225)$;

   (b) $(1925, 11550)$ или $(3850, 9625)$ или $(5775, 7700)$;

   (c) $(630, 990)$;

   (d) $(196, 735)$.

10. $(2, 2)$.

11. 4.

16. (a) 3, 4, 12; (b) 3.

17. -3, -5, -185, 177.

18. $(16+1)(8+3)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 17952$.

19. $2^8 = 256$.

20. 3.

Линейные уравнения и неравенства с модулем

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнения:

   (a) $|x| = 3$;

   (b) $|x| = -3$;

   (c) $|x + 1| = 3$;

   (d) $|3 - x| = 2$;

   (e) $|2x - 1| = -1$;

   (f) $|x + 5| = 0$;

   (g) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| = 1$.

2. Решите неравенства:

   (a) $|x| < 2$;

   (b) $|x| \geqslant 5$;

   (c) $|x - 2| > 1$;

   (d) $|1 - x| < 4$;

   (e) $|x - 1| \geqslant -1$;

   (f) $|x - 3| \leqslant -2$;

   (g) $|x - 3| \geqslant |x - 7|$;

   (h) $|6 - x| < |x + 4|$;

3. Решите уравнения:

   (a) $|x + 14| = |6x|$;

   (b) $|2x + 12| = -|x|$;

   (c) $|x - 3| = 3x - 1$;

   (d) $7 - 4x = |4x - 7|$;

   (e) $2|x + 1| = |x - 3|$;

   (f) $|3x + 2| = |2x - 3|$;

(g) $|x| + |x+1| = 1$;

(h) $|x-1| - |x-2| = 1$;

(i) $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$;

(j) $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$;

(k) $\Big|2|x-1| + 3x - 4\Big| = x - 2$;

(l) $\Big| - 2x - |3x+4| + 5\Big| = 1 - 5x$.

4. Решите неравенства:

(a) $|x+3| \geqslant 3x + 1$;

(b) $3|x-1| < 12 - x$;

(c) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \leqslant 1$;

(d) $2|x+4| \geqslant -x - 4$;

(e) $|2x-1| \leqslant |3x+1|$;

(f) $\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}\right| > 1$;

(g) $|2x+6| + |x-4| > 10$;

(h) $|2x-1| < |4x+1|$;

(i) $|3x+1| \leqslant 3x + 1$;

(j) $|x| + |x-1| < 5$;

(k) $\dfrac{|x+1|}{|x-2|-2} < 1$;

(l) $\Big||2x+1| - 5\Big| > 2$;

(m) $\Big|2x - |x+3| + 1\Big| > 2$.

5. Постройте графики функций:

(a) $y = 2|x|$;

(b) $y = -\dfrac{1}{3}|x|$;

(c) $y = |x+4| - 2$;

(d) $y = -|x-3| + 2$;

(e) $y = x + |x|$;

(f) $y = 2|x| - x$;

(g) $y = \Big||x| - 2\Big|$;

(h) $y = \Big||x-2| - 1\Big| - 1$;

(i) $y = |x-4| + |x+4|$;

(j) $y = |x-5| + 2|x+3| - 3x + 3$.

6. Постройте графики неравенств:

(a) $y \geqslant -|x| + 1$;

(b) $y \leqslant |5 - x| - 2$;

(c) $y \geqslant -3|x+4| - 5$;

7. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координат x и y, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $y \geqslant |x|$;

(b) $|x+2| \geqslant |y-3|$;

(c) $|x| + |y| \leqslant 2$;

(d) $|x| - |y-2| \leqslant 1$;

(e) $\Big||x| - |y|\Big| = x + y$.

8. Какое наибольшее число решений может иметь уравнение:

$$\Bigg|\bigg|\Big||x-a| - b\Big| - c\bigg| - d\Bigg| = e$$

9. Найдите наименьшее значение выражения для произвольных x и y:

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y|$$

Ответы

1. (a) ± 3;
   (b) нет решений;
   (c) -4.2;
   (d) 1.5;
   (e) нет решений;
   (f) -5.

2. (a) $(-2; 2)$;
   (b) $(-\infty; -5]$;
   (c) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;
   (d) $(-3; 5)$;
   (e) $(-\infty; +\infty)$;
   (f) нет решений;
   (g) $[5; +\infty)$;
   (h) $(1; +\infty)$.

3. (a) $\frac{14}{5}; -2$;
   (b) нет решений;
   (c) 1;
   (d) $(-\infty; \frac{7}{4}]$;
   (e) $-5; \frac{1}{3}$;
   (f) $-5; \frac{1}{5}$;
   (g) $[-1; 0]$;
   (h) $[2; +\infty)$;
   (i) $1; \frac{11}{2}$;
   (j) -2;
   (k) $\emptyset$;
   (l) $[-\frac{4}{3}; \frac{1}{5}]$.

4. (a) $(-\infty; 1]$;
   (b) $(-\frac{9}{2}; \frac{13}{4})$;
   (c) $[-\frac{1}{2}; +\infty)$;
   (d) $(-\infty; +\infty)$;
   (e) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$;
   (f) $(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 5)$;
   (g) $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$;
   (h) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
   (i) $[-\frac{1}{3}; +\infty)$;
   (j) $(-2; 3)$;
   (k) $(-\infty; -0.5) \cup (0; 4)$;
   (l) $(-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$;
   (m) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

5. 16 решений.

6. 1 при $x = 0, y = 0$.

Задачи для решения дома

1. Решите уравнения:
   (a) $|-x+6|=6$;
   (b) $|-2x+4|=-4$;
   (c) $|4-3x|=2$;
   (d) $|x-5|=|x-1|$;
   (e) $\left|\dfrac{2x-1}{x-3}\right|=2$.
2. Решите неравенства
   (a) $|x+3|>5$;
   (b) $|7-x|\leqslant 4$;
   (c) $|3x-1|\geqslant 5$;
3. Решите уравнения:
   (a) $|3x-5|=3x-5$;
   (b) $|x+3|=|2x-1|$;
   (c) $|x-2|=3|x+3|$;
   (d) $|6x+5|=|1-x|$;
   (e) $|x+1|+|x+2|=2$;
   (f) $|x-2|+|4-x|=3$;
   (g) $|x+1|-|x-2|+|3x+6|=5$;
   (h) $|x+1|-|x|+3|x-1|=2$;
   (i) $\Big|3x-|2x-5|\Big|=x+5$;
   (j) $\Big|-5x-3|2x-3|+2\Big|=11+x$;
4. Решите неравенства:
   (a) $|1-3x|\geqslant|2x+3|$;
   (b) $|2x-3|\geqslant 2x-3$;

(c) $|x+1|+|x-2|>5$;

(d) $|3x-1|+|2x-3|-|x+5|<2$;

(e) $\Big||x-3|+1\Big| \geqslant 2$;

(f) $\Big|2x-|3-x|-2\Big| \leqslant 4$;

(g) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 3$.

5. Постройте графики функций:

(a) $y = 2|x-1|$;

(b) $y = -\dfrac{1}{2}|x+3|$;

(c) $y = |x| + 4$;

(d) $y = -|x+3| + 6$;

(e) $y = 2|x+5| + |x-1| - |x-5|$;

(f) $y = \Big|\big||2x-5|-1\big|-2\Big|$.

6. Постройте графики неравенств:

(a) $y \geqslant |2x-4| + 3$;

(b) $y \leqslant |3-2x| - 1$;

(c) $y > 3|x| - 2$;

(d) $y \leqslant |3x-2|$.

7. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координат x и y, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $|y| \leqslant |x|$;

(b) $|x| + |y| \geqslant 2$;

(c) $|x+y| - |x-y| \geqslant 2$;

(d) $|x-1| + |y+1| + |x+y| \leqslant 2$.

8. Сколько решений имеет уравнение

$$\Big|\big||x+2|+3\big|-3\Big|=a$$

в зависимости от a.

9. Найдите наименьшее значение выражения для произвольных x и y:

   (a) $|y|+|3x-y|+|x+y-1|$;

Ответы

1. (a) $0; 12$;
   (b) нет решений;
   (c) $\frac{2}{3}; 2$;
   (d) 3;
   (e) $\frac{7}{4}$.
2. (a) $(-\infty; 8) \cup (2; +\infty)$;
   (b) $[3; 11]$;
   (c) $(-\infty; -\frac{4}{3}] \cup [2; +\infty)$.
3. (a) $\frac{5}{3}; +\infty)$;
   (b) $-\frac{2}{3}; 4$;
   (c) $-\frac{11}{2}; -\frac{7}{4}$;
   (d) $-\frac{6}{5}; -\frac{4}{7}$;
   (e) $-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}$;
   (f) $\frac{3}{2}; \frac{9}{2}$;
   (g) $-\frac{14}{3}; 0$;
   (h) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}$;
   (i) $0; [\frac{5}{2}; +\infty)$;
   (j) $\frac{11}{5}; -2$.
4. (a) $(-\infty; -0.4] \cup [4; +\infty)$;
   (b) $(-\infty; +\infty)$;
   (c) $(-\infty - 2) \cup (3; +\infty)$;
   (d) $(-0.5; 2.75)$;
   (e) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$;
   (f) $[\frac{1}{3}; 3]$;
   (g) $(-\infty; 1) \cup (2.2; +\infty)$.
5. При $a < 0$ нет решений, при $a = 0$ одно решение $x = -2$, при $a > 0$ два решения.
6. 1 при $x = 0, y = 0$.

Квадратный корень

Задачи для решения в классе

1. Найдите значения выражений:

   (a) $\sqrt{121 \cdot 64}$;

   (b) $\sqrt{16 \cdot \dfrac{4}{9} \cdot 0.25}$;

   (c) $\sqrt{\dfrac{81 \cdot 25}{16}}$;

   (d) $\sqrt{\dfrac{36}{49 \cdot 121}}$.

2. Объясните, почему равенства неверны:

   (a) $\sqrt{25} = -5$;

   (b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$.

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

   (a) $\sqrt{25 \cdot 81 \cdot 8}$;

   (b) $\sqrt{6272}$;

   (c) $\sqrt{20!}$;

   (d) $\sqrt{a^3}, \quad (a \geqslant 0)$;

   (e) $\sqrt{ab^6}, \quad (a \geqslant 0, b > 0)$;

   (f) $\sqrt{a^2b^4c}, \quad (a \leqslant 0, c \geqslant 0)$.

4. Внесите множитель под знак корня:

   (a) $2\sqrt{2}$;

   (b) $b\sqrt{a}, \quad (a > 0, b > 0)$;

   (c) $(3b - 1)\sqrt{3}, \quad (b > 2)$;

   (d) $b\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}, \quad (a > 0, b > 0)$.

5. Упростите выражения:

(a) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1.75} - 0.5\sqrt{343} + \sqrt{112}$;
(b) $(\sqrt{a^3b} + 2\sqrt{a^5b}) - (2\sqrt{a^7b} - \sqrt{a^9b}), \quad (a > 0, b > 0)$;
(c) $(2 + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.

6. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:
   (a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;
   (b) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$;
   (c) $\sqrt{a + 1 - 4\sqrt{a - 3}}$;

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:
   (a) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$;
   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$;
   (c) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$;
   (d) $\dfrac{b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}}$;
   (e) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}}$.

8. Решите уравнения:
   (a) $(x + 1)\sqrt{3} = x + 3$;
   (b) $\sqrt{2}(2 - x\sqrt{6}) = 2(x - \sqrt{6})$.

9. Сравните числа:
   (a) $\sqrt{5}$ и $\dfrac{9}{4}$;
   (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и 3.

10. Решите уравнения, используя определение арифметического квадратного корня:

    (a) $\sqrt{x} = 3$;
    (b) $\sqrt{x} = -2$;
    (c) $\sqrt{3x-1} = 0$;
    (d) $\sqrt{x} = x$.

11. Упростите выражения:

    (a) $\sqrt{a^2 + a + 4 + \sqrt{a^2 - 6a + 9}}, \quad a \geqslant 3$;
    (b) $\sqrt{a^2 - 13a + 45 + \sqrt{a^2 - 8a + 16}}, \quad a \leqslant 4$.

12. Найдите наибольшее целое число, меньшее данного:

    (a) $\sqrt{5}$;
    (b) $\sqrt{11}$;
    (c) $\sqrt{67}$;
    (d) $\sqrt{95}$.

13. Докажите неравенство:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0).$$

Ответы

1. (a) 88;
   (b) $\frac{4}{3}$;
   (c) $\frac{45}{4}$;
   (d) $\frac{6}{77}$.

2. (a) $90\sqrt{2}$;
   (b) $56\sqrt{2}$;
   (c) $2 \cdot 10!\sqrt{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$;
   (d) $a\sqrt{a}$;
   (e) $b^3\sqrt{a}$;
   (f) $|a|b^2\sqrt{c}$;

3. (a) $\sqrt{8}$;
   (b) $\sqrt{ab^2}$;
   (c) $\sqrt{3(3b-1)^2}$;
   (d) $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}+b}$.

4. (a) $2\sqrt{7}$;
   (b) $a\sqrt{ab}(a^3-2a^2+2a+1)$;
   (c) $2\sqrt{3}$;

5. (a) $2+\sqrt{3}$;
   (b) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$;
   (c) $|\sqrt{a-3}-2|$

6. (a) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$;
   (b) $\sqrt{2}+1$;
   (c) $\sqrt{x+3}+2$;
   (d) $\dfrac{b}{|b|}\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$;
   (e) $4(7\sqrt{3}-9\sqrt{2})$.

7. (a) $\sqrt{3}$;
   (b) $\sqrt{2}$.

8. (a) $\sqrt{5}<\dfrac{9}{4}$;
   (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$.

9. (a) $x=9$;
   (b) нет решений;
   (c) $x=\dfrac{1}{3}$;
   (d) $x=0, x=1$.

10. (a) $a+1$;
    (b) $7-a$.

11. (a) 2;
    (b) 3;
    (c) 8;
    (d) 9.

Задачи для решения дома

1. Найдите значения выражений:

   (a) $\sqrt{169 \cdot 0.36}$;

   (b) $\sqrt{1.44 \cdot 0.04 \cdot 0.0001}$;

   (c) $\sqrt{\dfrac{9 \cdot 16}{25 \cdot 49}}$;

   (d) $\sqrt{\dfrac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

2. Объясните, почему равенства неверны:

   (a) $\sqrt{2.25} = -1.5$;

   (b) $\sqrt{(-3)^2} = -3$.

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

   (a) $\sqrt{50}$;

   (b) $\sqrt{1996}$;

   (c) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{b^2}}, \quad (a > 0, b > 0)$;

   (d) $\sqrt{a^{2n}b^{4m}}, \quad (a \geqslant 0, b > 0)$;

   (e) $\sqrt{(a^2+1)(2-a^2-\dfrac{1}{a^2})^2}, \quad (a \neq 0)$;

   (f) $\sqrt{18(a^2-2ab+b^2)}, \quad (a \leqslant b)$.

4. Внесите множитель под знак корня:

   (a) $2\sqrt{7}$;

   (b) $(m-3)\sqrt{\dfrac{1}{m-3}}$;

   (c) $(x-y)\sqrt{a}, \quad (x \geqslant y)$;

   (d) $\dfrac{a^2}{2-a}\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{4(1-a)}{a^3}}, \quad (a > 2)$.

5. Упростите выражения:

(a) $\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{32}}$;

(b) $(\sqrt{a^5b^2}-3\sqrt{a^7b^4})-5\sqrt{a^9b^6}-2\sqrt{a^3b^8}, \quad (a>0, b>0)$;

(c) $(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$.

6. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:

(a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$;

(b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

(c) $\sqrt{3a-1+2\sqrt{2a^2-a}}$;

7. Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

(a) $\dfrac{-8}{\sqrt{32}}$;

(b) $\dfrac{a-2}{\sqrt{4-a^2}}$;

(c) $\dfrac{1}{3-3\sqrt{2}}$;

(d) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$;

(e) $\dfrac{\sqrt{15+\sqrt{6}}}{\sqrt{15-\sqrt{6}}}$.

8. Решите уравнения:

(a) $(x-1)\sqrt{2}=2x-1$;

(b) $(x\sqrt{5}-2)\sqrt{10}=5x-2\sqrt{5}$.

9. Сравните числа:

(a) $\sqrt{13}+\sqrt{2}$ и 6;

(b) $\sqrt{15}+\sqrt{17}$ и $\sqrt{13}+\sqrt{19}$.

10. Решите уравнения, используя определение арифметического квадратного корня:

    (a) $\sqrt{7x-1}=1$;

    (b) $\sqrt{x}=1-\sqrt{2}$;

    (c) $\sqrt{x}=-x$;

    (d) $\sqrt{x-2}=2-x$.

11. Упростите выражения:

    (a) $\sqrt{10a+23+\sqrt{a^4+4a^2+4}}$;

    (b) $\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$.

12. Найдите наибольшее целое число, меньшее данного:

    (a) $\sqrt{7}$;

    (b) $\sqrt{10}$;

    (c) $\sqrt{62}$;

    (d) $\sqrt{103}$.

13. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}},\quad (a>0, b>0, c>0).$$

Ответы

1. (a) 7.8; (b) 0.0024; (c) $\frac{12}{35}$; (d) 3.52.

2. (a) $5\sqrt{2}$; (b) $2\sqrt{499}$; (c) $\frac{2a}{b}$; (d) a^nb^{2m}; (e) $|a+\frac{1}{a}|\sqrt{a^2+1}$; (f) $3(b-a)\sqrt{2}$;

3. (a) $\sqrt{28}$;
   (b) $\sqrt{m-3}$;
   (c) $\sqrt{(x-y)^2a}$;
   (d) $-\sqrt{a}$.

4. (a) $\dfrac{11\sqrt{2}}{8}$
   (b) $ab\sqrt{a}(a-3a^2b-5a^3b^2-2b^3)$
   (c) 1;

5. (a) $\sqrt{3}+1$;
   (b) $\sqrt{5}-2$;
   (c) $\sqrt{2a-1}+\sqrt{a}$.

6. (a) $-\sqrt{2}$;
   (b) $-\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2+a}$;
   (c) $2\sqrt{2}+3$;
   (d) $x(\sqrt{x+2}+2)$;
   (e) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$.

7. (a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
   (b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

8. (a) $\sqrt{13}+\sqrt{2}<6$;
   (b) $\sqrt{15}+\sqrt{17}>\sqrt{13}+\sqrt{19}$.

9. (a) $x=\dfrac{2}{7}$;
   (b) нет решений;
   (c) $x=0$;
   (d) $x=2$.

10. (a) $a+5$;
    (b) $a+10$.

11. (a) 3;
    (b) 4;
    (c) 8;
    (d) 11.

Квадратные уравнения.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнения:

   (a) $\frac{1}{9}x^2 - 9 = 0;$

   (b) $\frac{2}{7}x^2 - 3.5 = 0;$

   (c) $4 - 9(2-5x)^2 = 0;$

   (d) $-\frac{1}{2}x + 3x^2 = 11;$

   (e) $2x^2 - 3x - 1 = 0;$

   (f) $(x-1)(x+2) = 2x;$

   (g) $1996x^2 - 1000x - 996 = 0;$

   (h) $x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0;$

   (i) $x^2 - (8! + 90)x + 10! = 0.$

2. Решите уравнения относительно x:

   (a) $x^2 - (a-2b)x - 2ab = 0;$

   (b) $(a-b)^2x^2 - (a^2-b^2)x + ab = 0, \quad (a \neq b).$

3. Напишите общий вид квадратного уравнения, в котором:

   (a) один из корней равен 0;

   (b) корни равны по модулю, но противоположны по знаку.

4. При каких значениях m ровно один из корней уравнения равен нулю:

   (a) $3x^2 + x + 2m - 3 = 0;$

   (b) $x^2 + (m+3)x + |m| - 3 = 0.$

5. При каких значениях m корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку:

(a) $x^2 + (3m - 5)x - 2 = 0$;
(b) $4x^2 + (5|m| - 1)x + 3m^2 + m = 0$.

6. Решите уравнение методом выделения квадрата двучлена:
   (a) $5x^2 - 4x - 12 = 0$;
   (b) $x^2 + 10x + 9 = 0$.

7. Решите уравнения:
   (a) $(8x - 9)(3x + 2) - (2x - 3)(8x - 2) = 33x + 20$;
   (b) $\dfrac{x^2 + 3x}{5} = \dfrac{10 - x}{2} - \dfrac{3x^2 + 8x}{14}$;
   (c) $\dfrac{(x - 3)(x - 7)}{2} - 6x = \dfrac{2x + 8}{5} - \dfrac{(5x - 3)^2}{2}$;
   (d) $(x - 5)^3(x - 1) - (x - 8)^2(x^2 - 2) = 49$.

8. Решите уравнение относительно a: $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$.

9. Найдите наименьшее значение выражения:
   (a) $2x^2 + 1$;
   (b) $x^2 - 2x + 5$.

10. Найдите наибольшее значения выражения:
    (a) $3 - 2x^2$;
    (b) $4x + 3 - x^2$.

11. Решите уравнения:
    (a) $x^2 - 7|x| + 6{=}0$;
    (b) $x^2 + 2x + 2|x + 1| = 7$;
    (c) $2x - 1 = 3\sqrt{2x - 1}$;
    (d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
    (e) $\dfrac{x - 2}{x^3} = 2x - x^2$;
    (f) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
    (g) $\left(\dfrac{4x - 5}{3x + 2}\right)^2 + \left(\dfrac{3x + 2}{5 - 4x}\right)^2 = 4.25$

Ответы

1. (a) ± 9;
   (b) $\pm\dfrac{7}{2}$;
   (c) $\dfrac{4}{15}; \dfrac{8}{15}$;
   (d) $2; \dfrac{11}{6}$;
   (e) $\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$;
   (f) $-1; 2$;
   (g) $1; -\dfrac{249}{499}$;
   (h) $\sqrt{2}; \sqrt{3}$;
   (i) $8!; 90$.

2. (a) $x_1 = a; x_2 = -2b$;
   (b) $x_1 = \dfrac{a}{a-b}; x_2 = \dfrac{b}{a-b}$;

4. (a) $m = 3$;
   (b) $m = 3$.

5. (a) $m = \dfrac{5}{3}$;
   (b) $m = -0.2$.

7. (a) $\dfrac{2 \pm \sqrt{26}}{2}$;
   (b) $-6\dfrac{1}{29}; 2$;
   (c) $1; \dfrac{67}{65}$;
   (d) $1; \dfrac{51}{7}$.

8. (a) $4b; -b$.

11. (a) $\pm 6; \pm 1$;
    (b) $1; -3$;
    (c) $\dfrac{1}{2}; 5$;
    (d) $\pm 2; \pm 1$;
    (e) 2;

Задачи для решения дома

1. Решите уравнения:

   (a) $4x^2 = 12.25$;

   (b) $12.25 - 3x^2 = 6x^2$;

   (c) $5(x^2 - 2)^2 - 9.2 = 0$;

   (d) $3x^2 + 8 = x$;

   (e) $9x^2 + 4 = 12x$;

   (f) $(3x - 1)(2x + 3) = (x + 9)(2x + 5)$;

   (g) $x^2 - 1997x + 1996 = 0$;

   (h) $\sqrt{2}x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$;

   (i) $2(3x - 5)^2 = 9(3x - 5)$.

2. Решите уравнения относительно x:

   (a) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0, \quad (|a| \neq |b|)$;

   (b) $x^2 + a(a - 1)(a^2 + a + 1)x - a^5 = 0$.

3. Напишите общий вид квадратного уравнения, в котором оба корня равны 0;

4. При каких значениях m ровно один из корней уравнения равен нулю:

   (a) $x^2 - 2x + m^2 - 1 = 0$;

   (b) $2x^2 - mx + 2m^2 - 3m = 0$.

5. При каких значениях m корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку:

   (a) $2x^2 - (5m - 3)x + 1 = 0$;

   (b) $3x^2 + (m^2 - 4m)x + m - 1 = 0$.

6. Решите уравнение методом выделения квадрата двучлена:

   (a) $x^2 + px + q = 0$;

(b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

7. Решите уравнения:

(a) $(4x - 5)(3x + 7) - (x - 2)(4x + 2) = 33x + 73$;

(b) $\dfrac{3x^2 - 14x + 11}{14} = \dfrac{x + 9}{2} - \dfrac{x^2 + x + 1}{5}$;

(c) $\dfrac{x^2 - 1}{3} - \dfrac{(x - 3)^2}{8} = \dfrac{(x + 3)^2}{4} - 3x$;

(d) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 3) - (x^2 + 10x + 1)(x^2 - 9x - 2) = 66$.

8. Решите уравнения относительно a:

(a) $21a^2 - 4ab - b^2 = 0$.

9. Найдите наименьшее значение выражения:

(a) $x^2 - x$;

(b) $x^2 - 3x + 1$.

10. Найдите наибольшее значения выражения:

(a) $3x - x^2$;

(b) $5x - 2 - x^2$.

11. Решите уравнения:

(a) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$;

(b) $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$;

(c) $3x - 5 - 2\sqrt{3x - 5} = 0$;

(d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

(e) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 3x}$;

(f) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;

(g) $\left(\dfrac{5x + 1}{2x - 3}\right)^2 + \left(\dfrac{3 - 2x}{5x + 4}\right)^2 = \dfrac{82}{9}$

Ответы

1. (a) $\pm\dfrac{7}{4}$;
   (b) $\pm\dfrac{7}{6}$;
   (c) $\pm\sqrt{3.84}; \pm\sqrt{0.4}$;
   (d) нет действительных корней;
   (e) $\dfrac{2}{3}$;
   (f) $-2; 6$;
   (g) $1; 1996$;
   (h) $-1; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
   (i) $\dfrac{5}{3}; \dfrac{19}{6}$.

2. (a) $x_1 = \dfrac{1}{a-b}; x_2 = \dfrac{1}{a+b}$;
   (b) $x_1 = a^4; x_2 = -a$;

4. (a) $m = \pm 1$
   (b) $m = 1.5$.

5. (a) таких m нет;
   (b) $m = 0$.

7. (a) $\dfrac{13 \pm \sqrt{1001}}{8}$;
   (b)
   (c) $27 \pm 8\sqrt{10}$;
   (d) $-1\dfrac{61}{85}$.

8. (a) $-\dfrac{b}{3}; -\dfrac{b}{7}$.

10. (a) ± 7;
    (b) $-3; 0; 2.5$;
    (c) $\dfrac{5}{3}; 3$;
    (d)
    (e) $-2; 1; 2$;
    (f) $2; 3; \dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$;

Теорема Виета. Задачи на составление квадратных уравнений.

Задачи для решения в классе

1. Решите устно:

   (a) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

   (b) $x^2 + 2x - 24 = 0$;

   (c) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;

   (d) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$;

2. Составьте квадратное уравнение с заданными корнями:

   (a) $-7; -2$;

   (b) $\dfrac{4}{3}; 2$;

   (c) $\sqrt{3}; \sqrt{5}$.

3. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известно, что один из корней уравнения равен:

   (a) $-\sqrt{6}$;

   (b) $2 - \sqrt{5}$.

4. Не вычисляя корней уравнения $3x^2 + 8x - 1 = 0$, найдите:

   (a) $x_1^2 + x_2^2$;

   (b) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;

   (c) $x_1^4 + x_2^4$.

5. В уравнении $x^2 - 2x + a = 0$ квадрат разности корней равен 16. Найдите a.

6. При каких значениях p и q корни уравнения $x^2+px+q = 0$ равны $2p$ и $\dfrac{q}{2}$?

7. Найдите двузначное число, если цифра его десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение числа и суммы его цифр равно 900.

8. С аэродрома вылетели одновременно два самолета: один - на запад, другой - на юг. Через два часа расстояние между ними было 2000 км. Найдите скорости самолетов, если скорость одного составляет 75% скорости другого.

9. Расстояние между станциями A и B равно 120 км. В полночь из A в B отправляется поезд. В 3ч той же ночью из A в B отправляется другой поезд, проходящий в час на 10 км больше первого. Второй поезд прибывает в B на 2ч позже первого. В котором часу второй поезд прибыл в B?

10. Экскаватор роет котлованы ёмкостью по 20 м^3. После того как был вырыт первый котлован, производительность экскаватора уменьшилась на 1 м^3/ч. Известно, что через 6,5 часов после начала работы было вырыто полтора котлована. Найдите первоначальную производительность экскаватора.

11. Придумайте задачу, решение которой приводит к уравнению:

    (a) $x(x-3) = 180$;

    (b) $\dfrac{10}{10-x} + \dfrac{20}{x+50} = 1$;

    Решите эту задачу.

Ответы

1. (a) $2; 4;$
   (b) $4; -6;$
   (c) $1; \frac{5}{3};$
   (d) $1; \sqrt{2}.$
2. (a) $x^2 + 9x + 14 = 0;$
   (b) $3x^2 - 10x + 8 = 0;$
   (c) $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0.$
3. (a) $x^2 - 6;$
   (b) $x^2 - 4x - 1.$
4. (a) $\frac{70}{9};$
   (b) $-\frac{70}{27};$
   (c) $\left(\frac{70}{9}\right)^2 - \frac{2}{9}.$
5. $a = -3.$
6. $p = 1; q = -6$
7. 75.
8. 800 км/ч.
9. 6 ч.
10. 5 м^3/ч.

Задачи для решения дома

1. Решите устно:

   (a) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

   (b) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

   (c) $2x^2 + 7x + 5 = 0$;

   (d) $x^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{15})x - 5\sqrt{3} = 0$;

2. Составьте квадратное уравнение с заданными корнями:

   (a) $8; -3$;

   (b) $-3.4; 6$;

   (c) $3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}$.

3. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известно, что один из корней уравнения равен:

   (a) $\sqrt{7}$;

   (b) $3 + \sqrt{3}$.

4. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 5x - 4 = 0$, найдите:

   (a) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$;

   (b) $\dfrac{x_1}{x_2^3} + \dfrac{x_2}{x_1^3}$;

   (c) $x_1^5 + x_2^5$.

5. В уравнении $x^2 - 4x + a = 0$ сумма квадратов корней равна 16. Найдите a.

6. При каких значениях параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - m)x - m - 3 = 0$ наименьшая?

7. Одна из цифр двузначного числа на 3 меньше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 1877. Найдите это число.

8. Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км против течения, затратив на весь путь 2ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера 20 км/ч.

9. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый пешеход не задержался на 1ч на расстоянии от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на середине пути. После остановки первый пешеход увеличил свою скорость на 1 км/ч, и они встретились на расстоянии 4 км от места его остановки. Найдите скорость второго пешехода.

10. Бак ёмкостью 2400 м^3 наполняется топливом. При опорожнении этого бака производительность насоса на 10 м^3/мин выше, чем производительность насоса при заполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при заполнении бака.

11. Придумайте задачу, решение которой приводит к уравнению:

    (a) $\dfrac{42}{17-x} - \dfrac{40}{17+x} = 1;$

    (b) $\dfrac{12}{x} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{30}{x+2} - 1;$

    Решите эту задачу.

Ответы

1. (a) $-1; 6;$
   (b) $-2; -7;$
   (c) $-1; -\dfrac{5}{2};$
   (d) $\sqrt{5}; -\sqrt{15}.$
2. (a) $x^2 - 5x - 24 = 0;$
   (b) $x^2 - 2.6x - 20.4 = 0;$
   (c) $x^2 - 6x + 4 = 0.$
3. (a) $x^2 - 7;$
   (b) $x^2 - 6x + 6.$
4. (a)
   (b)
   (c)
5. $a = 0.$
6. $m = 1$
7. 14 или 41
8. 4 км/ч.
9. 3 км/ч.
10. 50 м^3/мин.

Квадратный трёхчлен в задачах с параметром. Часть 1.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнения с параметром a:

   (a) $ax = 5$;

   (b) $(a-3)x = -1$;

   (c) $(a+1)x = a+1$;

   (d) $(a-2)x = (a-2)a$.

2. Найдите значение параметра a, при котором число 2 является корнем уравнения $2px = 32$.

3. Найдите значения параметра a, при котором уравнения $5x - 1 = 2a - 2$ и $3x + 2 = a + 5$ имеют общий корень.

4. При каком значении m уравнение $(m-1)x = m(m-1)$:

   (a) имеет ровно 1 корень;

   (b) имеет бесконечное множество корней;

   (c) имеет хотя бы 1 корень;

   (d) не имеет корней;

   (e) имеет корень $x = 0$;

   (f) имеет корень $x = -1$.

5. Найдите все k, при которых является целым числом корень уравнения:

   (a) $kx = 2$;

   (b) $(k-1)x = -2$.

6. При каких значения параметра c уравнение $5x^2 - 4x + c = 0$:

   (a) имеет действительно различные корни;

   (b) имеет один корень;

(c) не имеет действительных корней;

(d) имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2 + 13x - 30 = 0$.

7. При каком значении a уравнение

$$ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$$

имеет один корень?

8. При каких значениях a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы 1 общий корень?

9. При каком соотношении между a, b и c уравнение $0{,}75x^2 + (a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ имеет один корень? Может ли данное уравнение иметь 2 действительных различных корня?

Ответы

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

2.

3.

4. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)

5. (a)
   (b) .

6. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
7. $(-\frac{1}{7}; 0.1)$.
8. -2.
9. ($a = b = c$; нет).

Задачи для решения дома

Решите уравнения:

1. Решите уравнения с параметром a:
   (a) $ax = -2$;
   (b) $(a+2)x = 3$;
   (c) $(a-3)x = 3-a$;
   (d) $(a+3)x = (a+3)(a-2)$.

2. Найдите значение параметра a, при котором число 2 является корнем уравнения $3px = 24$.

3. Найдите значения параметра a, при котором уравнения $2x+1 = a+5$ и $3x-7 = 2a-2$ имеют общий корень.

4. При каком значении m уравнение $(m+1)x = m$:
   (a) имеет ровно 1 корень;
   (b) имеет бесконечное множество корней;
   (c) имеет хотя бы 1 корень;
   (d) не имеет корней;
   (e) имеет корень $x = 0$;
   (f) имеет корень $x = -2$.

5. Найдите все k, при которых является целым числом корень уравнения:
   (a) $kx = k-2$;
   (b) $(k+1)x = 2k+3$.

6. При каких значения параметра b уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$:
   (a) имеет один из корней равный 3;
   (b) имеет один корень;
   (c) не имеет действительных корней;

(d) имеет действительные различные корни.
$x^2 + 13x - 30 = 0$.

7. При каком значении a уравнение

$$(a+2)x^2 + 2(a+2)x + 2 = 0$$

имеет один корень?

8. При каких значениях a уравнения $x^2+(2a-3)x+(a^2-7a+12) = 0$ и $x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0$ равносильны?

9. При каком значении параметра a уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет три корня?

Ответы

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
2.
3.
4. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)
5. (a)
   (b) .
6. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
7. 0.
8. 3.
9. -1.

Числовые неравенства.

Задачи для решения в классе

1. Пусть n – натуральное число. Докажите неравенство
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

2. Числа a и b таковы, что $a^3-b^3=2$, $a^5-b^5\geqslant 4$. Докажите, что $a^2+b^2\geqslant 2$.

3. Докажите, что для любых чисел a и b справедливо неравенство
$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}.$$

5. Докажите, что $a^4+b^4+8\geqslant 8ab$ при любых a и b.

6. Известно, что $abc=1$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$. Докажите, что
$$(a+2)(b+2)(c+2)\geqslant 27.$$

7. Докажите, что для любых a, b, c верно неравенство
$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

8. Докажите, что если a, b, c – положительные числа, то
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geqslant\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

9. Докажите, что если a, b, c – положительные числа, то
$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc(a+b+c).$$

10. Докажите, что если a, b, c – положительные числа и $ab+bc+ca>a+b+c$, то $a+b+c>3$.

11. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2}.$$

12. Известно, что $abc \geqslant ab+bc+ca$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$. Докажите, что

$$\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

13. Докажите, что $\dfrac{a^6}{b^2}+\dfrac{b^6}{a^2} \geqslant a^4+b^4$ при любых a и b.

14. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{abc}.$$

15. Докажите, что

$$4(a^6+b^6) \geqslant (a^3+b^3)(a^2+b^2)(a+b).$$

16. Пусть $a,b,c>0$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

17. Пусть $a,b,c>0$. Докажите, что

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \leqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

18. Пусть $a,b,c>1$. Докажите, что

$$a^a b^b c^c \geqslant a^b b^c c^a.$$

Задачи для решения дома

1. Пусть n – натуральное число. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

2. Пусть n – натуральное число. Докажите неравенство
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)<2\sqrt{n}.$$

3. Докажите, что для любом $a>0$ справедливо неравенство
$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$$

4. Докажите, что для любых чисел a и b справедливо неравенство
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}.$$

5. Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство
$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{b^4+a^2}\leqslant\frac{1}{ab}.$$

6. Пусть a, b, c – положительные числа и $abc(a+b+c)=1$. Найдите наименьшее значение выражения $(a+b)(a+c)$.

7. Докажите, что если a, b, c – положительные числа, то
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

8. Докажите, что для любых a, b верно неравенство $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

9. Докажите, что если a, b, c – положительные числа, то
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

10. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant \frac{a\sqrt{a}}{2} + \frac{b\sqrt{b}}{2} + \frac{c\sqrt{c}}{2}.$$

11. Докажите неравенство для положительных значений переменных:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

12. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd.$$

13. Для чисел $a \in [0; 1)$ и $b \in [0; 1)$ докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

14. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a.$$

15. Пусть $a,b,c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

16. Пусть $a,b,c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

17. Пусть $a,b,c \geqslant 0$. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

18. Пусть $a,b,c > 1$. Докажите, что

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Принцип Дирихле.

Задачи для решения в классе

1. Грани куба окрашены в 2 цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.

2. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, раскрашенные в один цвет.

3. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

4. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

5. Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на 3.

6. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трех дырок.

7. Докажите, что в записи числа 2^{30} есть по крайней мере две одинаковые цифры, не вычисляя его.

8. Каждый из 2021 депутата парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 674 человек, никакие два из которых не выясняли отношений между собой указанным выше способом.

9. Каждый из 20 участников олимпиады послал по ее окончании сообщения десяти другим участникам. Докажите, что какие-то двое послали сообщения друг другу.

10. Известно, что на голове у каждого человека растет не более 200000 волос. В Москве живет более 12,5 миллионов человек. Докажите, что в Москве найдутся 63 человека с одинаковым числом волос.

11. Докажите, что в любой группе из 6 человек либо найдется тройка попарно знакомых, либо найдется тройка попарно незнакомых людей.

12. На плоскости отмечены 6 точек так, что любые три из них образуют треугольник со сторонами разной длины. Докажите, что найдутся два треугольника таких, что наименьшая сторона первого одновременно является наибольшей стороной второго.

13. Трое играют в шахматы на вылет, то есть игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге Ян сыграл 10 партий, Сергей – 15, а Андрей – 17. Кто из них проиграл во второй партии?

14. Каждая точка плоскости, имеющая целочисленные координаты, раскрашена в один из n цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами в точках одного цвета.

15. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 2021.

16. Даны 1002 различных числа, не превосходящих 2000. Докажите, что из них можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

Задачи для решения дома

1. Имеется 25 шоколадок 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?

2. Можно ли разложить 44 кубика на 9 кучек так, чтобы количество кубиков в разных кучках было различным?

3. Дано 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 20. Докажите, что из них можно выбрать два, одно из которых делится на другое.

4. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 расположено 7 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки на расстоянии не больше 1.

5. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

6. Докажите, что из любых десяти натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать два числа, разность которых делится на 9.

7. Докажите, не вычисляя, что в десятичной записи числа 1999^6 найдутся по крайней мере три одинаковые цифры.

8. В группе 50 человек. Каждому нравятся ровно k людей из этой группы. При каком наименьшем k обязательно найдутся два человека из этой группы, которые нравятся друг другу?

9. В лесу растет 4 миллиона елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдется 7 елок с одинаковым числом иголок.

10. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого в классе не менее 12 друзей.

11. На плоскости выбрали 17 точек и каждые две соединили ровно одной линией одного из трех цветов. Докажите, что найдутся 3

точки, каждые две из которых соединены линией одного и того же цвета.

12. Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в четыре цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее, чем в три цвета?

13. Докажите, что в любом наборе из 2021 целого числа найдется несколько, сумма которых делится на 2021.

14. Докажите, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

Свойства функций.

Задачи для решения в классе

1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ строго возрастают на промежутке X. Верно ли, что функции:

   (a) $f(x)+g(x), f^2(x)$ и $f(x)g(x)$ строго возрастают на промежутке X;

   (b) $-f(x), \dfrac{1}{f}(x)$ убывают на промежутке X;

2. Докажите, что если $f(x)$ – возрастающая функция на Eg, а $g(x)$ – возрастающая функция на Dg, то функция $h(x)=f(g(x))$ является возрастающей на Dg.

3. Найдите область определения, промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{x^2-2x-8}-4}$.

4. Найдите область определения, промежутки возрастания и убывания функций

   (a) $h(x)=|x-3|+|x+2|$;

   (b) $f(x)=\dfrac{5}{|x-3|+|x+2|}$;

   (c) $g(x)=\dfrac{5}{|3x+2|-|2x+3|}$.

   Постройте график функций $f(x)$ и $g(x)$. Выясните, в каких точках $g(x)$ достигает значений $-1,-2$ и -3.

5. Найдите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x^2-8x+15)|x-3|}}{x^2-10x+21}.$$

6. Определите, является ли функция возрастающей или убывающей

(a) $f(x) = \sqrt{4x+3} - \sqrt{4x-3}$;

(b) $g(x) = 5x - |\pi x - 3|$.

7. Найдите множество значений, промежутки возрастания и убывания функций

(a) $p(x) = 1 - 2x^2 + 6x$;

(b) $q(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

(c) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$;

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 2}$.

8. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{если } -1 \leqslant x < 1, \\ 2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 - 2x, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 8 - x, & \text{если } 3 < x \leqslant 6. \end{cases}$$

Укажите область определения и множество значений функции. Исследуйте на монотонность функцию $f(x)$, то есть укажите промежутки (строгого) возрастания, (строгого) убывания, стационарности функции.

9. Найти множество значений функции

(a) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 27)(x - 6)}{(x^2 - 3x - 18)}$

(b) $g(x) = \dfrac{x^4 + 6x^3 - 27x - 162}{x^2 + 3x - 18}$

10. Постройте графики функций $f(x) = \{x\}$ (дробная часть x) и $g(x) = [x]$ (целая часть x). Исследуйте функции на монотонность и ограниченность.

11. Решите уравнение $x^9 + 5x - 6 = 0$.

12. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+4} = 0$.

13. Решите неравенство $\sqrt[5]{2x+5} + \sqrt{12x+49} \geqslant -\dfrac{x^5}{2} - 10$.

14. Решите неравенство $\sqrt{-x^5-3x^3}-4\sqrt{2x+7}\geqslant 16$.

15. Решите уравнение $2\sqrt{4x+77}+|x-3|-2x=|\sqrt{4x+77}-3|$.

16. Решите уравнение
$(4x+5)(2+\sqrt{(4x+5)^2+7})+(6x+1)(2+\sqrt{(6x+1)^2+7})=0$.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-\dfrac{3}{4}+\sqrt{y+x^2-\dfrac{3}{4}}}=y,\\ \sqrt{y^2-\dfrac{1}{4}+\sqrt{x+y^2-\dfrac{1}{4}}}=x.\end{cases}$$

18. Решите уравнение $\sqrt{(16x^4-8x^2+2)^2+(x^2+x+1)^2}=1{,}25$.

19. Решите уравнение $\sqrt{15-9x^2+6x}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{8-x^2-2x}-3$.

20. Исследуйте функции на чётность:

    (a) $f(x)=0$;
    (b) $g(x)=(x+2)^3+(2-x)^3$;
    (c) $p(x)=\dfrac{|x-1|}{x+2}+\dfrac{|x+1|}{x-2}$;
    (d) $q(x)=(x+2)(x+3)+(x-2)(x-3)$.

21. Функция $y=f(x)$ является чётной; известно, что:

    (a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ при $x\leqslant 0$; (b) $f(x)=x^2+2x+2$ при $x<0$.

    Постройте график функции $f(x)$. Задайте данную функцию одной формулой. Решите уравнение $f(x)=0$.

22. Функция $y=f(x)$ является нечётной; известно, что:

    (a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ при $x\leqslant 0$;
    (b) $f(x)=x^2+2x+2$ при $x<0$.

    Постройте график функции $y=f(x)$. Задайте данную функцию одной формулой. Решите уравнение $f(x)=0$.

23. Представьте функцию $f(x)$, определенную на всей числовой прямой, в виде суммы чётной функции $\varphi(x)$ и нечётной функции $\psi(x)$.

24. Постройте график функций

    (a) $y = x^2 + 2|x| - 3$; (b) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Ответы:

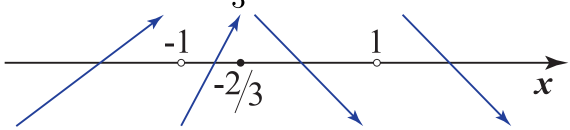
2. (a) да, нет, нет; (b) да, нет.

3. $Df = (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (4; 6) \cup (6; +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-\infty; -4)$ и $(-4; -2)$. Промежутки убывания: $(4; 6)$ и $(6; +\infty)$.

4. (a) $Dh = \mathbb{R}$. Промежуток строго убывания: $(-\infty; -2]$. Промежуток строго возрастания: $[3; +\infty)$.

(b) $Df = \mathbb{R}$. Промежуток строго возрастания: $(-\infty; -2]$. Промежуток строго убывания: $[3; +\infty)$.

(c) $Dg = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-\infty; -1)$ и $(-1; -\dfrac{2}{3})$. Промежутки убывания: $(-\dfrac{2}{3}; 1)$ и $(1; +\infty)$. Значения -1 и -2 не достигаются; значение -3 достигается в точке $-\dfrac{2}{3}$.



5. $Df = (-\infty; 3) \cup [5; 7) \cup (7; +\infty)$.

6. (a) $f(x)$ убывает на $\left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$;

(b) $g(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

7. (a) $p(x)$ возрастает на $(-\infty; 1{,}5]$, убывает на $[1{,}5; +\infty)$. $Ep = (-\infty; -5{,}5]$.

   (b) $q(x)$ возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. $Eq = [0; +\infty)$.

   (c) $f(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. $Ef = [1; 2)$.

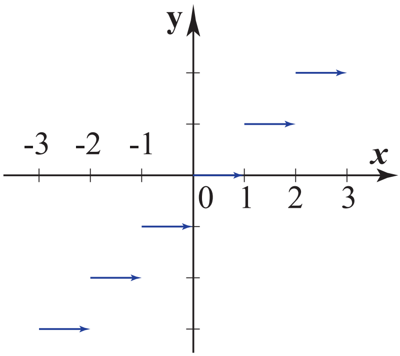
   (d) $g(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. $Eg = [1; 2)$.

8. $f(x)$ строго возрастает на $(-1; 1)$ и $[2; 3]$, строго убывает на $[3; 6]$, стационарна на $[1; 2]$. $Df = [-1; 6]$. $Ef = (-3; 1) \cup [2; 5]$.

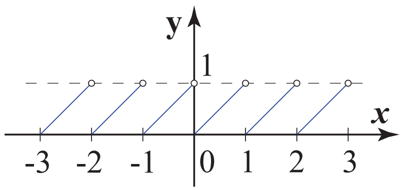
9. (a) $E = [6\frac{3}{4}; 27) \cup (27; +\infty)$;

   (b) $E = [6\frac{3}{4}; 27) \cup (27; +\infty)$.

10.



$f(x) = [x]$



$g(x) = \{x\} = x - [x]$

11. 1.

12. -1.

13. $[-2; +\infty)$.

14. $[-3{,}5; -3]$.

15. 11.

16. $-0{,}6$.

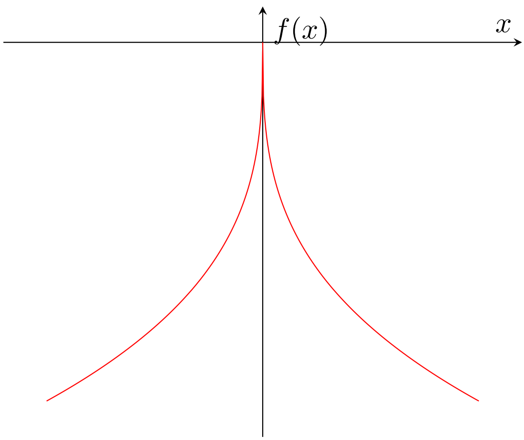
17. $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

18. $-\frac{1}{2}$.

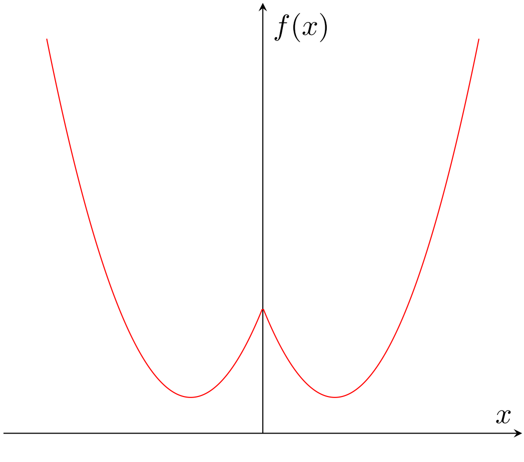
19. -1.

20. (a) чётная и нечётная;
    (b) чётная;
    (c) нечётная ($x \neq \pm 2$);
    (d) чётная.

21. (a) $f(x) = -\sqrt[3]{|x|}$. Корень уравнения: $x = 0$.

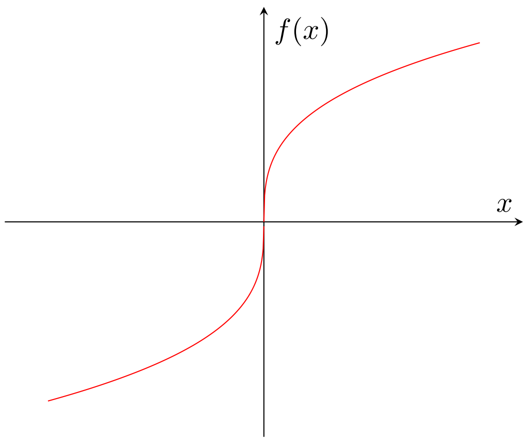


(b) $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$. Уравнение не имеет корней.



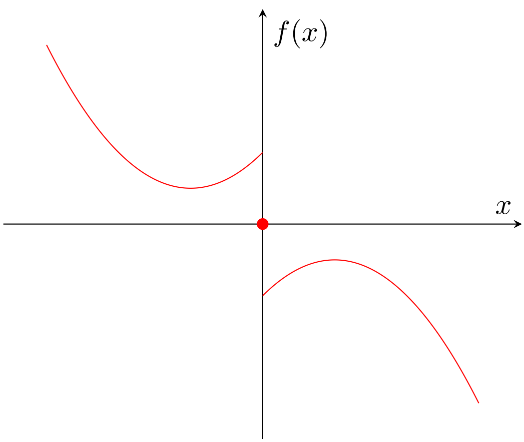
$f(x) = \sqrt[3]{x}$. Корень уравнения: 0.

22. (a)



$f(x) = -x|x| + 2x - 2\operatorname{sign} x$. Корень уравнения: 0.

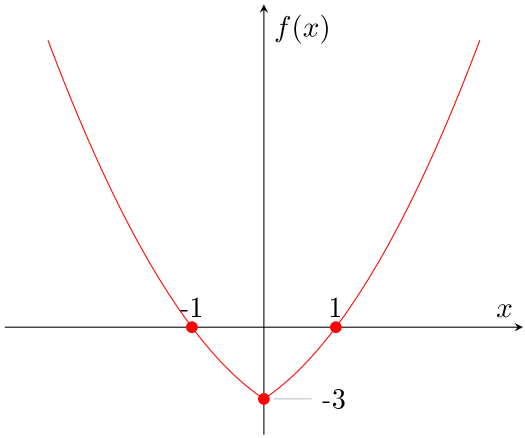
(b)



23. $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$; $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

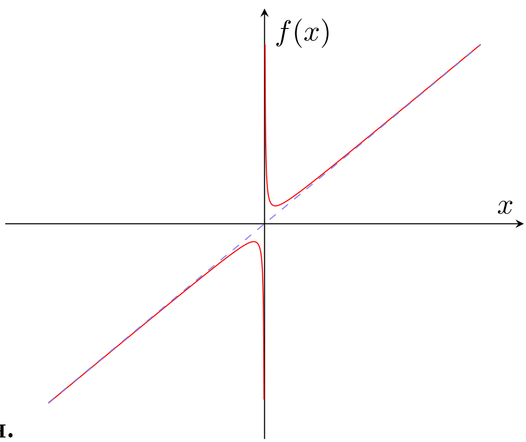
$$y = x^2 + 2|x| - 3;$$

24. (a)



$$y = x + \frac{1}{x}, \text{ асимптоты: } f(x) = x, x = 0.$$

(b)



Указания.

7. (d) $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 2) - 1}{x^2 - 2x + 2} = 2 - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

15. Данное уравнение равносильно уравнению $f\left(\sqrt{4x + 77}\right) = f(x)$, где $f(t) = 2t - |t - 3|$ – строго возрастающая функция.

17. Используйте идею, что уравнение $f\left(f(x)\right) = x$, где $f(x)$ – строго возрастающая функция, равносильно уравнению $f(x) = x$.

Задачи для решения дома

1. Докажите, что если $f(x)$ – убывающая функция на Eg, а $g(x)$ – возрастающая функция на Dg, то функция $h(x) = f(g(x))$ является убывающей на Dg.

2. Найдите область определения, промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \dfrac{11}{\sqrt{x^2 - 8x + 15} - \sqrt{3}}$.

3. Найдите область определения, промежутки возрастания и убывания функций

   (a) $f(x) = |2x - 3| - |3x - 2|$; (b) $g(x) = \dfrac{10}{|2x - 3| - |3x - 2|}$.

   Постройте график функций $f(x)$ и $g(x)$. Выясните, в каких точках достигаются значения $-1, -2$ и -3.

4. Найти область определения функции

$$g(x) = \frac{\sqrt{(x^2 - 10x + 21)|x - 3|}}{x^2 - 11x + 24}.$$

5. Определите, является ли функция возрастающей или убывающей

   (a) $f(x) = \sqrt{8x + 3} - \sqrt{8x - 7}$;

   (b) $g(x) = \pi^2 x - |6x - 3| - |7 + \pi x|$.

6. Найдите множество значений, промежутки возрастания и убывания функций

   (a) $p(x) = -8x + 2x^2 + 1$;

   (b) $q(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 20}$;

   (c) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$;

   (d) $g(x) = \dfrac{3x^2 + 12x + 16}{x^2 + 4x + 5}$.

7. Найдите множество значений функции
$h(x) = \dfrac{(x^4 - 8x + x^3 - 8)(x+4)}{(x-2)(x^2+5x+4)}$.

8. Решите уравнение $x^{11} + 3x - 4 = 0$.

9. Решите уравнение $\sqrt[5]{6x-7} + \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[7]{10x-9} = 0$.

10. Решите неравенство $\sqrt[7]{2x+3} - \sqrt{1-15x} > -x^3 - 4$.

11. Решите неравенство $\sqrt[3]{(-x^7 - 9x^3)\cdot 5} - \sqrt{3x+7} > 9$.

12. Решите уравнение $5\sqrt{12x+13} + 5x = |2\sqrt{12x+13} - 9| - |2x+9|$.

13. Решите уравнение
$(9x+5)(\pi + \sqrt{(9x+5)^4+4}) + (x+3)(\pi + \sqrt{(x+3)^4+4}) = 0$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \dfrac{4}{7} + \sqrt{y + x^2 - \dfrac{4}{7}}} = y, \\ \sqrt{y^2 - \dfrac{3}{7} + \sqrt{x + y^2 - \dfrac{3}{7}}} = x. \end{cases}$$

15. Решите уравнение $\sqrt{(16x^4 - 8x^2 + 2)^2 + (x^2 - x + 1)^2} = 1{,}25$.

16. Решите уравнение $\sqrt{12 - 9x^2 - 12x} + \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{21 - x^2 - 4x} - 5$.

17. Исследуйте функции на чётность

    (a) $h(x) = (x+1)|3-x| + (x-1)|x+3|$;

    (b) $u(x) = (x+2)(x+3)(x+4) + (x-2)(x-3)(x-4)$;

    (c) $v(x) = \dfrac{x^5 + x^2}{x^3+1} - \dfrac{x^5 - x^2}{x^3 - 1}$.

18. Функция $f(x)$ является чётной; известно, что:

    (a) $f(x) = x^2 - 4x$ при $x > 0$;

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ при $x \geqslant 0$.

Постройте график функции $y = f(x)$. Задайте данную функцию одной формулой. Решите уравнение $f(x) = 0$.

19. Функция $f(x)$ является нечётной; известно, что:

    (a) $f(x) = x^2 - 4x$ при $x > 0$;

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ при $x \geqslant 0$.

    Постройте график функции $y = f(x)$. Задайте данную функцию одной формулой. Решите уравнение $f(x) = 0$.

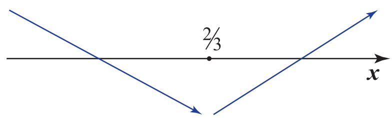
20. Постройте график функции

    (a) $y = -x^2 - |x| + 12$; (b) $y = x + \dfrac{4}{x}$.

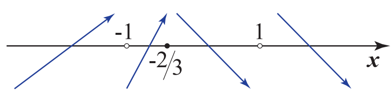
Ответы:

2. $Df = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-\infty; 2)$ и $(2; 3)$. Промежутки убывания: $(5; 6)$ и $(6; +\infty)$.

3. (a) $Df = \mathbb{R}$. Промежуток убывания: $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$. Промежуток возрастания: $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.



   (b) $Dg = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-\infty; -1)$ и $(-1; \frac{2}{3})$. Промежутки убывания: $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$ и $(1; +\infty)$. Значения 4 и 5 не достигаются; значение 6 достигается в точке $\dfrac{2}{3}$.



4. $Dg = (-\infty; 3) \cup [7; 8) \cup (8; +\infty)$.

5. (a) $f(x)$ убывает на $\left[\frac{7}{8}; +\infty\right)$;

   (b) $g(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

6. (a) $p(x)$ возрастает на $[2; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 2]$. $Ep = [-7; +\infty)$.

   (b) $q(x)$ возрастает на $[5; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 4]$. $Eq = [0; +\infty)$.

   (c) $f(x)$ возрастает на $(-\infty; -2]$; убывает на $[-2; +\infty)$. $Ef = (3; 4]$.

   (d) $g(x)$ возрастает на $(-\infty; -2]$; убывает на $[-2; +\infty)$. $Eg = (3; 4]$.

7. $Eh = (3; 12) \cup (12; +\infty)$.

8. 1.

9. 1.

10. $\left(-1; \frac{1}{15}\right]$.

11. $\left[-2\frac{1}{3}; -2\right)$.

12. -1.

13. $-0{,}8$.

14. $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

15. $\frac{1}{2}$.

16. -2.

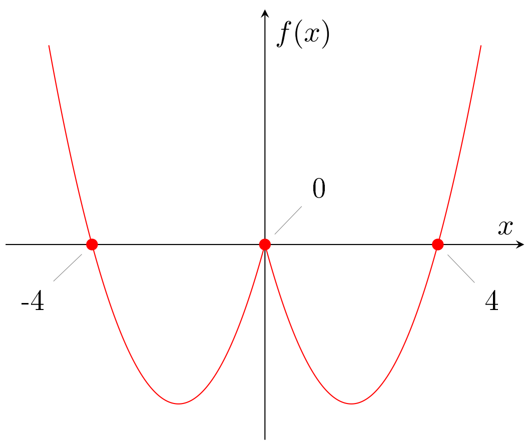
17. (a) нечётная;

    (b) нечётная;

    (c) чётная и нечётная ($x \neq \pm 1$).

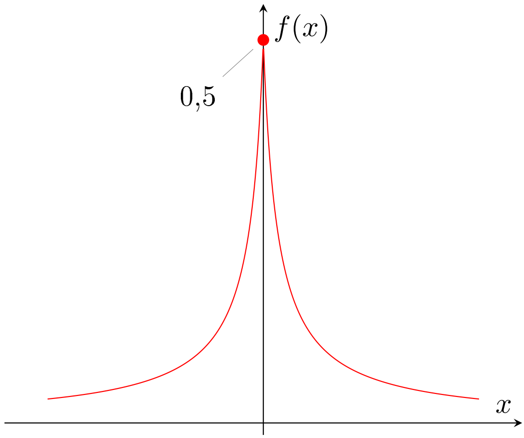
$f(x) = x^2 - 4|x|$. Корни уравнения: 0, 4, -4.

18. (a)



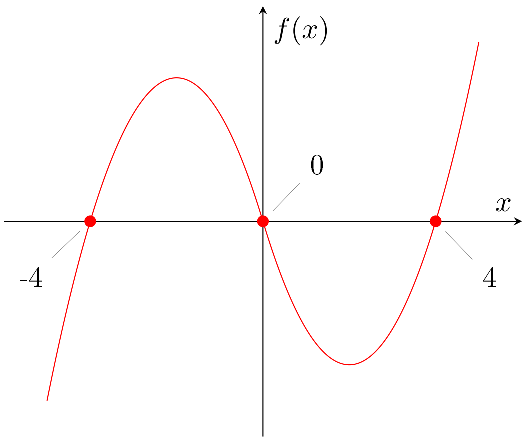
$f(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$. Уравнение не имеет корней.

(b)



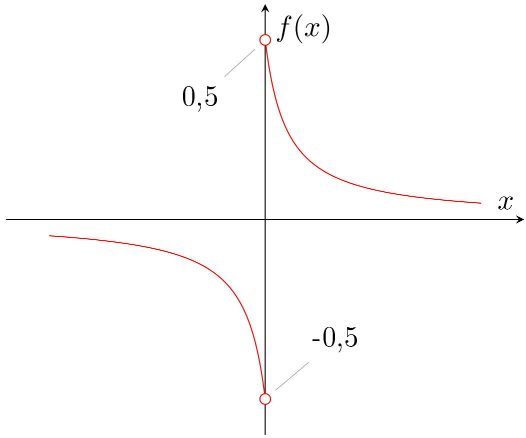
$f(x) = x|x| - 4x$. Корни уравнения: 0, 4, -4.

19. (a)



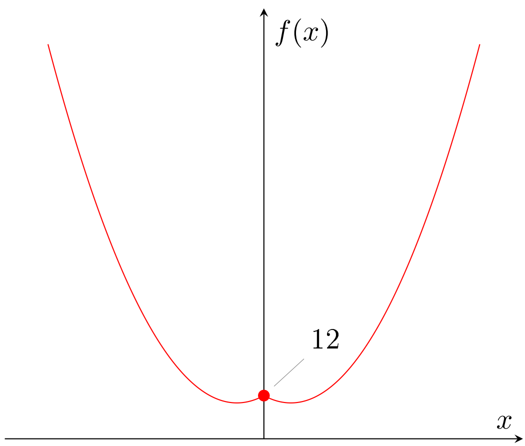
$$f(x) = \frac{1}{x + 2\,\mathrm{sign}(x)}.$$ Уравнение не имеет корней.

(b)



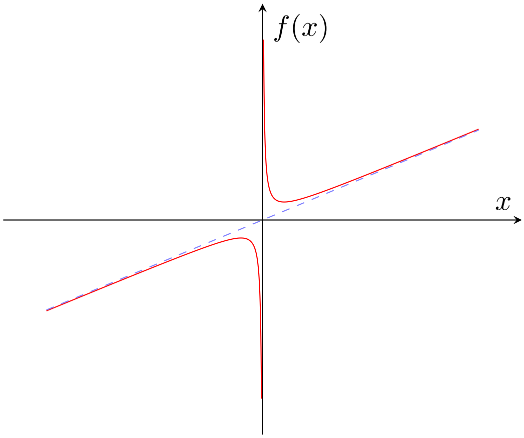
$$y = -x^2 - |x| + 12;$$

20. (a)



$$y = x + \frac{4}{x}, \text{ асимптоты: } f(x) = x, x = 0.$$

(b)



Квадратичная функция и её график.

Задачи для решения в классе

1. Разложите на множители:

   (a) $15u^2 + u - 2$;

   (b) $a^2 + 10ab + b^2$;

   (c) $-8x^2 - 10xy - 3y^2$.

2. Найдите p и q, если точка $A(1; -2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + px + q$.

3. Найдите a, b и c, если точка $M(-1; -7)$ является вершиной параболы $y = ax^2+bx+c$, пересекающей ось ординат в точке $N(0; -4)$.

4. Найдите функцию $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что график её проходит через точки $A(1; 4)$, $B(-1; 10)$, $C(2; 7)$.

5. Постройте график функции:

   (a) $y = 0.2x^2 + 2$;

   (b) $y = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 3$;

   (c) $y = (x^2 - 2)^2 - (x^2 - 1)^2$;

   (d) $y = 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$;

   (e) $y = \dfrac{x^3}{(\sqrt{x})^2} - 1$.

6. При каком значении b корнем квадратного трехчлена $f(x) = -3x^2 + bx - 2b - 12$ является число 6? При найденном значении b определите второй корень трехчлена, постройте график функции $y = f(x)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции, значения x, при которых $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $-9 \leqslant f(x) < 3$.

7. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + a$, если известно, что ее наименьшее значение равно 1.

8. При каких значениях a множество функций $y = x^2 - 2x + a$ совпадает с областью определения функции $y = \sqrt{2x - a}$?

9. Даны функции $f(x) = mx^2 - 3$ и $g(x) = 4x - 1$. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики функций при $m = -2$.

10. При каких значения параметра k вершина параболы $y = kx^2 - 7x + 4k$ лежит во второй четверти?

11. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ имеет 2 различных положительных корня.

12. Найдите, при каких значениях a один из корней многочлена $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 1)x + a^2 = 0$ больше 2, а другой меньше 2.

13. Найти все значения a, при которых неравенство
$$\frac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} \leqslant a$$
является верным при всех значениях x.

Ответы

2. $p = -2; q = -1.$

3. $a = 3, b = 6, c = -4.$

4. $y = 2x^2 - 3x + 5.$

6. $b = 30, x = 4;$

   возврастает на $(-\infty; 5]$;

   убывает на $[5; +\infty]$;

   $f(x) < 0$ при $x < 4$,$x > 6$;

   $f(x) > 0$ при $4 < x < 6$;

   $-9 \leqslant f(x) < 8$ при $3 \leqslant x \leqslant 7, x \neq 5.$

7. $a = 10.$

8. $a = 2.$

9.

10. $-1.75 < k < 0.$

11. $a > 4.$

12. $\left(\dfrac{-4-\sqrt{6}}{5}; \dfrac{-4+\sqrt{6}}{5}\right).$

13. $a \geqslant \dfrac{14}{3}.$

Задачи для решения дома

Решите уравнения:

1. Разложите на множители:
   (a) $-21v^2 + 8v + 4$;
   (b) $-15u^2 + 2uv + v^2$;
   (c) $7n^2 - 22mn + 3m^2$.

2. Найдите k и m, если точка $A(-2;-7)$ является вершиной параболы $y = kx^2 + 8x + m$.

3. Найдите a, b и c, если точка $M(1;5)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$, пересекающей ось ординат в точке $N(0;1)$.

4. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $B(-1;5)$ и имеет вершину $A(1;1)$. Найдите ординату такой точки данной параболы, абсцисса которой равна 5.

5. Постройте график функции:
   (a) $y = -3(x+1)^2 + 2$;
   (b) $y = -(x-1)^2 + 5(x-1) - 4$;
   (c) $y = (x+2)^3 - (x+1)^3$;
   (d) $y = 1 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$;
   (e) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}} - 1$.

6. При каком значении c корнем квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 12x + c$ является число 9? При найденном значении c определите второй корень трехчлена, постройте график функции $y = f(x)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции, значения x, при которых $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $-5 \leqslant f(x-1) < 7$.

7. Постройте график функции $y = -x^2 + 4x + a$, если известно, что ее наибольшее значение равно 2.

8. При каких значениях a множество значений функции $y = -x^2+4x+a$ не пересекается с областью определения функции $y = \sqrt{3x+a}$?

9. Даны функции $f(x) = mx^2 - 3$ и $g(x) = 4x - 1$. Исследуйте взаимное расположение графиков функций f и gв зависимости от параметра m.

10. При каких значениях c вершина параболы $y = x^2 + 6x + c$ находится на расстоянии, равном 5, от начала координат?

11. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(k-1)x+3k+1 = 0$ удовлетворяет неравенству $x < -1$.

12. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{6x^2 - 2x + 1}{9x^2 - 3x + 1} \leqslant a$$

является верным при всех значениях x.

Ответы

2.

3.

4. 17.

6. ...;

   возрастает на ...;

   убывает на ...;

   $f(x) < 0$ при ...;

   $f(x) > 0$ при ...;

   $-5 \leqslant f(x-1) < 7$ при ...

7. $a = -2$.

8. $a < -3$.

9.

10. $c = 5; c = 13$.

11. $k < -4, k = 5$.

12. $a \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Рациональные неравенства.

Задачи для решения в классе

Решите уравнения:

1. $x(x-1)^2 > 0.$
2. $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 < 0.$
3. $x^2 + 10x \leqslant 7x.$
4. $-x^2 - 16 + 8x \geqslant 0.$
5. $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geqslant 0.$
6. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \leqslant 0.$
7. $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0.$
8. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35} > 0.$
9. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0.$
10. $\dfrac{3x-2}{2x-3} < 3.$
11. $\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2.$
12. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}.$
13. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > 3.$
14. $\dfrac{3}{6x^2-x+2} < \dfrac{25x-47}{10x-15} - \dfrac{3}{3x+4}.$
15. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^3-x+1} \leqslant \dfrac{1-2x}{x^3+1}.$

Ответы

1. $(0;1) \cup [1;+\infty)$.
2. $(-\infty;-2) \cup (-2;-1) \cup \left(\frac{2}{3};3\right)$.
3. $[2;5]$.
4. $x = 4$.
5. $(-\infty;-6) \cup (-2;+\infty)$.
6. $x = 1; x = -1$.
7. $(-4;-3) \cup (-2;-1) \cup \left(\frac{1}{2};3\right)$.
8. $(-\infty;2) \cup (3;5) \cup (7;+\infty)$.
9. $(-8;1]$.
10. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3};+\infty\right)$.
11. $(-8;-1)$.
12. $(-3;-2) \cup (-1;1)$.
13. $\left(\frac{1-\sqrt{73}}{6};-1\right) \cup \left(1;\frac{1+\sqrt{73}}{6}\right)$.
14. $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75};\frac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty)$.
15. $(-\infty;-1) \cup (-1;2]$.

Задачи для решения дома

Решите уравнения:

1. $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$.
2. $x^3 - 64x > 0$.
3. $x^2 - 7x < 3$.
4. $x^2 + 5x + 8 > 0$.
5. $(x-1)(x^2-3x+8) < 0$.
6. $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x} > 0$.
7. $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3) \leqslant 0$.
8. $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2} < 0$.
9. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1} < 0$.
10. $\dfrac{7x-4}{x+2} \geqslant 1$.
11. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$.
12. $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{2}$.
13. $\dfrac{1}{3x-2-x^2} > \dfrac{3}{7x-4-3x^2}$.
14. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} \geqslant \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.
15. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)} - \dfrac{11(6-x)}{3(x-4)} \geqslant \dfrac{5(6-x)}{x-2}$.

Ответы

1. $\Big(-\infty; -\dfrac{1}{3}\Big) \cup \Big(\dfrac{3}{2}; 2\Big)$.
2. $(-8; 0) \cup (8; +\infty)$.
3. $\Big(\dfrac{7-\sqrt{61}}{2}; \dfrac{7+\sqrt{61}}{2}\Big)$.
4. x - любое.
5. $(-\infty; 1)$.
6. $\Big(-\infty; \dfrac{2}{3}\Big) \cup \Big(1; \dfrac{5}{2}\Big)$.
7. $\big(-\infty; -3\big) \cup \big(2-\sqrt{6}; 3\big) \cup \big(2+\sqrt{6}; +\infty\big)$.
8. $\Big(-2; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big) \cup \Big(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; 2\Big)$.
9. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.
10. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
11. $(-\infty; 2] \cup (2; +\infty)$.
12. $\Big(-\infty; 1\Big) \cup \Big(\dfrac{4}{3}; 2\Big)$.
13. $(-\infty; -7] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
14. $(-\infty; 2) \cup [3.5; 4) \cup [7; +\infty)$.

Уравнения с модулем

Задачи для решения в классе

Решите уравнения:

1. (a) $|x| = 3$;

   (b) $|x| = -2$;

   (c) $|x + 1| = 0$.

2. $|x - 2| = 5$.

3. $|x| + x^3 = 0$.

4. $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x+2}{5}$.

5. $|x - 7| = |x + 9|$.

6. $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$.

7. $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$.

8. $x^2 + 3|x| + 2 = 0$.

9. $(x + 1)^2 - 2|x + 1| + 1 = 0$.

10. $|x| + |x + 1| = 1$.

11. $|x - 1| - |x - 2| = 1$.

12. $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

13. $|2x + 1| - |3 - x| = |x - 4|$.

14. $|x| - 2|x + 1| + 3|2x - 4| = 1$.

15. $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5$.

16. $|x - x^2 - 1| = |2x - 3 - x^2|$.

17. $\Big||3 - 2x| - 1\Big| = 2|x|$.

18. $\Big|2|x - 1| + 3x - 4\Big| = x - 2$.

19. $\Big| - 2x - |3x + 4| + 5\Big| = 1 - 5x$.

20. $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$.

21. $\dfrac{|x^2 - 3x + 2| + x}{|x^2 - x| + 1} = 1$.

Ответы

1. (a) $x = \pm 3$;
   (b) нет корней;
   (c) $x = 0$.
2. $x = 7; x = -3$.
3. $x = 0; x = -1$.
4. $x = \dfrac{4}{13}$.
5. $x = 1$.
6. $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; x = 1$.
7. $x = \dfrac{-5+\sqrt{113}}{4}$.
8. нет корней.
9. $x = -2; x = 0$.
10. $x \in [-1; 0]$.
11. $x \in [2; +\infty]$.
12. $x = 1; x = \dfrac{11}{2}$.
13. $x = \dfrac{3}{2}$.
14. $x = \dfrac{9}{7}; x = 3$.
15. $x = -3; x = 2; x = \dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$.
16. $x = 2$.
17. $x = \dfrac{1}{2}$.
18. нет корней.
19. $x \in \left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{5}\right]$.
20. $x = -\dfrac{2}{3}; x = \dfrac{1}{2}; x = 2$.
21. $x = \dfrac{1}{2}; x = 1; x = \dfrac{3}{2}$.

Задачи для решения дома

Решите уравнения:

1. (a) $|x| = 7$;
   (b) $|x| = -1$.
2. $|x+3| = 1$.
3. $|x| - 2x^3 = 0$.
4. $\dfrac{7x+4}{5} - x = \dfrac{3x-5}{2}$.
5. $|x+3| = |2x-1|$.
6. $|x^2 - x - 3| = -x - 1$.
7. $2|x^2 - x| = x^2 + 1$.
8. $2x^2 - |x| - 15 = 0$.
9. $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$.
10. $|x+1| + |x+2| = 2$.
11. $|x-2| + |4-x| = 3$.
12. $|x+1| - |x-2| + |3x+6| = 5$.
13. $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$.
14. $|x| + 2|x+1| + 3|x-3| = 0$.
15. $|x^2 - 1| + |x+1| = 0$.
16. $|x^2 + 2x| - |2-x| = |x^2 - x|$.
17. $\Big||x+4| - 2x\Big| = 3x - 1$.
18. $\Big|3x - |2x-5|\Big| = x + 5$.
19. $\Big| - 5x - 3|2x-3| + 2\Big| = 11 + x$.
20. $\dfrac{|x^2 - x| + 1}{|x+1| - x^2} = 1$.
21. $\dfrac{|x^2 + 4x + 3| - x}{2 - |2x + x^2|} = 1$.

Ответы

1. (a) $x = \pm 7$;
   (b) нет корней.
2. $x = -2; x = -4$.
3. $x = 0; x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $x = \dfrac{17}{19}; x = 3$.
5. $x = -\dfrac{2}{3}; x = 4$.
6. $x = -\sqrt{2}; x = 1 - \sqrt{5}$.
7. $x = 1 + \sqrt{2}; x = 1 - \sqrt{2}$.
8. $x = \pm 3$.
9. $x = -3; x = -2; x = 0; x = 1$.
10. $x = -\dfrac{1}{2}; x = -\dfrac{5}{2}$.
11. $x = \dfrac{3}{2}; x = \dfrac{9}{2}$.
12. $x = -\dfrac{14}{3}; x = 0$.
13. $x = \dfrac{2}{5}; x = 2$.
14. $x = \dfrac{7}{6}$.
15. $x = -1$.
16. $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
17. $x = \dfrac{5}{4}$.
18. $x = 0; x \in [\dfrac{5}{2}; +\infty]$.
19. $x = \dfrac{11}{5}; x = -2$.
20. $x \in [0; 1]$.
21. $x = -1$.

Неравенства с модулем

Задачи для решения в классе

Решите уравнения:

1. $|x+5| > 11.$
2. $|3x-1| \geqslant 5.$
3. $|2x-1| < |4x+1|.$
4. $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|.$
5. $|1-2x| > 3-x.$
6. $|4-3x| \geqslant 2-x.$
7. $|5x^2-2x+1| < 1.$
8. $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 3.$
9. $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| \leqslant 3.$
10. $x^2+2|x|-3 \leqslant 0.$
11. $|x^2-3x-15| < 2x^2-x.$
12. $|2x^2+x+11| \geqslant x^2-5x+6.$
13. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0.$
14. $|x|+|x-1| < 5.$
15. $|3x-1|+|2x-3|-|x+5| < 2.$
16. $\dfrac{|x+1|}{|x-2|-2} < 1.$
17. $\Big||2x+1|-5\Big| > 2.$
18. $\Big|2x-|3-x|-2\Big| \leqslant 4.$

Ответы

1. $(-\infty;-16] \cup [6;+\infty).$
2. $\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right] \cup \Big[2;+\infty\Big).$
3. $(-\infty;-1) \cup (0;+\infty).$
4. $(-\infty;-5] \cup (-1;1) \cup [1;+\infty).$
5. $\Big(-\infty;-2\Big) \cup \left(\dfrac{4}{3};+\infty\right).$
6. $\Big(-\infty;1\Big] \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right).$
7. $(0;0;4).$
8. $(-\infty;1) \cup (2;+\infty).$
9. $(-\infty;-2] \cup [-1;+\infty).$
10. $[-1;1].$
11. $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right) \cup \Big(3;+\infty\Big).$
12. $(-\infty;-5) \cup (-1;+\infty).$

13. $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$.

14. $(-2;3)$.

15. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{4}\right)$.

16. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;4\right)$.

17. $(-\infty;-4)\cup(-2;1)\cup(3;+\infty)$.

18. $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

Задачи для решения дома

Решите уравнения:

1. $|2x-5|<3$.
2. $|2x-4|\leqslant 1$.
3. $|1-3x|\geqslant|2x+3|$.
4. $\left|\dfrac{3}{2x-7}\right|<\left|\dfrac{-6}{x+4}\right|$.
5. $|x+8|<3x-1$.
6. $|2x-3|\geqslant x+4$.
7. $|6x^2-2x+1|\leqslant 1$.
8. $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right|\geqslant 2$.
9. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\geqslant 1$.
10. $x^2+5|x|-24>0$.
11. $|x^2+x+10|\leqslant 3x^2+7x+2$.
12. $|4x^2-9x+16|>-x^2+x-3$.
13. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.
14. $|x+1|+|x-2|>5$.
15. $|x-1|+|2-x|>3+x$.
16. $\dfrac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|}\leqslant 1$.
17. $\Big||x-3|+1\Big|\geqslant 2$.
18. $\Big|2x-|3+x|+1\Big|>2$.

Ответы

1. $(1;4)$.
2. $(1{,}5;2{,}5)$.
3. $(-\infty;-0{,}4)\cup(4;+\infty)$.
4. $(-\infty;-4)\cup(-4;2)\cup(6;+\infty)$.
5. $[4{,}5;+\infty)$.
6. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(7;+\infty\right)$.
7. $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

8. $\Big[\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2};-1\Big)\cup\Big(-1;1\Big)\cup\Big(1;\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}\Big)$.

9. $(-\infty;-2)\cup(-2;0]\cup[1{,}6;2)\cup(2;2{,}5]$.

10. $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

11. $(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)$.

12. $(-\infty;+\infty)$.

13. $(-\infty;-3)$.

14. $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

15. $\Big(-\infty;-2\Big)\cup\Big[\dfrac{5}{3};+\infty\Big)$.

16. $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

17. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Метод математической индукции.

Задачи для решения в классе

1. Методом математической индукции докажите формулу для суммы арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Указание.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $a_{k+1} = a_k + d$, где число d называется разностью арифметической прогрессии.

2. Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выражение $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ является квадратом некоторого натурального числа.

3. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

4. Вычислите $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2020^2 + 2021^2$.

5. Вычислите $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{2020 \cdot 2021}$.

6. Докажите методом математической индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$

(a) $4^n - 1 \,\vdots\, 3$; (b) $n^5 + 9n \,\vdots\, 5$; (c) $21^n + 4^{n+2} \,\vdots\, 17$.

7. Докажите двумя способами неравенство Бернулли:

$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, если $x \geqslant -1$ и $n \in \mathbb{N}$.

8. Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

9. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

10. Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно:
$b_1 = 6, b_{n+1} = 2b_n - 3n + 2$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

11. n прямых попарно пересекаются, никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Найдите количество множеств на которые делят эти прямые плоскость.

12. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, больше пяти.

13. В компании из $2n + 1$ человек для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

Ответы.

4. $\dfrac{2021(2021+1)(2\cdot 2021+1)}{6} = 2753594311.$

5. $\dfrac{2020}{2021}.$

9. $a_n = 2^{n-1} - 1.$

10. $b_n = 2^n + 3n + 1.$

11. $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1.$

Указания.

4. Используйте идею, что $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ – это многочлен $k+1$ степени от переменной n, то есть $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ можно искать в виде многочлена $An^3 + Bn^2 + Cn + D$.

   Или можно использовать следующий факт:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=2^3-1^3+3^3-2^3+4^3-3^3+\ldots+(n+1)^3-n^3=$$
$$=(n+1)^3-1.$$

С другой стороны

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{(n+1)n}{2}+n.$$

5. Используйте идею, что $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

7. Докажите неравенство, используя математическую индукцию или формулу Бинома Ньютона.

8. Используйте идею, что $\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}$ для $n\in\mathbb{N}$.

12. В качестве база индукции докажите, что квадрат можно разрезать на $6, 7$ и 8 квадратов.

13. Докажите вспомогательный факт, что в этой компании есть $(n+1)$ попарно знакомых людей.

Задачи для решения дома

1. Методом математической индукции докажите формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_2 + \ldots b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Указание.
Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $b_{k+1} = b_k \cdot q$, где число $q \neq 1$ называется знаменателем геометрической прогрессии.

2. *Числа Фибоначчи* – элементы числовой последовательности, в которой первые два числа равны 1 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Докажите методом математической индукции, что n-й член последовательности задается формулой

$$F_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

3. Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$

   (a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

   (b) $\dfrac{1}{2} \cdot 2! + \dfrac{2}{2^2} \cdot 3! + \dfrac{3}{2^3} \cdot 4! + \ldots + \dfrac{n}{2^n} \cdot (n+1)! = \dfrac{(n+2)!}{2^n} - 2.$

4. Вычислите $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{2021 \cdot 2023}.$

5. Вычислите $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}.$

6. Докажите методом математической индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$

   (a) $n^3 + 17n \,\vdots\, 6;$

   (b) $5^n - 3^n + 10n \,\vdots\, 4.$

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + \frac{2}{3^n})$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

8. Последовательность $\{b_n\}$ задана рекуррентно: $b_1 = 7, b_2 = 27, b_{n+2} = 6b_{n+1} - 5b_n$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

9. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

10. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части (в том числе неограниченные), на которые плоскость разбивается этими прямыми, можно раскрасить в два центра так, чтобы части одного цвета не имели общей границы.

11. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой город.

Ответы.

4. $\frac{1011}{2023}$.

5. $\frac{\sqrt{2023} - 1}{2}$.

7. $a_n = \frac{2n+1}{3^n}$.

8. $b_n = 5^n + 2$.

Многочлены. Уравнения высших степеней.

Задачи для решения в классе

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\dfrac{4}{7}$ и $\dfrac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

2. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - 4x - 1 = 0$. Используя теорему Виета, найти:

   (a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$;

   (b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

3. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 - 7x - 13 = 0$, а y_1, y_2 – корни уравнения $y^2 + ay + b = 0$. Найти a и b, если $y_1 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$, а $y_2 = \dfrac{2}{x_1 + x_2}$.

4. Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $x - 1$?

5. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2018} + x + 2$ на $x^2 - 1$.

6. Используя теорему о рациональном корне многочлена, докажите, что $\sqrt{13}$ — иррациональное число.

7. $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство $p(a) - p(b) = 1$. Докажите, что a и b различаются на 1.

8. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

9. Разделите многочлен $F(x)$ с остатком на многочлен $G(x)$. Запишите равенство $F(x) = G(x)q(x) + r(x)$, где $q(x)$ – частное, $r(x)$ – остаток от деления. Убедитесь в справедливости данного равенства, раскрывая скобки в правой части.

(a) $F(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 3$, $G(x) = x + 4$;

(b) $F(x) = 3x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 2x + 8$, $G(x) = 3x^2 - x + 4$.

10. Решите уравнение $x^6 = 7x^3 + 8$.

11. Решите уравнение $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - x - 2 = 0$.

12. Решите уравнение:

    (a) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$;

    (b) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$.

13. Решите уравнение:

    (a) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$;

    (b) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = 0$;

    (c) $x^3 + 6x^2 - 12x - 8 = 0$;

    (d) $x^3 + 7x^2 + 21x + 27 = 0$.

14. Решите уравнение:

    (a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;

    (b) $x^3 - 13x - 12 = 0$;

    (c) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$;

    (d) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;

    (e) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

    (f) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

15. Решите уравнение:

    (a) $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$;

    (b) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

16. Решите уравнение $(5 - x)^4 + (x - 2)^4 = 17$.

17. Решите уравнение $\dfrac{1}{x^2 - 2x} - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{1}{12}$.

18. Решите уравнение $x^4 + 10x^3 + 24x^2 - 6x - 9 = 0$.

19. Решите уравнение:

   (a) $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$;

   (b) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

20. Решите уравнение $\dfrac{x^3+9x^2+18x-2(x^2+9x)-36}{\sqrt{x+3}}=0$.

21. Найдите значение выражения $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-7x^2+7x=1$.

22. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $\big(g(x)\big)^2+f(x)$, если наименьшее значение функции $\big(f(x)\big)^2+g(x)$ равно -6.

23. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

24. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=\big(f(x)\big)^2$ касается графика функции $y=20g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=\big(g(x)\big)^2$ касается графика функции $y=\dfrac{f(x)}{A}$.

25. Уравнение $x^2+ax+6=0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом
$$x_1-\frac{72}{25x_2^3}=x_2-\frac{72}{25x_1^3}.$$
Найдите все возможные значения a.

26. Найти все значения параметра a, при которых:

(a) уравнение $\dfrac{1}{x^4} - (a+7)\cdot\dfrac{1}{x^2} + 9a - 18 = 0$ имеет ровно два корня;

(b) уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + (a-3) = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

Ответы:

1. $2{,}1x^2 - 2{,}3x - 2$.

2. (a) -4.
   (b) $\dfrac{16}{9}$.

3. $a = -\dfrac{3}{91}$; $b = -\dfrac{4}{13}$.

4. 6.

5. $x + 3$.

8. $n = 2$.

9. (a) $q(x) = x^2 - x - 3$; $r(x) = 9$.
   (b) $q(x) = x^3 + 2x^2 - \dfrac{8}{3}$; $r(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{56}{3}$.

10. -1; 2.

11. -1.

12. (a) $-\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{21}$.
    (b) ± 1; -2; $\dfrac{1}{2}$.

13. (a) -3; $\pm\sqrt{5}$.
    (b) 2; $\sqrt[3]{3}$.
    (c) 2; $-4 \pm 2\sqrt{3}$.
    (d) -3.

14. (a) 1; 2; 3.
    (b) -1; -3; 4.
    (c) 1.
    (d) -1; 2.
    (e) 1; -2.
    (f) -1; 2; 3.

15. (a) $\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{5}{3}$;
    (b) $\dfrac{1}{2}$.

16. 3; 4.

17. -1; 3.

18. $-2 \pm \sqrt{7}$; $-3 \pm \sqrt{6}$.

19. (a) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.
    (b) $\dfrac{7}{2}$; $\dfrac{1}{2}$.

20. 2.

21. 34.
22. $\dfrac{11}{2}$.
23. Увеличится на $\dfrac{9}{2}$.
24. $A = -\dfrac{1}{20}$.
25. $a = \pm 9$.
26. (a) $(-\infty; 2] \cup \{11\}$.
    (b) $a \in (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Указания.

6. Рассмотреть уравнение $x^2 - 13 = 0$.
7. Воспользоваться целочисленной теоремой Безу.
13. Воспользоваться методом группировки.
14. Подобрать корень уравнения, перебрав делители свободного члена.
15. Сделать замену переменной так, чтобы коэффициент перед старшей степенью стал равен 1.
20. Знаменатель накладывает ограничение $x + 3 > 0$.

Задачи для решения дома

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $\frac{5}{2}$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - 4x - 1 = 0$. Используя теорему Виета, найти:

   (a) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;

   (b) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$.

3. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$, а y_1, y_2 – корни уравнения $y^2 + ay + b = 0$. Найти a и b, если $y_1 = \dfrac{x_1 + 1}{x_2}$, а $y_2 = \dfrac{x_2 + 1}{x_1}$.

4. При каком значении a многочлен $x^{100500} + ax^{77} + 7$ делится на $x + 1$?

5. Некоторый многочлен даёт остаток 2 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток даёт этот многочлен при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

6. Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой — 0. Он нашёл корень $\frac{1}{7}$. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ неверен. Обоснуйте ответ Знайки.

7. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2015) - Q(2015)$ кратна 1007.

8. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2013$, $P(2013) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

9. Найдите целую часть и остаток от деления:

(a) многочлена $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 1$ на многочлен $G(x) = 3x + 1$;

(b) многочлена $F(x) = 18x^5 + 27x^4 - 37x^3 - 14x + 20$ на многочлен $G(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

10. Решите уравнение $x^6 + 27 = 28x^3$.

11. Решите уравнение $\dfrac{8x^3 + 1}{2x + 1} = 2 - 2x$.

12. Решите уравнение:

(a) $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

(b) $x^4 + 12x^3 + 24x^2 - 72x + 36 = 0$.

13. Решите уравнение:

(a) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$;

(b) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$;

(c) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$;

(d) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0$.

14. Решите уравнение:

(a) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$;

(b) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$;

(c) $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$;

(d) $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$;

(e) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$;

(f) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.

15. Решите уравнение:

(a) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$;

(b) $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

16. Решите уравнение $(x + 4)^4 + (x + 3)^4 = 97$.

17. Решите уравнение $\dfrac{21}{x^2-4x+10} = 6 + x^2 - 4x.$

18. Решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 14x - 49 = 0.$

19. Решите уравнение:

    (a) $\dfrac{2x}{3x^2-x+2} - \dfrac{7x}{3x^2+5x+2} = 1;$

    (b) $\dfrac{6x}{15x^2-16x+4} = \dfrac{15x^2-20x+4}{15x^2-12x+4}.$

20. Решите уравнение: $\dfrac{x^3+7x^2+10x-3(x^2+7x)-30}{\sqrt{x+2}} = 0.$

21. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0.$

22. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.

23. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

24. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

25. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом
$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$
Найдите все возможные значения a.

26. Найти все значения параметра a, при которых:

    (a) уравнение $x^8 - (a+8)x^4 + 16a - 128 = 0$ имеет ровно два корня;

    (b) уравнение $(1-a)x^2 + 2(a-3)x + (4-a) = 0$ имеет два различных положительных корня.

Ответы:

1. $\dfrac{3}{5}$.

2. (a) $-\dfrac{4}{9}$;

   (b) $\dfrac{64}{27}$.

3. $a = -10$; $b = 7$.

4. $a = 8$.

5. $3 - x$.

8. $k = 1007$.

9. (a) целая часть равна $\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{11}{9}x - \dfrac{88}{27}$; остаток равен $\dfrac{115}{27}$;

   (b) целая часть равна $9x^3 + 4x - 6$; остаток равен $24x - 10$.

10. 1; 3.

11. $\dfrac{1}{2}$.

12. (a) $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$; $\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{1}{4}\sqrt{17}$.

    (b) $-3 \pm \sqrt{15}$.

13. (a) -2; $-\dfrac{3}{2}$;

    (b) $-\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{2}$;

    (c) $\dfrac{1}{2}$;

    (d) $\dfrac{1}{3}$.

14. (a) -2; 3; -4;

    (b) 2; -3; 5;

    (c) 3;

    (d) -3; $-1 \pm \sqrt{2}$;

    (e) 1; ± 2; -4;

    (f) -1; 3.

15. (a) $-\dfrac{1}{2}$.

    (b) $\pm\dfrac{1}{2}$; $2 \pm \sqrt{3}$.

16. -1; -6.

17. 1; 3.

18. $\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{37}$.

19. (a) $\dfrac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$.

(b) $\dfrac{14 \pm 2\sqrt{34}}{15}$.

20. 3.

21. -5.

22. -7.

23. $\dfrac{41}{4}$.

24. $A = 0$ или $A = -11$.

25. $a = 10$.

26. (a) $a < 8$; $a = 24$.
    (b) $a \in (-\infty; 1) \cup (4; 5)$.

Указания.

6. Воспользоваться теоремой о рациональном корне многочлена.

7. Воспользоваться целочисленной теоремой Безу.

13. Воспользоваться методом группировки.

14. Подобрать корень уравнения, перебрав делители свободного члена.

15. Сделать замену переменной так, чтобы коэффициент перед старшей степенью стал равен 1.

20. Знаменатель накладывает ограничение $x + 2 > 0$.

Системы рациональных уравнений с двумя переменными.

Задачи для решения в классе

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+y=-8, \\ x^2+y^2+6x+2y=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2-3y=23, \\ 3y^2-8x=59. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3y-xy=4, \\ 3x+y+3xy=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3xy+3x^2-3y^2-2x-y=-7, \\ x^2+xy-y^2+x-2y=-4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2, \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x^2+xy-2y^2=0, \\ 3x^2-xy-2y^2=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

Ответы

1. $(-4; 4), (-6; -2)$.

2. $(2; 5), (-4; 3)$.

3. $(-1; -3), (\frac{13}{9}; -\frac{1}{4})$.

4. $(1; 2)$.

5. $(1; 0)$.

6. $(t; -\frac{3}{2}t), t \in \mathbb{R}$.

7. $(1; 2), (-1; -2)$,
   $(2; 1), (-2; -1)$.

8. $(0; 0)$,
   $(\sqrt{7}; \sqrt{7}), (-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$,
   $(\sqrt{19}; -\sqrt{19}), (-\sqrt{19}, \sqrt{19})$,
   $(2; 3), (-2; -3)$,
   $(3; 2), (-3; -2)$.

9. $(6; 6)$,
   $(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2})$,
   $(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2})$.

Задачи для решения дома

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x^2 - y^2 + x + y = -11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 2y = -5, \\ 3y^2 + 2x^2 = 29. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x^2 + 14y = 19, \\ 10x + 7y^2 = 17. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 56x^2 - xy - y^2 = 0, \\ 14x^2 + 19xy - 3y^2 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2, \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y). \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$

Ответы.

1. $(-1;-3),(1.5;8)$.

2. $(1;-3),(-1;-3)$.

3. $(1;1)$, $\left(\dfrac{-5+\sqrt{140}}{5};\dfrac{-7+\sqrt{140}}{7}\right)$, $\left(\dfrac{-5-\sqrt{140}}{5};\dfrac{-7-\sqrt{140}}{7}\right)$

4. $(1;2),\left(-\dfrac{239}{146};\dfrac{117}{146}\right)$.

5. $(3\sqrt{2};\sqrt{2}),(-3\sqrt{2};-\sqrt{2})$,
   $(3\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-3\sqrt{2},\sqrt{2})$.

6. $\varnothing$

7. $(2;3),(-2;-3)$,
   $(3;2),(-3;-2)$.

8. $(3;2),(-2;-3),\ (0;0)$

9. $(1;4),(4;1)$,
   $\left(\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2};\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

Сравнения по модулю

Задачи для решения в классе:

1. Найдите остаток от деления числа a на m, если:

   (a) $a = 14^{258}, m = 17$;

   (b) $a = \left(124 + 25^{25}\right)^{31}, m = 8$.

   (c) $a = 2^{2002} + 13^{2002}, m = 10$ или 11.

2. Найдите последнюю цифру числа 1812^{1945}.

3. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222} \mathrel{\vdots} 7$.

4. Докажите, что

   (a) $7^n - 1 \mathrel{\vdots} 6$;

   (b) $7^{n+2} + 8^{2n+1} \mathrel{\vdots} 57$.

5. Докажите, что натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда
   k$a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$ делится на 11.

6. Пусть натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 1000A + B$, где $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_5 a_4 a_3}, B = \overline{a_2 a_1 a_0}$. Докажите, что a делится на 7 (или на 11, или на 13) тогда и только тогда, когда $A \equiv_7 B$ (или $A \equiv_{11} B$, или $A \equiv_{13} B$).

7. Докажите, что числа следующего вида не могут быть квадратами целых чисел:

   (a) $12n + 8$, где $n \in \mathbb{Z}$;

   (b) $7n + 5$, где $n \in \mathbb{Z}$.

8. Докажите, что квадрат простого числа, большего 3, дает остаток 1 при делении на 24.

9. Докажите, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$ не может оканчиваться ни одной из цифр $2, 4, 7, 9$.

10. Докажите, что число $n^7 - n$ делится на 42 при любом $n \in \mathbb{Z}$.

11. Найдите все простые числа p такие, что следующие числа также являются простыми:

    (a) $p+10$ и $p+14$; (b) $4p^2+1$ и $6p^2+1$.

12. Докажите, что числа 2^n-1 и 2^n+1, где n – натуральное число, большее 2, не могут быть одновременно простыми числами.

13. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

14. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2+z^2=4xyz$.

15. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2 делится на 3. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a, b делится на 3?

16. Пусть x, y – натуральные числа. Известно, что произведение $xy^2=2^3\cdot 3^9\cdot 7\cdot 11^2$. На какую степень тройки может делиться x^2+y^2?

17. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты и лежащих на параболе $y=-\dfrac{x^2}{4}+11x+23$.

18. Решите уравнение $x^2+x+3=5y$ в целых числах.

19. Докажите, что уравнение $x^3+x+10y=201201984$ не имеет решение в натуральных числах.

20. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению $2^x+1=y^2$.

Ответы:

1. (a) 9;
   (b) 5;
   (c) 3 и 8.
2. 2.
11. (a) 3; (b) 5.
13. $14 \cdot 14 + \frac{7 \cdot 6}{2} - 1 = 216$.
14. $(0; 0; 0)$.
15. $a^2 + b^2 \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow a, b \,\vdots\, 3$.
16. 6.
17. 22.
18. $x = 5n + 1, y = 5n^2 + 3n + 1$ или $x = 5n + 3, y = 5n^2 + 7n + 3, n \in \mathbb{Z}$.
20. $(3; \pm 3)$.

Указания:

11. (a) Рассмотрите остатки при делении на 3 данных чисел;
    (b) Рассмотрите остатки при делении на 5 данных чисел.
12. 2^n не делится на 3, следовательно, либо $2^n \equiv_3 1$, либо $2^n \equiv_3 2$. В первом случае $2^n - 1 \equiv_3 0$, во втором $2^n + 1 \equiv_3 0$.
13. Используйте идею, что $723507235072350723507235072350723 50 \equiv_3$

    $\equiv_3 120201202012020120201202012020$.
14. Используйте идею, что квадрат любого целого числа при делении на 4 дает остаток 0 или 1 при делении на 4. Поэтому
    $x^2 + y^2 + z^2 \,\vdots\, 4 \Leftrightarrow x, y, z \,\vdots\, 2$.
16. Используйте результат предыдущей задачи.
20. Запишите в уравнение в виде $2^x = (y - 1)(y + 1)$.

Задачи для решения дома:

1. Найдите остаток от деления числа a на m, если:

   (a) $a = 6^{592}$,$m = 11$;

   (b) $a = 2^{2021}$,$m = 33$;

   (c) $a = 3^{333}, m = 5$.

2. Найдите последнюю цифру числа 2022^{2021}.

3. Найдите остаток от деления $(75 \cdot 56)^{28} + (58 \cdot 34)^{31}$ на 19.

4. Докажите, что

   (a) $2^{4n} - 1 \,\vdots\, 15$;

   (b) $13^n + 3^{n+2} \,\vdots\, 10$;

   (c) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \,\vdots\, 19$;

   (d) $10^{70} - 19^2 \,\vdots\, 27$.

5. Докажите, что натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ делится на 9.

6. Докажите, что a не может быть четвертой степенью натурального числа, если $a - 5$ делится на 9.

7. Найдите наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на $2, 3, 4, 5, 6$ остаток, равный 1.

8. Докажите, что квадрат простого числа, большего 5, при делении на 30 дает в остатке 1 или 19.

9. Докажите, что ни при каком натуральном n число $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$ не может оканчиваться ни одной из цифр 2, 3,6,7,8,9.

10. Докажите, что число $n^5 - n$ делится на 30 при любом $n \in \mathbb{Z}$.

11. Найдите все простые числа p такие, что следующие числа также являются простыми:

(a) $p+4$ и $p+14$; (b) $8p^2+1$.

12. Докажите, что если p и $8p-1$ – простые числа, то $8p+1$ – составное число.

13. Найдите все тройки простых чисел p, q и r, для которых числа $|p-q|, |q-r|, |r-p|$ также простые.

14. Пусть x, y, z – натуральные числа. Известно, что произведение $xy^2z^3 = 1089994752$. На какую максимальную степень двойки может делиться $x^2+y^2+z^2$?

15. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты и лежащих на параболе $y = -\dfrac{x^2}{3} + 13x + 42$.

16. Решите уравнение $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2 = 10y$ в целых числах.

17. Докажите, что уравнение $x^2+y^2 = 1971$ не имеет решение в целых числах.

18. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению $3^y + 8 = x^2$.

Ответы:

1. (a) 3; (b) 2; (c) 2.
2. 2.
3. 10.
7. 61.
11. (a) 3; (b) 3.
13. $(2, 5, 7)$.
14. 7.
15. 13.
16. $x = 5n + 1, y = 10n^2 + 10n + 3$, где $n \in \mathbb{Z}$.
18. $(\pm 3; 0)$.

Указания:

9. Используйте идею, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

11-12. Рассмотрите остатки при делении на 3 данных чисел.

17. Рассмотрите остатки при делении на 3 чисел x и y.

18. Рассмотрите остатки от деления на 3 левой и правой частей уравнения.

Рациональные уравнения в целых числах.

Задачи для решения в классе.

1. Найдите все целые решения уравнений:

   (a) $5x + 9y = 2$; (b) $6x + 9y = 2$; (c) $7x + 17y = 5$.

2. Пусть A - множество целых чисел, имеющих при делении на 3 остаток 2 а B - множество целых чисел, имеющих при делении на 8 остаток 6. Найдите все числа, которые входят одновременно в оба множества.

3. Пусть x и y – такие натуральные числа, что число $7x+5y$ делится на 13. Докажите, что число $41x + 46y$ также делится на 13.

4. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $456789 \to 945678$), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[891870; 891899]$ могли получиться в результате сложения?

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}$?

6. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

7. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнениям:

   (a) $2xy - 6x^2 = 9x - 3y + 6$;
   (b) $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$;
   (c) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$;
   (d) $x^2 - y^2 + 2y = 8$;
   (e) $x^2 - xy + 3y^2 = 5$;
   (f) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 9$;
   (g) $x^3 - y^3 = 19$;
   (h) $6x^2y - 3x^2 - 5xy - 2x + y + 1 = 0$;
   (i) $11x - xy - 2xy^2 + 2y - 1 = 0$.

8. Найдите все тройки натуральных чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющих уравнению
$$xyz + xy + yz + xz + x + y + z = 164.$$
В ответ укажите xyz.

9. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих системе уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

10. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих системе неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 12x - 18y - 103, \\ x^2 + 10y + y^2 < 26x - 172. \end{cases}$$

11. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих условиям:
$$3y - x < 5,\ x + y > 26,\ 3x - 2y < 46.$$

12. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

13. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 - 5y^2 = z^2$.

14. Докажите, что уравнения не имеют решений в целых числах:

    (a) $3x^2 - 4y^2 = 13$; (b) $2x^2 - 5y^2 = 7$.

15. Найдите все четвёрки натуральных чисел $(a;b;c;d)$, удовлетворяющих системе уравнений:
$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

16. Найдите все натуральные числа m и n, для которых выполняется равенство $m! + 12 = n^2$.

Ответы:

1. (a) $x = 9n + 4, y = -5n - 2, n \in \mathbb{Z}$;
   (b) $\varnothing$;
   (c) $x = 17n + 8, y = -7n - 3, n \in \mathbb{Z}$.
2. $24n + 14, n \in \mathbb{Z}$.
4. $891880, 891891$.
5. 126.
6. 4000.
7. (a) $(-3; -11), (-2; -12), (-1; 3), (0; 2)$;
   (b) $(-6; -7), (-4; 3), (4; -5)$;
   (c) $(\pm 10; 0), (-18; -4), (-17; -3), (-15; -5), (-6; -4),$
   $(-1; -3), (1; 3), (6; 4), (15; 5), (17; 3), (18; 4)$;
   (d) $(\pm 4; -2), (\pm 4; 4)$;
   (e) $(-2; -1), (-1; 1), (1; -1), (2; 1)$;
   (f) $(\pm 3; 0), (-3; -3), (3; 3)$;
   (g) $(-2; -3), (3; 2)$;
   (h) $(-1; 0), (0; -1), (1; 2), (2; 1)$;
   (i) $(-3; 2), (1; -2)$.
8. 80.
9. $(2; 0), (2; 2)$.
10. $(9; -7)$.
11. $(20; 8)$.
12. 19594.
13. $(0; 0; 0)$.
15. $(1; 1; 1; 1)$.
16. $m = 4, n = 6$.

Указания:

4. Пусть $\overline{ABCDEF}$ – данное шестизначное число. Обозначьте пятизначное число $\overline{ABCDE}$ через x . Тогда $\overline{ABCDEF}+\overline{FABCDE} = (10x+F)+(10^5 \cdot F+x) = 11x+100001F = 11(x+9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[891899; 891870]$ на 11 делятся числа $891880, 891891$. Осталось доказать, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений $11(x+9091F) = 891880$ и $11(x+9091F) = 891891$ имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю.

7. (b) Выразите y через x в виде: $y = -\dfrac{16x+61}{3x+13} = \dfrac{25}{3(3x+13)} - \dfrac{16}{3}$. Домножьте последнее уравнение на 3, получится уравнение $3y = \dfrac{25}{3x+13} - 16$, отсюда заметьте, что $3x+13$ – целый делитель 25.

   (c) Решите уравнение, как квадратное относительно переменной y или перепишите уравнение в виде
   $(x-3y)^2 + (2y)^2 = 10^2$.

   (d) Перепишите уравнение в виде
   $x^2 - (y-1)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y+1)(x+y-1) = 7$.

   (i) Перепишите уравнение в виде
   $x = \dfrac{2y-1}{2y^2+y-11}$. $2y^2+y-11 = (y+1)(2y-1)-10$, поэтому дробь $\dfrac{2y-1}{2y^2+y-11}$ может сокращаться только на целые делители 10, значит $2y^2+y-11 = \pm 1$ или ± 2 или ± 5 или ± 10.

8. Перепишите уравнение в виде $(x+1)(y+1)(z+1) = 165$.

10. Перепишите неравенства в виде:
$(x-6)^2+(y+9)^2 < 14$ и $(x-13)^2+(y+5)^2 < 22$. Из них следует, что $6-\sqrt{14} < x < 6+\sqrt{14}$ и $13-\sqrt{22} < x < 13+\sqrt{22}$. Этим неравенствам удовлетворяет единственный целый $x = 9$.

12. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получите $(5x-y)(x-y) = 2^{100}\cdot 3^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 5x-y = 2^k\cdot 3^l, \\ x-y = 2^{100-k}\cdot 3^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x-y = -2^k\cdot 3^l, \\ x-y = -2^{100-k}\cdot 3^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

13. Рассмотрите остатки от деления на 5 левой и правой частей уравнения.

14. (a) Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения;

    (b) Рассмотрите остатки от деления на 7 левой и правой частей уравнения.

15. Пусть некоторый набор натуральных чисел a, b, c, d является решением данной системы. Рассмотрим число $(a-c)(a^2+b^2)$. Оно делится на a^2+b^2 и при этом с учётом первого уравнения системы равно

$$(a-c)(a^2+b^2) = a(a^2+b^2) - a^3 - b = ab^2 - b = b(ab-1).$$

Поскольку $b < a^2+b^2$, число $ab-1$ также делится на a^2+b^2. Но это возможно только при $a = b = 1$, так как $a^2+b^2 \geqslant 2ab > ab-1$ при $ab > 1$. Таким образом система имеет единственное решение $a = b = c = d = 1$.

16. Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения.

Задачи для решения дома.

1. Найдите все целые решения уравнений:

   (a) $22x + 6y = 133$; (b) $4x + 7y = 9$.

2. Пусть A - множество целых чисел, имеющих при делении на 7 остаток 3 а B - множество целых чисел, имеющих при делении на 17 остаток 13. Найдите все числа, которые входят одновременно в оба множества.

3. Пусть x и y – такие натуральные числа, что число $7x + 17y$ делится на 5. Докажите, что число $x + y$ также делится на 5.

4. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $123456 \to 612345$), и полученное шестизначное число вычли исходного числа. Какие числа из промежутка $[618222; 618252]$ могли получиться в результате вычитания?

5. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

6. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнениям:

   (a) $3xy - 9x^2 = y - 3x + 8$;
   (b) $3xy + 19x + 10y + 55 = 0$;
   (c) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 3$;
   (d) $x^2 - xy - 2y^2 = 18$;
   (e) $x^2 + xy + y^2 = 1$;
   (f) $y^3 - x^3 = 91$;
   (g) $3x^2y + 9x^2 - 5xy + 6x - 2y + 1 = 0$;
   (h) $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0$;
   (i) $x^2y + x^2 - xy - 2x + y = 0$.

7. Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих уравнению
$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

8. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих системе уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 8xy - y^2 + 16 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

9. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих системе неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 10x - 16y - 75, \\ x^2 + 8y + y^2 < 24x - 138. \end{cases}$$

10. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих условиям:
$$3y - 5x > 16,\ 3y - x < 44,\ 3x - y > 1.$$

11. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(2x + y)(2y + x) = 2023^{2023}$?

12. Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

13. Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2021}$.

14. Докажите, что уравнения не имеют решений в целых числах:

   (a) $x^2 - 3y = 20$; (b) $x^2 + 8x - 4y = 15$; (c) $19x^3 - 17y^3 = 50$.

15. Решите в натуральных числах уравнение $a! + b! + c! = d!$.

16. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

Ответы:

1. (a) $\varnothing$;

   (b) $x = 7n + 4$,
   $y = -4n - 1, n \in \mathbb{Z}$.

2. $119n + 115, n \in \mathbb{Z}$.

4. $618228, 618237, 618246$.

5. 3200.

6. (a) $(-1; -5), (0; -8), (1; 7), (3; 10)$;
   (b) $(-5; -8), (-3; 2), (5; -6)$;
   (c) $(-5; 2), (-1; 2), (1; -2), (5; -2)$;
   (d) $(-5; -1), (-4; 1), (4; -1), (5; 1)$;
   (e) $(\pm 1; 0), (0; \pm 1), (-1; 1), (1; -1)$;
   (f) $(-6; -5), (-4; 3), (-3; 4), (5; 6)$;
   (g) $(3; -10), (9; -4), (-5; -2), (1; 4)$;
   (h) $(2; \pm 2), (-2; \pm 2)$;
   (i) $(-1; -1), (1; 1), (0; 0), (2; 0)$.

7. $(7n, 3n, 2n), n \in \mathbb{Z}$.

8. $(-5; 1), (-3; 1)$.

9. $(8; -6)$.

10. $(6; 16)$.

11. 0.

12. Один из возможных примеров – $n = 5^{2\cdot 2018}$.

13. $\varnothing$.

15. $a = b = c = 2, d = 3$.

16. $n = 2, k = 5$.

Указания:

6. (i) Перепишите уравнение в виде $y = \dfrac{x+1}{x^2 - x + 1} - 1$. $x^2 - x + 1 = (x-2)(x+1) + 3$, поэтому дробь $\dfrac{x+1}{x^2 - x + 1}$ может сокращаться только на целые делители 3, значит $x^2 - x + 1 = \pm 1$ или ± 3. Или можно нарисовать эскиз графика функции $y(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x + 1} - 1$.

7. Перепишите уравнение в виде $(x + y - 5z)^2 + (2y - 3z)^2 = 0$.

14. (a) Рассмотрите остатки от деления на 3 левой и правой частей уравнения;

    (b) Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения;

    (c) Рассмотрите остатки от деления на 9 левой и правой частей уравнения.

15. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда из уравнения следует, что $d > c$, значит, $d \geqslant c + 1$, $d! \geqslant (c + 1)! = (c + 1) \cdot c! > 3c! \geqslant a! + b! + c!$, если $c + 1 > 3$. Итак, если $c \geqslant 3$, уравнение решений не имеет. Осталось проверить, что из наборов $(1; 1; 1), (1; 1; 2), (1; 2; 2), (2; 2; 2)$ уравнению удовлетворяет только последний.

16. Рассмотрите остатки от деления на 10 левой и правой частей уравнения.

Разные уравнения в целых числах.

Задачи для решения в классе.

1. Найдите все натуральные k, при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, то есть квадратом целого числа.

2. Дано простое число p. Найдите все пары натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2022p$.

3. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

4. Найдите все пары натуральных чисел $(m; n)$, для которых выполнено равенство $n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1)$.

5. Решите в целых числах уравнение $m^4 - 2n^2 = 1$.

6. Натуральные числа m и n таковы, что число $m+n+1$ – простое и делит $2(m^2+n^2)-1$. Докажите, что $m = n$.

7. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 48z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z).

8. Найдите все тройки натуральных чисел $(m; n; k)$ такие, что $m^3 + n^3 = k! + 32$.

9. Найдите все тройки натуральных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x! + y! = z!. \end{cases}$$

10. Найдите все пары целых неотрицательных чисел x и y, удовлетворяющих уравнениям:

(a) $2^x + 7 = y^2$; (b) $x^2 + x - 2 = 6^y$.

11. Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $m^{2021} + n$ делится на mn.

12. Найдите все целочисленные решения $(x; y)$ уравнения $2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

Ответы:

1. 101 или 2601.
2. $(1012; 1010), (340; 334)$ при $p = 2$; нет решений при $p \neq 2$.
3. $(-1; 0), (-1; 1), (0; -1), (0; 2), (1; -1), (1; 2), (2; 0), (2; 1)$.
4. $(1; 1), (2; 1), (3; 1)$.
5. $m = \pm 1, n = 0$.
7. $(1; 6; -27), (6; 1; -27), (1; 7; 63), (7; 1; 63)$.
8. $(3; 5; 5), (5; 3; 5)$.
9. $(1; 1; 2)$.
10. (a) $(1; \pm 3)$; (b) $\varnothing$.
11. $m = 1, n = 1$ или $m = 2, n = 2^{2021}$.
12. $(1; 0), (1; -1), (-1; 1), (-3; 4)$.

Указания.

1. Пусть $k^2 - 101k = (k - m)^2, m \geqslant 1$, тогда

$$k^2 - 101k = k^2 - 2mk + m^2 \Leftrightarrow (2m - 101)k = m^2.$$

Последнее уравнение является линейным относительно переменной k, выражая k через m, получаем

$$k = \frac{m}{2} + \frac{101}{4} + \frac{10201}{4(2m - 101)} \Leftrightarrow 4k = 2m + \frac{10201}{2m - 101}.$$

4. Перепишете равенство в виде $(n^2-3n)(n^2-3n+2)=m^2-m$ и обозначьте $N=n^2-3n+1$, тогда, выделяя полные квадраты, $N^2-1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. Домножая на 4, получите
$$(2N)^2-(2m-1)^2=3 \Leftrightarrow (2N-2m+1)(2N+2m-1)=3.$$

5. Заметьте, что m – нечетное число, и что знаки m и n можно выбирать произвольно, так как если $(m;n)$ – решение данного уравнения, то $(-m;n),(m;-n),(-m;-n)$ – тоже решения этого уравнения. Поэтому достаточно искать неотрицательные решения. Пусть $m=2t+1$, тогда:
$$m^4-1=(m-1)(m+1)(m^2+1)=2t(2t+2)(4t^2+4t+2)=2n^2.$$
Тогда $4t(t+1)(2t^2+2t+1)=n^2$, получается, что n – четное число. Пусть $n=2z$, тогда $t(t+1)(2t^2+2t+1)=z^2$. Числа $t, t+1$ и $2t^2+2t+1=2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты, а их произведение – полный квадрат. Отсюда следует, что каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t=0$, иначе $t+1$ не будет квадратом. Тогда и $z=0$, получается, что $m=\pm1, n=0$.

6. $2(m^2+n^2)-1=2(m+1)^2-4mn-1=2((m+n+1)-1)^2-4mn-1=$ $=2(m+n+1)^2-4(m+n+1)+2-4mn-1$ делится на $m+n-1$, поэтому $1-4mn \,\vdots\, (m+n+1)$.
Пусть $m+n+1=p$, где p – простое число.
Тогда $1-4n(p-n-1) \,\vdots\, p \Rightarrow 4n^2+4n+1 \,\vdots\, p \Rightarrow (2n+1)^2 \,\vdots\, p \Rightarrow$ $\Rightarrow 2n+1 \,\vdots\, p$, так как p – простое число. Из последнего выражения следует, что $2n+1 \geqslant p \Leftrightarrow n+n+1 \geqslant m+n+1 \Rightarrow n \geqslant m$. Осталось аналогично доказать, что $n \leqslant m$.

7. Выражение $x!+y!$ должно быть нечётным числом, поэтому $x=1$ или $y=1$.

   Пусть $x=1$, тогда $1+y!=48z+2017$ или $y!=48z+2016$. Так как $2016=48\cdot42$, то $y!$ делится на 48, отсюда $y\geqslant6$. Если же $y\geqslant8$, то $y!$ делится на 96 и $2016=96\cdot21$. В этом случае z будет чётным, что противоречит условию задачи. Значит, $y=6$ или $y=7$.

8. Рассмотрите остатки от деления на 7 левой и правой частей уравнения.

9. Без ограничения общности можно считать, что $x \leqslant y$, в силу первого уравнения $y < z$. Пусть $x! = a$, тогда $y! = a \cdot b, z! = abc$, где $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $c \geqslant 2$. Второе уравнение системы примет вид $a + ab = abc \Leftrightarrow 1 = b(c-1)$. Последнее возможно только при $b = 1, c = 2$.

10. (a) Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения;

    (b) При $y = 0$ уравнение примет вид $x^2 + x - 3 = 0$, которое не имеет решений в целых числах. Пусть $y \geqslant 1$, перепишете равенство в виде $(x+2)(x-1) = 2^y 3^y$. Выражение $(x+2)(x-1)$ чётно, так как числа $x+2$ и $x-1$ разной чётности, значит возможны два случая: $x + 2 = 3^y \cdot 2^k, x - 1 = 3^{y-k}$, где $k \in \{0; 1; \ldots y\}$ или $x - 1 = 3^y \cdot 2^k, x + 2 = 3^{y-k}$, где $k \in \{0; 1; \ldots y\}$.

    Рассмотрим первый случай и вычтем из первого уравнения второе: $3 = 3^k \cdot 2^y - 3^{y-k} \Leftrightarrow 1 = 3^{k-1} \cdot 2^y - 3^{y-k-1}$, где $k \in \{1; 2; \ldots y-1\}$. При $k \neq 1$ остатки при делении на 6 левой и правой частей последнего уравнения не будут равны между собой. При $k = 1$ последнее уравнение примет вид $3^{y-2} = 2^y - 1$, остатки при делении на 3 равны между собой при $y = 2n, n \in \mathbb{N}$, тогда $3^{2n-2} = (2^n - 1)(2^n + 1)$. $2^n - 1$ и $2^n + 1$ имеют разные остатки при делении на 3, значит $2^n - 1 = 1$, но при $n = 1$ уравнение $3^{2n-2} = (2^n - 1)(2^n + 1)$ не превращается в тождество.

    Аналогично рассматривается второй случай.

11. Пусть $m = 1$, тогда $n + 1$ делится на n, такое возможно только при $n = 1$.

    Пусть $m \geqslant 2$, из условия следует, что $m^{2021} + n$ делится на m, следовательно, n делится на m. Обозначая $n = mn_1$, заключаем, что $m^{2020} + n_1$ делится на mn_1. Далее действуем по аналогии: выводим, что n_1 кратно m, вводим обозначение $mn_2 = n_1$ и приходим к тому, что $m^{2019} + n_2$ кратно mn_2. Продолжая таким образом, приходим к тому, что n представляется в виде km^{2021} с некоторым натуральным k. При этом условие задачи переписывается так: $(k+1)m^{2021}$ делится на km^{2022}, что возможно лишь при $k=1$ и $m=2$.

12. Заметим, что $x+y \geqslant 0$, поскольку левая часть уравнения – целое число, а значит, и правая часть уравнения должна быть целым числом. В предположении $y=-x$ получаем равенство $x^2=1$, откуда находим решения $(1;-1)$ и $(-1;1)$. Далее считаем $x+y>0$. Рассмотрим два случая: (1) – x делится на 2 в не меньшей степени, чем y, и (2) – в меньшей.

1) В этом случае $x=2^s u$ и $y=2^s v$, где s, u и v целые числа, $s>0$, причём v нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим: $2^{2s}(2u^2-v^2)=2^{2^s(u+v)}$.

Так как левая часть последнего равенства делится на 2^{2s}, но не на 2^{2s+1}, а правая – на $2^{2^s(u+v)}$, но не на $2^{2^s(u+v)+1}$, получаем равенство степеней: $s=2^{s-1}(u+v)$. Если $u+v=1$, то $s=1$ или $s=2$. Подставляя предположения в выражения для x и y, в обоих случаях получаем уравнение $u^2+2u-2=0$, не имеющее целочисленных корней. Если же $u+v>1$, то $2^{s-1}(u+v) \geqslant 2^s = (1+1)^s = 1+s+\ldots > s$, и равенство не достигается.

2) В этом случае $x=2^s u$ и $y=2^{s+1}v$, где s, u и v – целые числа, $s>0$, причём u нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим: $2^{2s+1}(u^2-2v^2)=2^{2^s(u+2v)}$. Так как левая часть последнего равенства делится на 2^{2s+1}, но не на 2^{2s+2}, а правая – на $2^{2^s(u+2v)}$, но не на $2^{2^s(u+2v)+1}$, получаем равенство степеней: $2s+1=2^s(u+2v)$. Так как в нём слева стоит нечётное число, то $s=0$, и $u+2v=1$. Кроме того, из $2^{2s+1}(u^2-2v^2)=2^{2^s(u+2v)}$ следует, что $u^2-2v^2=1$. Подставляя сюда $u=1-2v$, находим, что $v=0$ или $v=2$. Так как $s=0$, получаем из формул $x=2^s(1-2v)$ и $y=2^{s+1}v$ решения $(1;0)$ и $(-3;4)$.

Задачи для решения дома.

1. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{25}$, где $m>n$.

2. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

3. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $2x^2+4xy+5y^2=11$.

4. Натуральные числа m и n таковы, что числа m^3+n и $m+m^3$ оба делятся на m^2+n^2. Найдите m и n.

5. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y!=8z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z).

6. Найдите все тройки натуральных чисел $(m;n;k)$ такие, что $m^3+n^3=k!+4$.

7. Найдите все пары целых неотрицательных чисел x и y, удовлетворяющих уравнениям:

   (a) $3^x+1=2^y$; (b) $3^x-1=2^y$; (c) $3^x=4y+5$.

8. Найдите все целочисленные решения $(x;y)$ уравнения $x^2-2y^2=2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

9. Решите в натуральных числах уравнение $3^x+4^y=5^z$.

10. Решите в простых числах уравнение $2^p-q^2=1999$.

Ответы:

1. $m=650, n=26$ или $m=150, n=30$.

2. (28 и 27) или (8 и 3).

3. $(-3;1),(-1;-1),(1;1),(3;-1)$.

4. $m = n = 1$.

5. $(1; 4; -249), (4; 1; -249), (1; 5; -237), (5; 1; -237)$.

6. $(3; 1; 4), (1; 3; 4)$.

7. (a) $(0; 1), (1; 2)$;

   (b) $(1; 1), (2; 3)$;

   (c) $\left(2k; \dfrac{9^k - 5}{4}\right), k \in \mathbb{Z}^+$.

8. $(2; 0), (2; -1), (6; -4), (4; 0), (12; -8)$.

9. $x = y = z = 2$.

10. $p = 11, q = 7$.

Указания.

4. Так как каждое из чисел $m^3 + n$ и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$, то их разность $m - n$ тоже делится на $m^2 + n^2$, то есть справедливо равенство $m - n = x(m^2 + n^2)$, где x – целое число.

   Если $m > n$, то x – натуральное число и справедливы неравенства $m^2 > m, n^2 > n, m^2 + n^2$, тогда $m^2 + n^2 > m - n$ и равенство $m - n = x(m^2 + n^2)$ невозможно.

   Аналогично доказывается, что случай $m < n$ невозможен. Следовательно $m = n$.

6. Рассмотрите остатки от деления на 7 левой и правой частей уравнения.

7. (a) Рассмотрите остатки от деления на 4 и 3 левой и правой частей уравнения;

   (b) Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения;

   (c) Рассмотрите остатки от деления на 4 левой и правой частей уравнения.

9. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, то есть 1. Поэтому z чётно. Левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому x тоже чётно. Итак, $4^y = 5^z - 3^x = 5^{2v} - 3^{2u}$, то есть $2^{2y} = (5^v - 3^u)(5^v + 3^u)$. Поэтому $5^v - 3^u = 2^k$ и $5^v + 3^u = 2^l$, где k и l – целые неотрицательные числа и $k + l = 2y$. Таким образом, $5v = \dfrac{1}{2}(2^k + 2^l) = 2^{k-1} + 2^{l-1}$ и $3^u = 2^{l-1} - 2^{k-1}$. Значит, число $2^{l-1} - 2^{k-1}$ нечётно, поэтому $k = 1, 2k = 2$ и $3^u = 2^{l-1} - 1$. Следовательно, $l - 1 = 2s$ (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^u = (2^s - 1)(2^s + 1)$ – произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители – 1 и 3, то есть $s = 1, l = 3$. Отсюда $x = y = z = 2$.

10. Рассмотрите остатки от деления на 7 левой и правой частей уравнения.

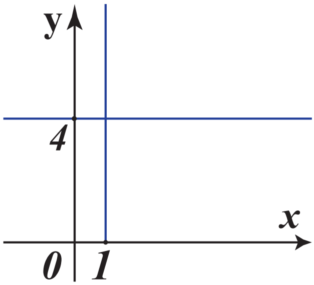
Уравнения в двух переменных.

Задачи для решения в классе:

Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению:

1. $x\sqrt{y} + 2 = 2x + \sqrt{y}$.
2. $4x^2 + 9y^2 + 13 = 12(x - y)$.
3. $x^2 - 6xy + 10y^2 + 4y + 4 = 0$.
4. $x^2 + 2{,}5y^2 + xy - 6y + 4 = 0$.
5. $\dfrac{x^2 + y^2 + 9x + 4y}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}} = 2\sqrt{xy}$.
6. $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 26xy + 2x - 2y + 145 = 0$.
7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.
8. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 35 = 0$.
9. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy$.
10. $(x^2 - 6|x| + 10)(y^2 - 4|y| + 7) = 3$.
11. $\dfrac{x^4 + 4}{x^2} = \sqrt{15 - y^2 + 2y}$.
12. $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + |\sqrt{y} - x| = 4 - \dfrac{4}{|3 - 2x|}$.

Ответы:

1. 

2. $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

3. $(-6; -2)$.

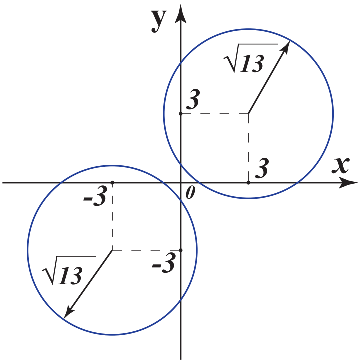
4. $\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

5. $\left(2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}; 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}\right)$.

6. $(3; 4)$,$(-4; -3)$.

7. Окружность с центром в точке $(3; 4)$ и радиусом 5.

8. $\varnothing$.

9. 

10. $(3; \pm 2), (-3; \pm 2)$.

11. $(\pm\sqrt{2}; 1)$.

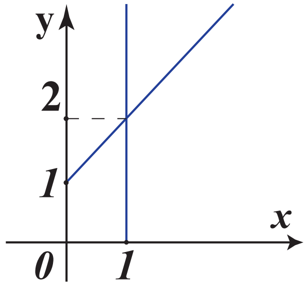
12. $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{25}{4}\right)$.

Задачи для решения дома:

Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению:

1. $x\sqrt{x} + y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} + x + 1.$
2. $4x^2 + y^2 + 45 = 12(x - y).$
3. $5x^2 + 9y^2 + 1 = 12xy + 2x.$
4. $x^2 + 2{,}5y^2 - 3xy - 3y + 9 = 0.$
5. $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 18xy - 4x - 4y + 68 = 0.$
6. $x^2 - 10x + y^2 + 24y = 0.$
7. $x^2 - 6x + y^2 + 8y + 50 = 0.$
8. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy.$
9. $(x^2 - 8|x| + 20)(x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 4) = 12.$
10. $x^2 + \dfrac{12}{x^2} = \sqrt{14|y| - y^2 - 1}.$
11. $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \dfrac{1}{2\sqrt{xy}} = \left|3 - \sqrt{y^2 - \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{16}}\right|.$
12. $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \dfrac{1}{2\sqrt{xy}} = \left|3 - \sqrt{y^2 - y + \dfrac{1}{4}}\right|.$

Ответы:

1. 

2. $\left(\frac{3}{2}; -6\right)$.

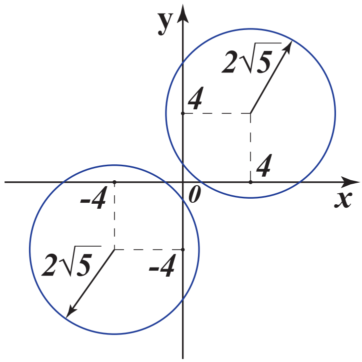
3. $\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

4. $(9; 6)$.

5. $(4; -2), (-2; 4)$.

6. Окружность с центром в точке $(5; -12)$ и радиусом 13.

7. $\varnothing$.

8. 

9. $\left(4; \frac{5}{2}\right), \left(-4; -\frac{3}{2}\right)$.

10. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}; \pm 7\right), \left(-\sqrt{2\sqrt{3}}; \pm 7\right)$.

11. $\left(1; \frac{1}{4}\right)$.

12. $\varnothing$.

Задание фигур на координатной плоскости уравнениями.

Задачи для решения в классе:

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют уравнению:

1. $|y+2| = 3 - x$.
2. $2x - 5 = y^2 - 2y$.
3. $|y - 2x| = 1$.
4. $|y - 2x| = x$.
5. $y^2 - 6y = 4x^2 + 12x$.
6. $2x^2 - 3xy - 5y^2 = 0$.
7. $3y^2 - 4x^2 + 4xy + 12x - 14y - 5 = 0$.
8. $|x + y - 2| = |2x - 3y + 2|$.
9. $|y| = 3x - \dfrac{x^2}{2}$.
10. $|y| = x^2 - 4|x| + 3$.
11. $|y|(x-1) = 2x$.
12. $|y| = 2 - \sqrt{-1-x}$.
13. $x^2 + |x| + y - 0{,}75 = 0$.
14. $|x| = 2 + y - y^2$.
15. $y|x+1| = |2x|$.
16. $y = \left|\sqrt{2x+1} - 2\right|$.
17. $|y| = |4x - x^2 - 3|$.
18. $|x| + |y| = 3$.
19. $|x-3| + |y-1| = 2$.
20. $|y| - 2|x| = 1$.
21. $\Big||y| - 2|x|\Big| = 1$.
22. $|x - 2 + y| + |x - 2 - y| = 3$.
23. $\dfrac{(4y^2 - x^2)(xy - 2)}{x^2 + y^2 - 5} = 0$.
24. $\dfrac{(4|x| + 3|y| - 12)(x^2 + y^2 - 2x - 16)}{25x^2 + 25y^2 - 50x - 39} = 0$.
25. $x + \dfrac{2}{x} = y + \dfrac{2}{y}$.
26. $|x| + \dfrac{2}{|x|} = |y| + \dfrac{2}{|y|}$.

27. $\left|x+\dfrac{2}{x}\right|=\left|y+\dfrac{2}{y}\right|$.

28. $x^2-6|x|+y^2=0$.

29. $x^2-6|x|+y^2-8|y|=0$.

30. $x^4-4x^2=y^2+4y$.

Изобразите на координатной плоскости кривую, заданную уравнением, и вычислите её длину:

31. $x^2+y^2=\min(2x+2y;2)$.

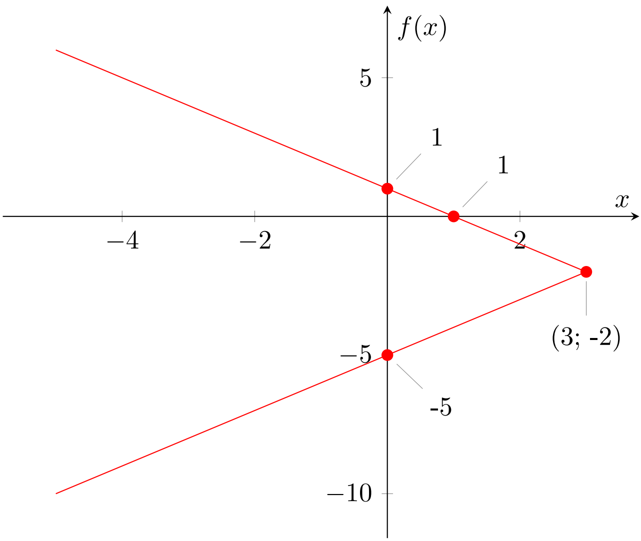
32. $x^2+y^2=x+y+1-|x+y-1|$.

33. $x^2+y^2=\max(2x+2y;2)$.

34. $x^2+y^2=x+y+1+|x+y-1|$.

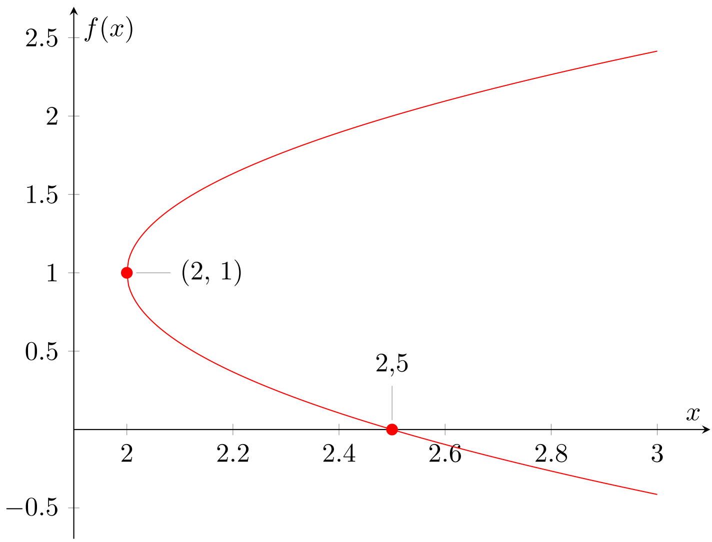
Ответы:

$$|y+2| = 3 - x.$$



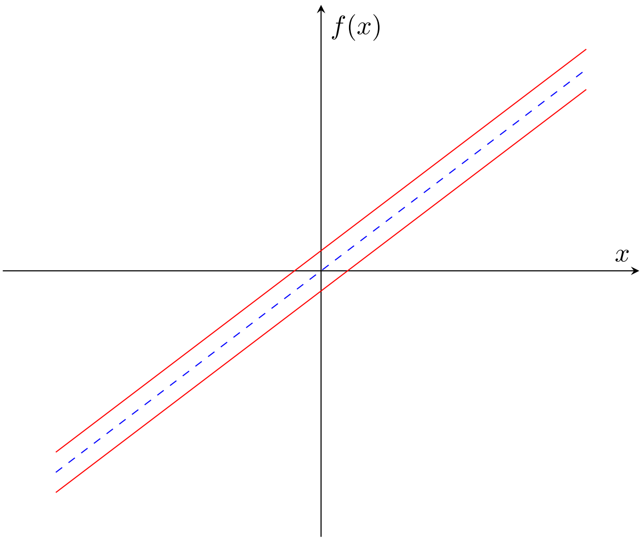
1. Верхняя ветка: $y = 1 - x$, нижняя ветка: $y = x - 5$.

$$2x - 5 = y^2 - 2y.$$



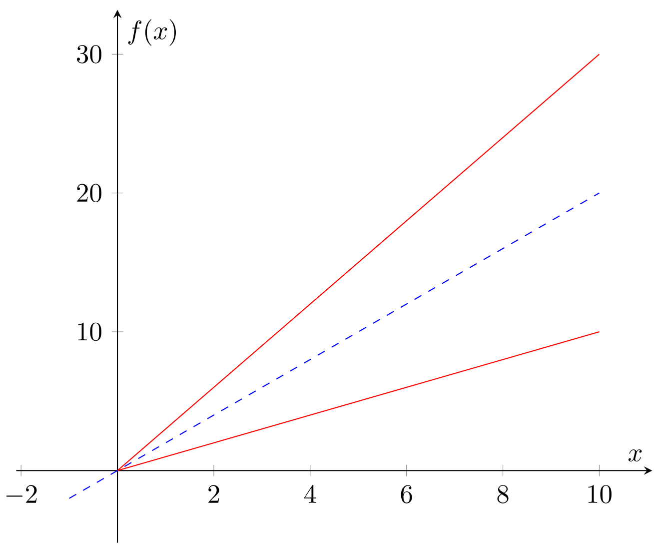
2.

$$|y - 2x| = 1.$$

3. 

Верхняя ветка: $y = 2x + 1$, нижняя ветка: $y = 2x - 1$.

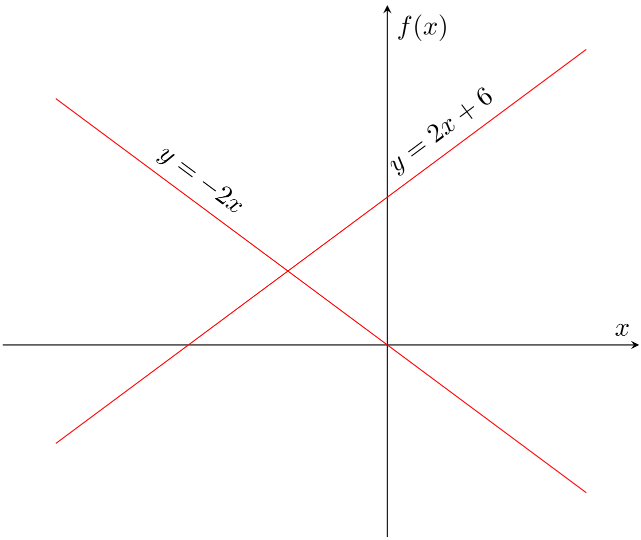
$$|y - 2x| = x.$$

4. 

Верхняя ветка: $y = 3x$, нижняя ветка: $y = x$, $x \in [0; +\infty)$.

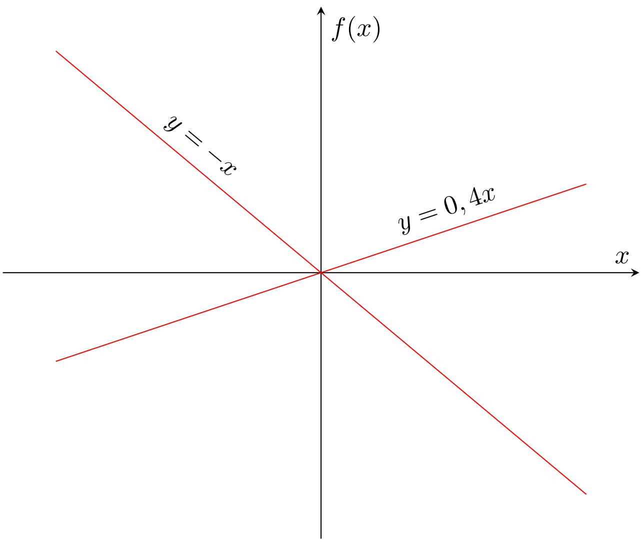
$$y^2 - 6y = 4x^2 + 12x.$$

5.

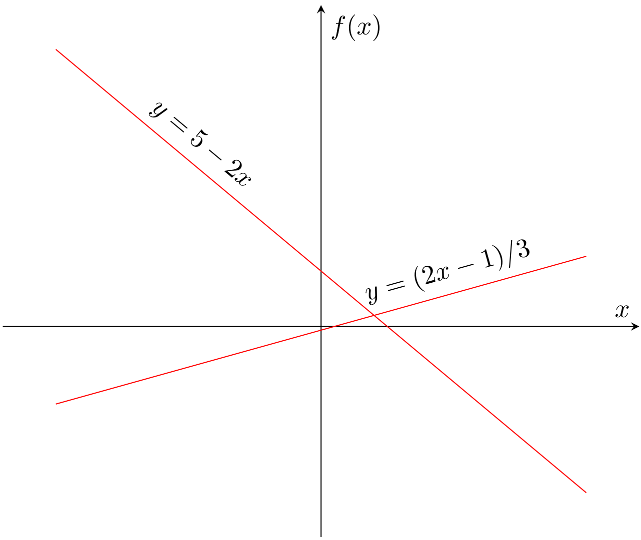


$$2x^2 - 3xy - 5y^2 = 0.$$

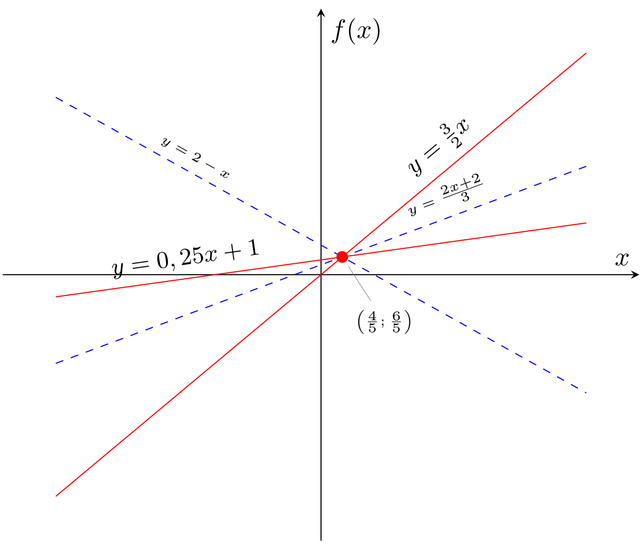
6.



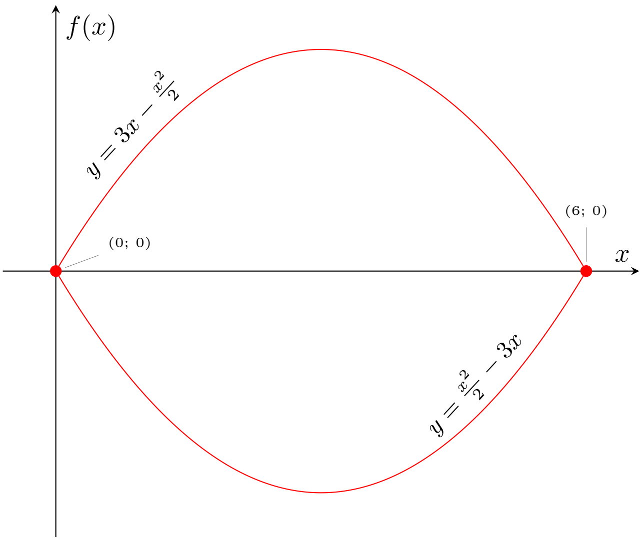
$$3y^2 - 4x^2 + 4xy + 12x - 14y - 5 = 0.$$

7. 

$$|x + y - 2| = |2x - 3y + 2|.$$

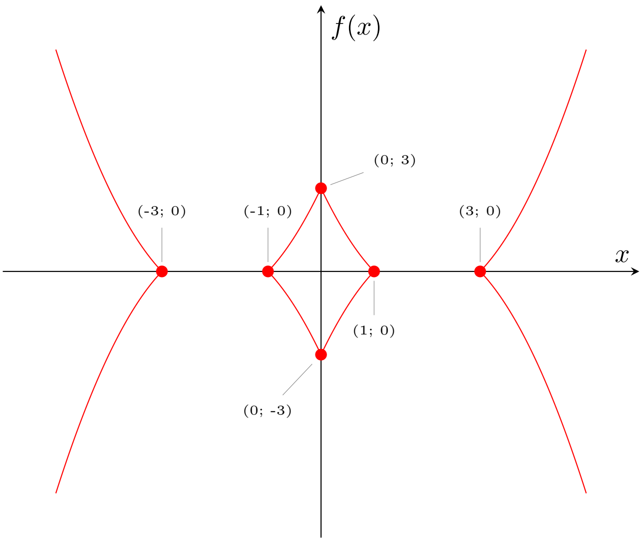
8. 

$$|y| = 3x - \frac{x^2}{2}.$$



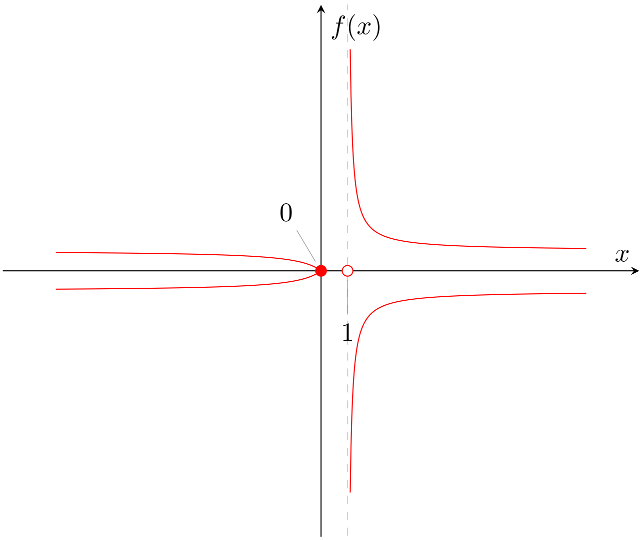
9.

$$|y| = x^2 - 4|x| + 3.$$



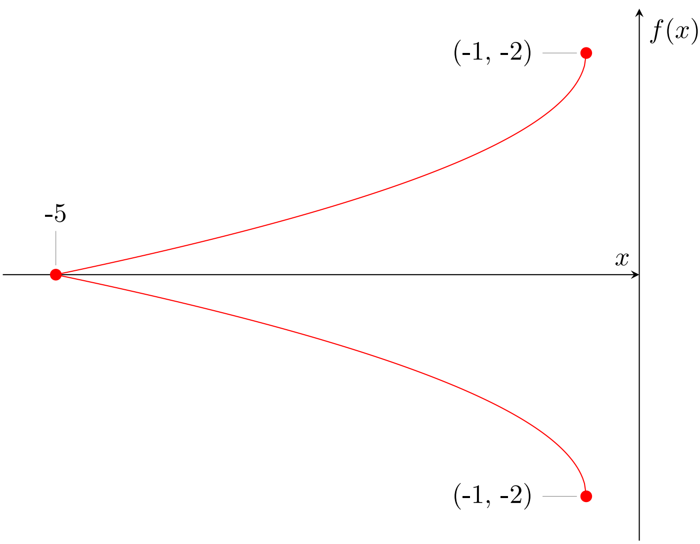
10.

$$|y|(x-1) = 2x.$$



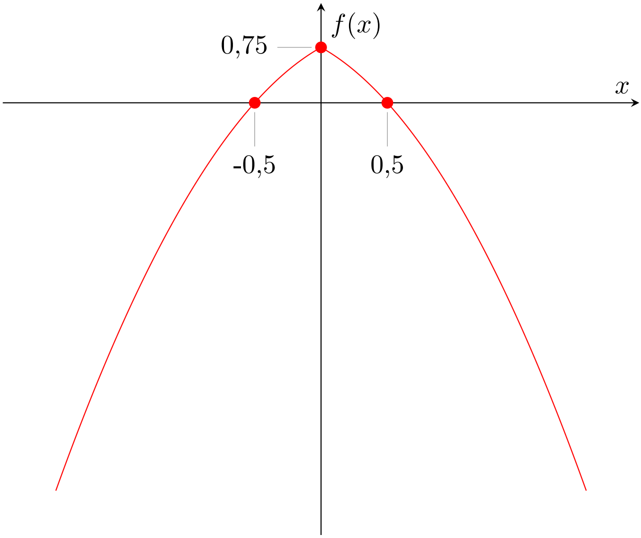
11.

$$|y| = 2 - \sqrt{-1-x}.$$



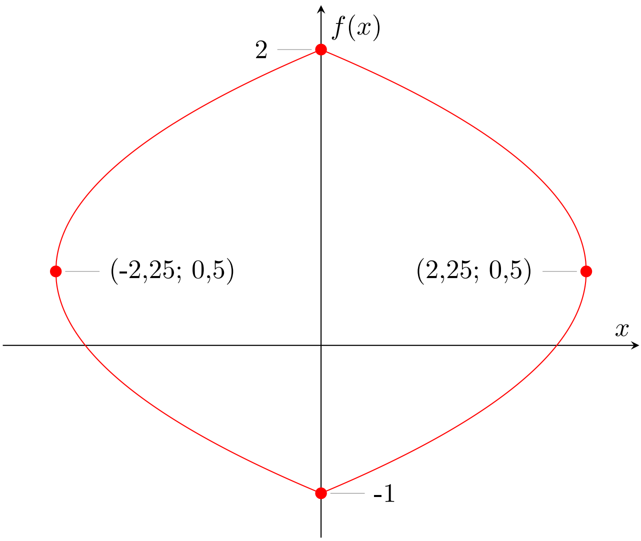
12.

$$x^2 + |x| + y - 0,75 = 0.$$



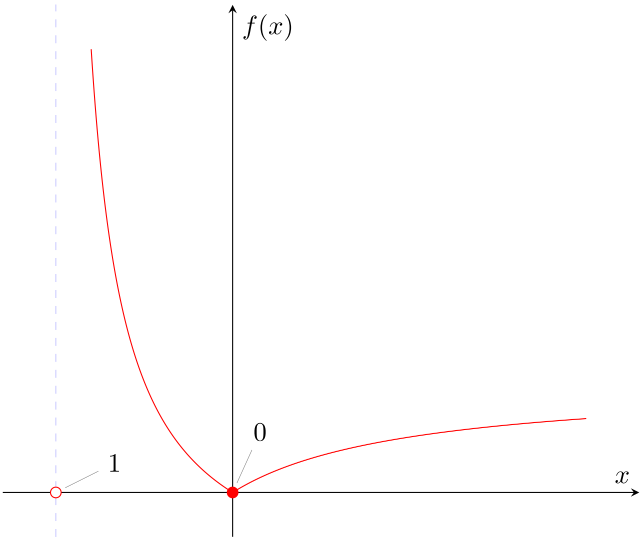
13.

$$|x| = 2 + y - y^2.$$



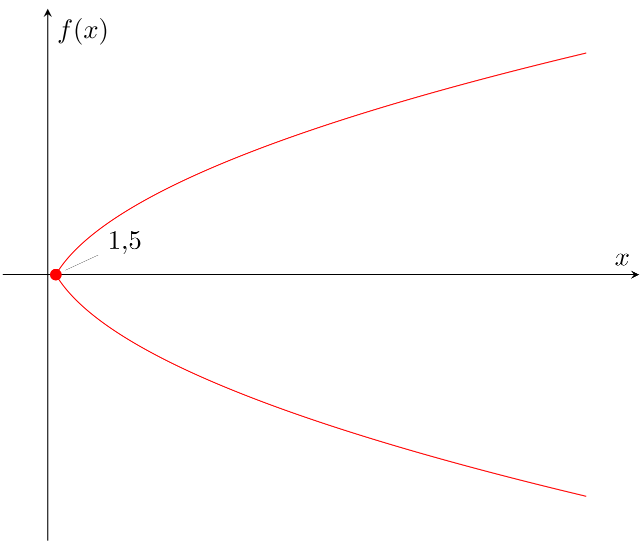
14.

$$y|x+1| = |2x|.$$



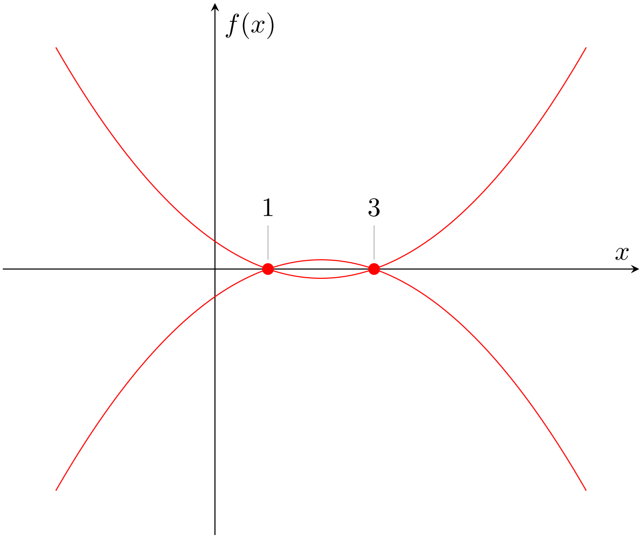
15.

$$y = \left|\sqrt{2x+1} - 2\right|.$$



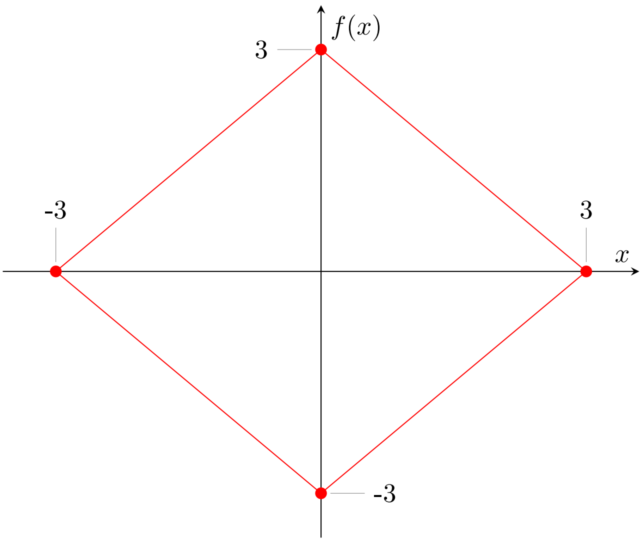
16.

$$|y| = |4x - x^2 - 3|.$$



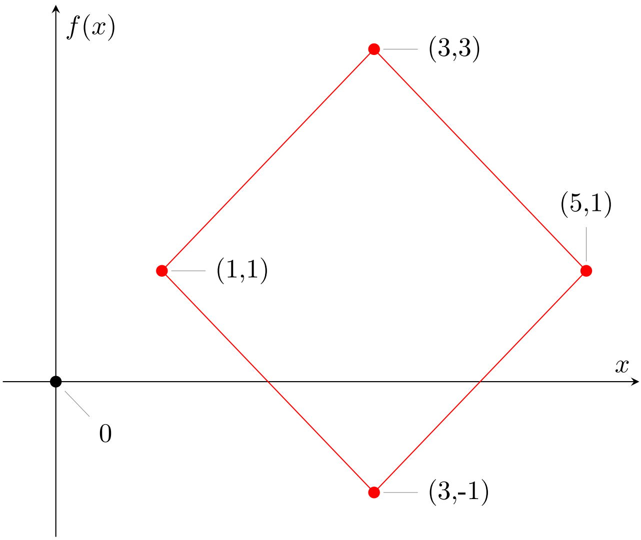
17.

$$|x| + |y| = 3.$$



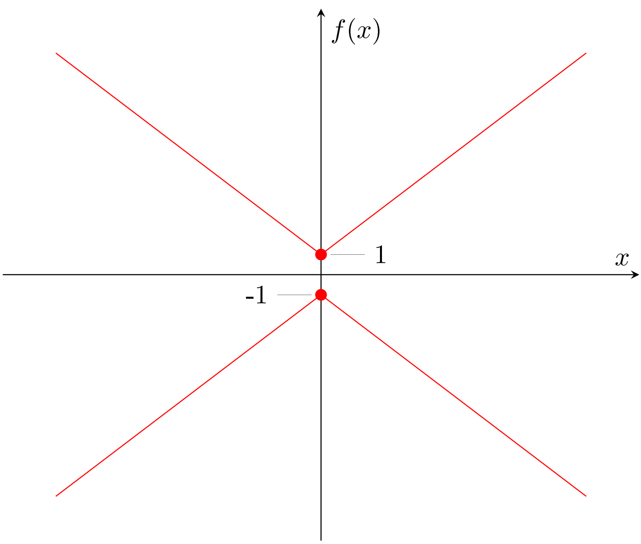
18.

$$|x-3|+|y-1|=2.$$



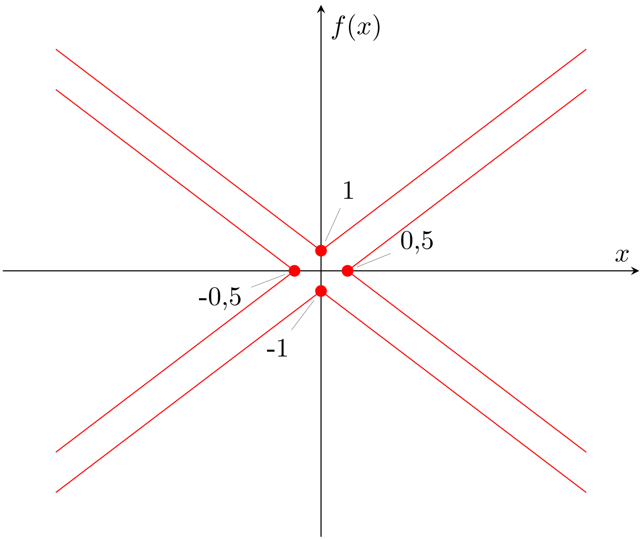
19.

$$|y|-2|x|=1.$$

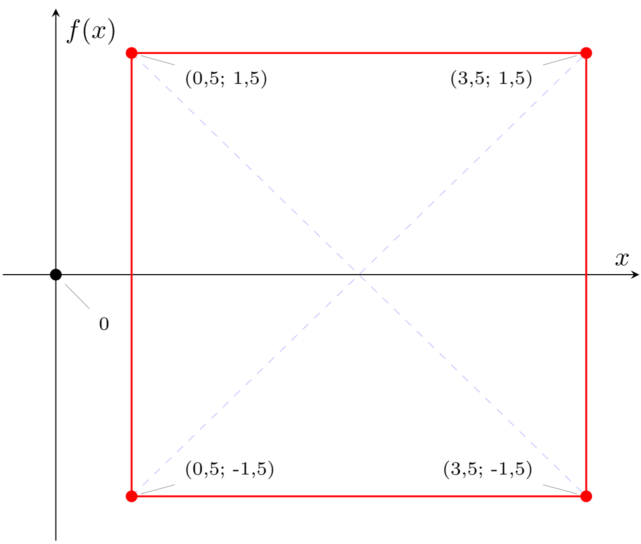


20.

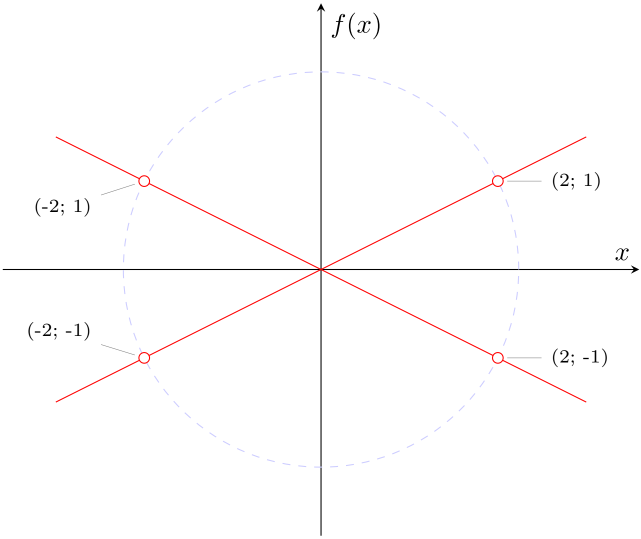
$$||y| - 2|x|| = 1.$$

21. 

$$|x - 2 + y| + |x - 2 - y| = 3.$$

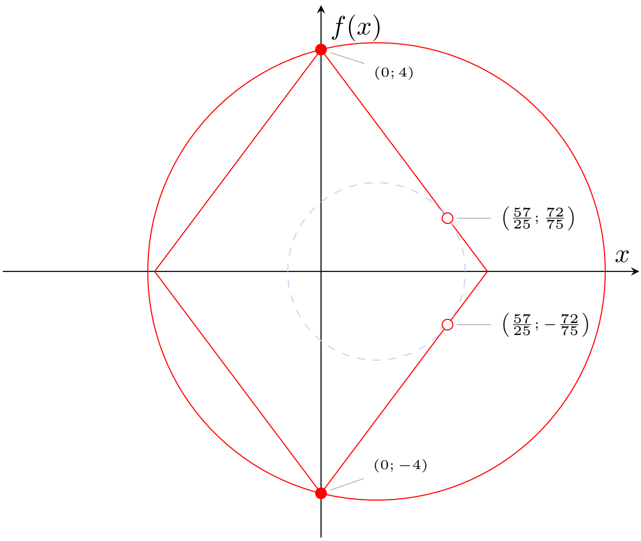
22. 

$$\frac{(4y^2 - x^2)(xy - 2)}{x^2 + y^2 - 5} = 0.$$



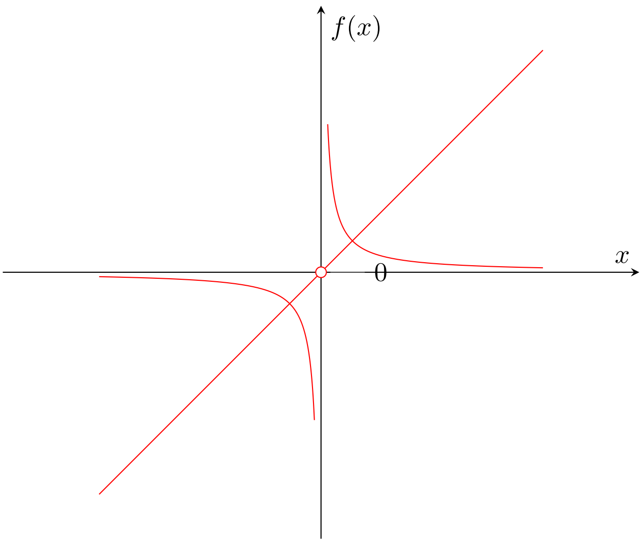
23.

$$\frac{(4|x| + 3|y| - 12)(x^2 + y^2 - 2x - 16)}{25x^2 + 25y^2 - 50x - 39} = 0.$$



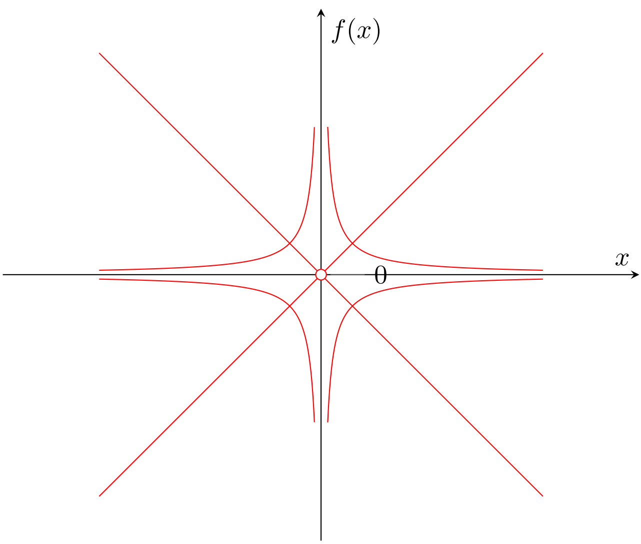
24.

$$x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}.$$



25.

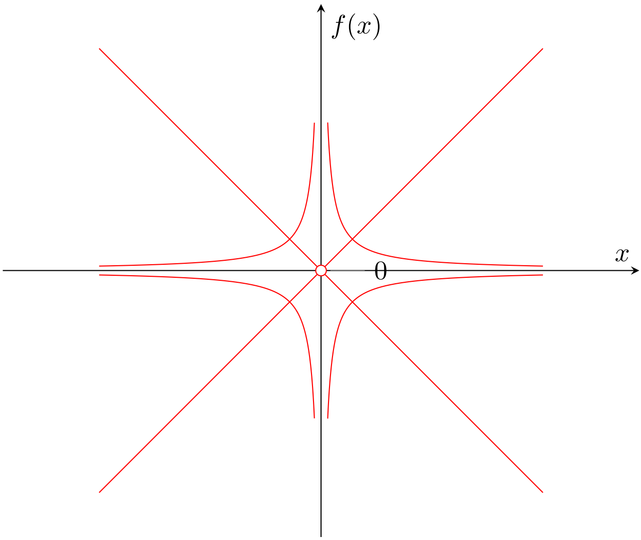
$$|x| + \frac{2}{|x|} = |y| + \frac{2}{|y|}.$$



26.

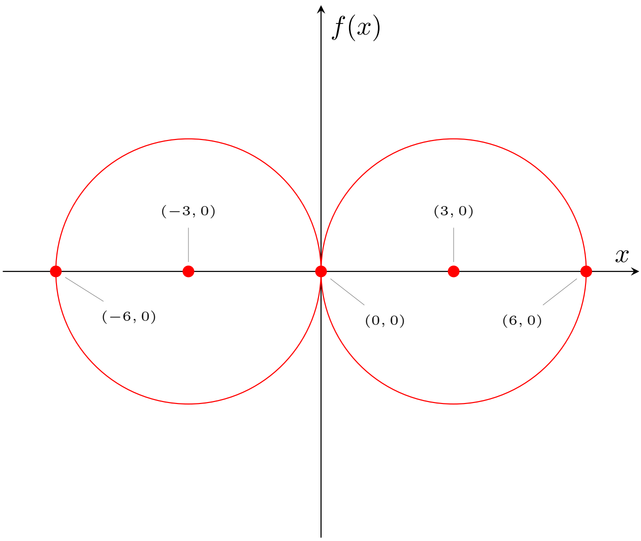
$$\left|x + \frac{2}{x}\right| = \left|y + \frac{2}{y}\right|.$$

27.

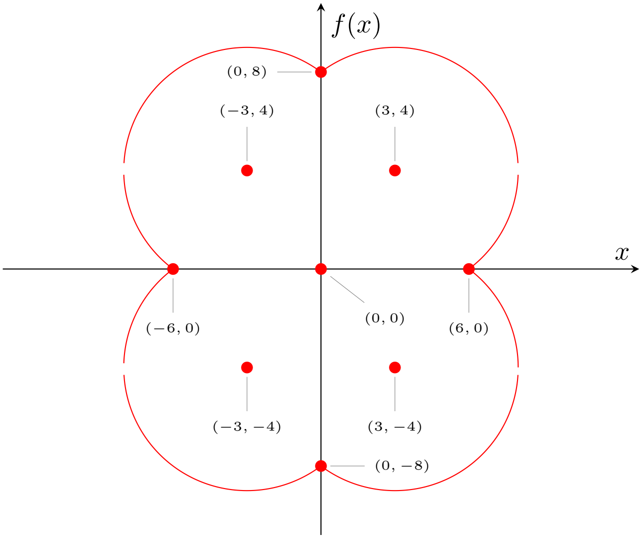


$$x^2 - 6|x| + y^2 = 0.$$

28.

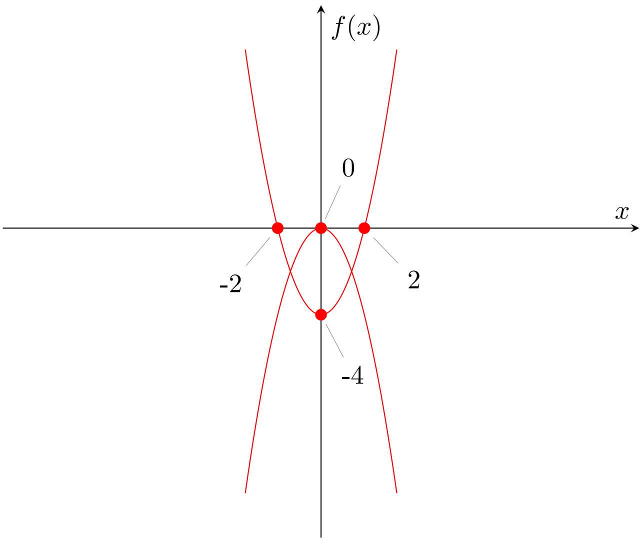


$$x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0.$$



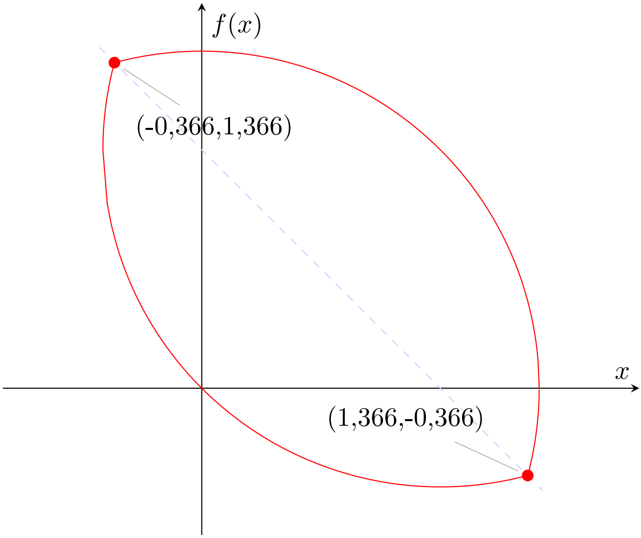
29.

$$x^4 - 4x^2 = y^2 + 4y.$$



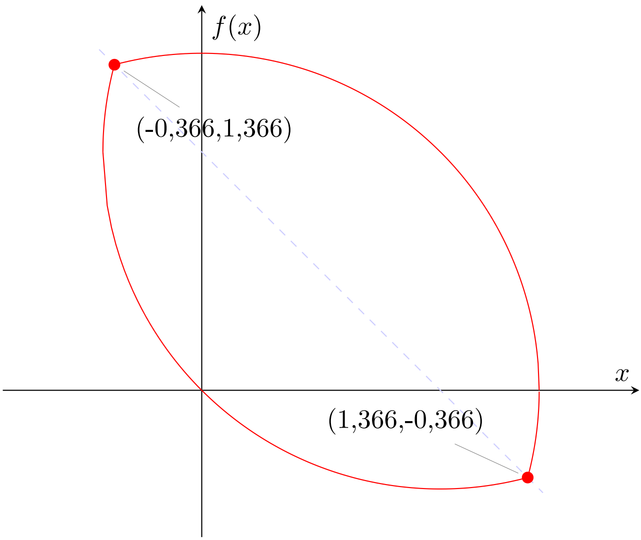
30.

$$x^2 + y^2 = \min(2x + 2y; 2).$$



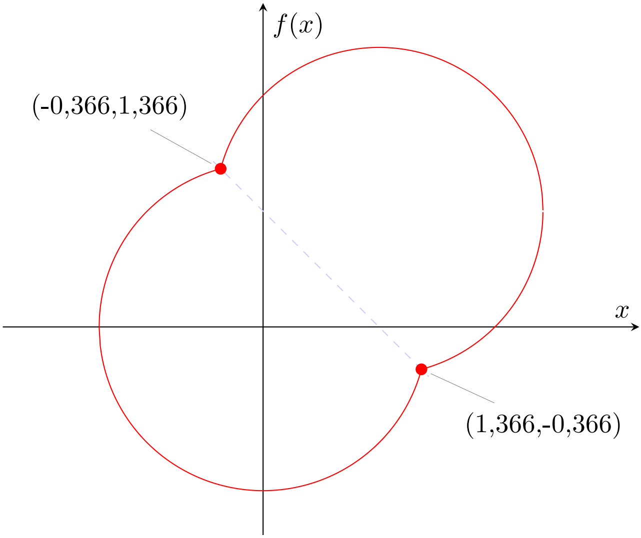
31. $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

$$x^2 + y^2 = x + y + 1 - |x + y - 1|.$$



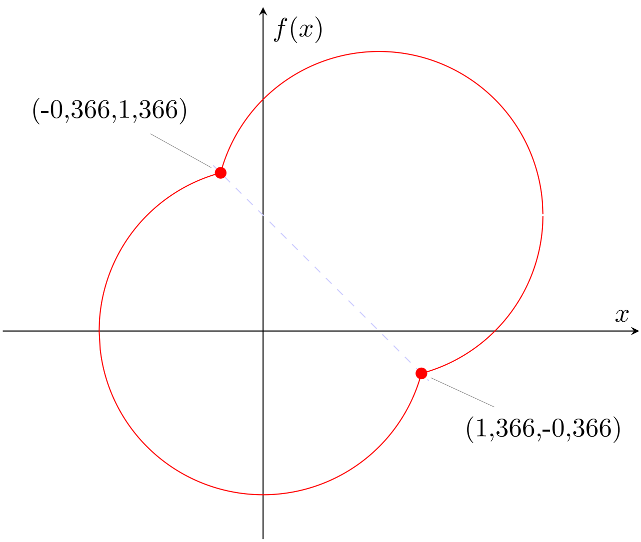
32. $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

$$x^2 + y^2 = \max(2x + 2y; 2).$$



33. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

$$x^2 + y^2 = x + y + 1 + |x + y - 1|.$$



34. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

Указания:

6. Однородное уравнение относительно переменных x и y.

7. Квадратное уравнение относительно переменной y.

31-32. Используйте идею, что $\min(a; b) = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

33-34. Используйте идею, что $\max(a; b) = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

Задачи для решения дома:

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют уравнению:

1. $2|y-3| = x+2.$
2. $x - 3 = 6y - 2y^2.$
3. $|y+2x| = 2.$
4. $|2y+x| = y+1.$
5. $x^2y^2 - 4xy = 9x^2 + 12x.$
6. $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 0.$
7. $2y^2 - 6x^2 - xy - 23x - 6y - 20 = 0.$
8. $|x - 2y + 4| = |2y - 3x - 4|.$
9. $|y| = 2x^2 - x.$
10. $|y| = 3|x| - \dfrac{x^2}{2} - 4.$
11. $(y+1)|x| = 2y.$
12. $|y| = 2 - \sqrt{x-3}.$
13. $|x| = -6y - y^2.$
14. $|2y-1| = x|3y|.$
15. $y = \left|-\sqrt{4-2x}+3\right|.$
16. $|y| = \left|\sqrt{x-4}+1\right|.$
17. $|x| + 3|y| = 3.$
18. $|x-2| + 3|y+1| = 3.$
19. $2|y| - 3|x| = 4.$
20. $\Big|2|y| - 3|x|\Big| = 4.$
21. $\Big||y+1-x| + |y+1+x|\Big| = 4.$
22. $\dfrac{(y^2-4x^4)(xy+2)}{x^2+y^2-5} = 0.$
23. $\dfrac{(3|y|-4|x|-6)(x^2+y^2-14y+24)}{x^2+y^2-14y+40} = 0.$
24. $x - \dfrac{3}{x} = y - \dfrac{3}{y}.$
25. $|x| - \dfrac{3}{|x|} = |y| - \dfrac{3}{|y|}.$
26. $\left|x - \dfrac{3}{x}\right| = \left|y - \dfrac{3}{y}\right|.$
27. $x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| + 4 = 0.$
28. $x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| = 0.$
29. $x^4 - 6x^2 = 4y^2 + 12|y|.$

Изобразите на координатной плоскости кривую, заданную уравнением, и вычислите её длину:

30. $x^2 + y^2 = \min(4x - 2y; 5)$.

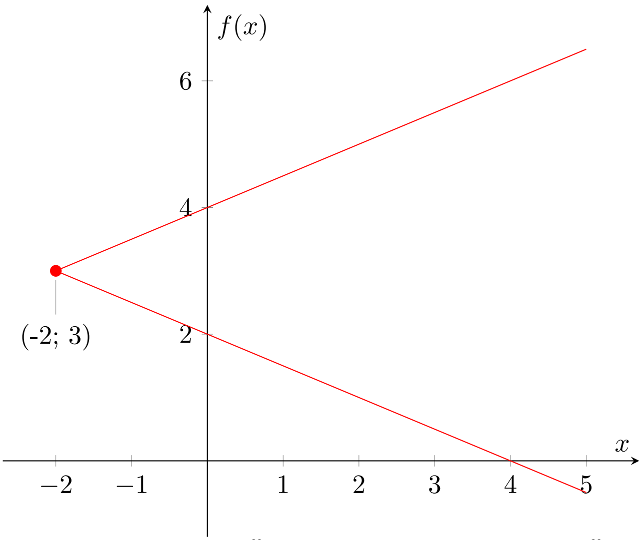
31. $2x^2 + 2y^2 = 4x - 2y + 5 - |4x - 2y - 5|$.

32. $x^2 + y^2 = \max(4x - 2y; 5)$.

33. $2x^2 + 2y^2 = 4x - 2y + 5 - |4x - 2y - 5|$.

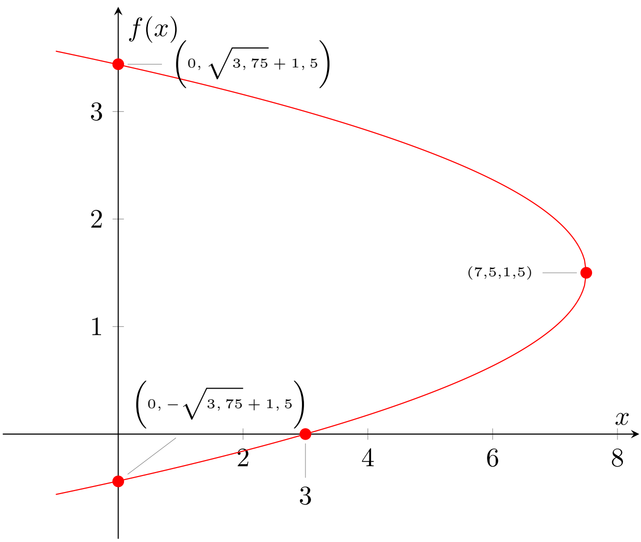
Ответы:

1. $$2|y-3| = x+2.$$

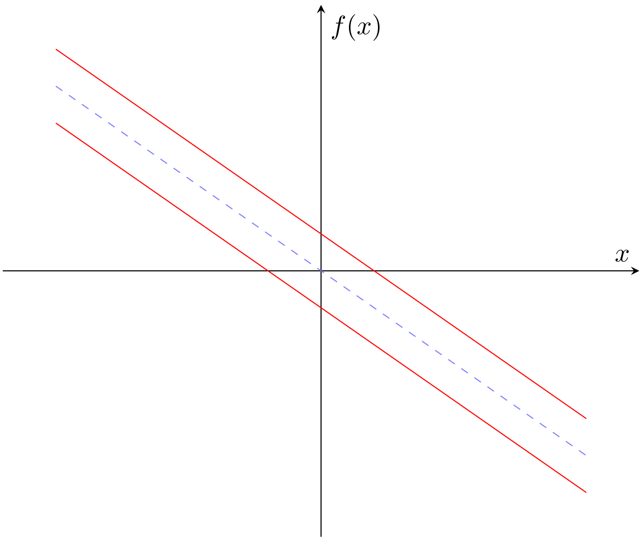


Верхняя ветка: $y = \dfrac{x}{2} + 4$, нижняя ветка: $y = -\dfrac{x}{2} - 1$.

2. $$x - 3 = 6y - 2y^2.$$

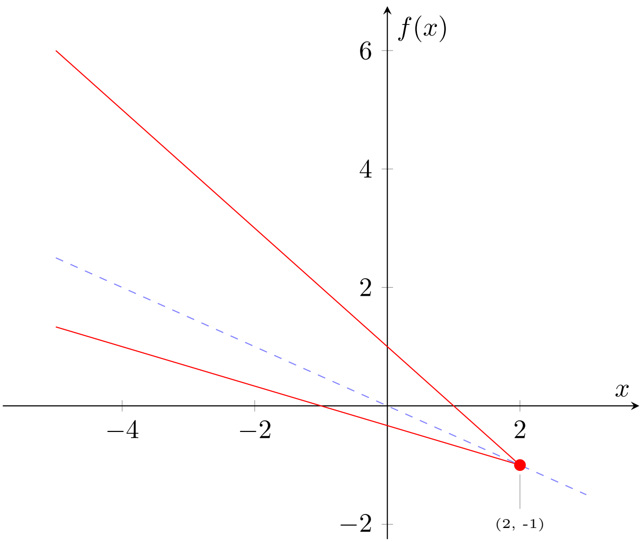


$$|y + 2x| = 2.$$

3. 

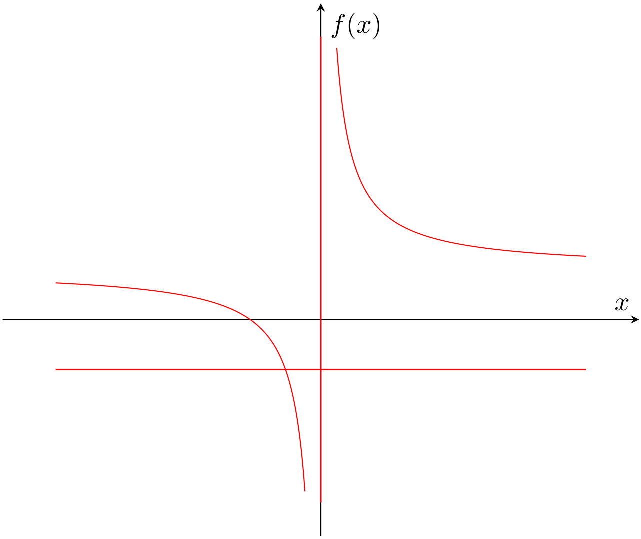
Верхняя ветка: $y = 2 - 2x$, нижняя ветка: $y = -2 - 2x$.

$$|2y + x| = y + 1.$$

4. 

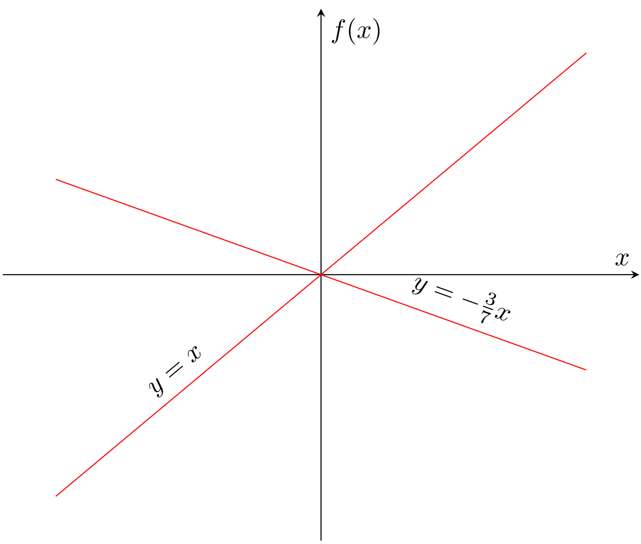
Верхняя ветка: $y = 1 - x$, нижняя ветка: $y = -\dfrac{x+1}{3}$.

$$x^2y^2 - 4xy = 9x^2 + 12x.$$



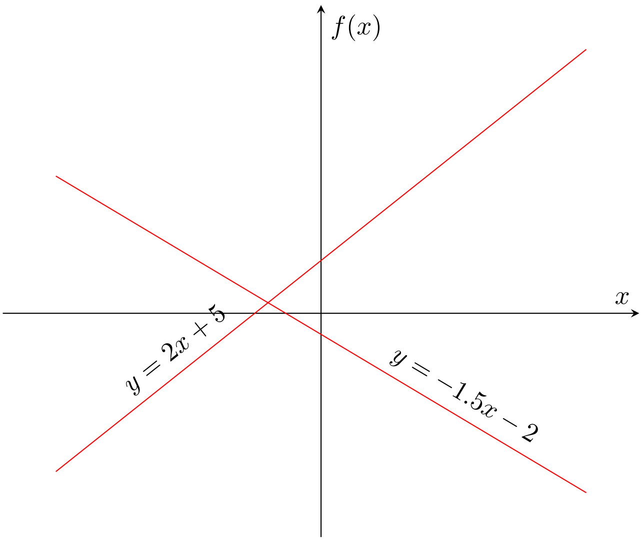
5.

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = 0.$$

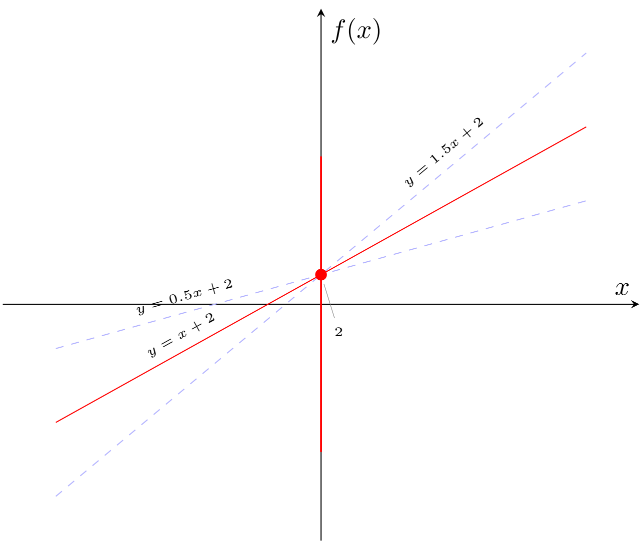


6.

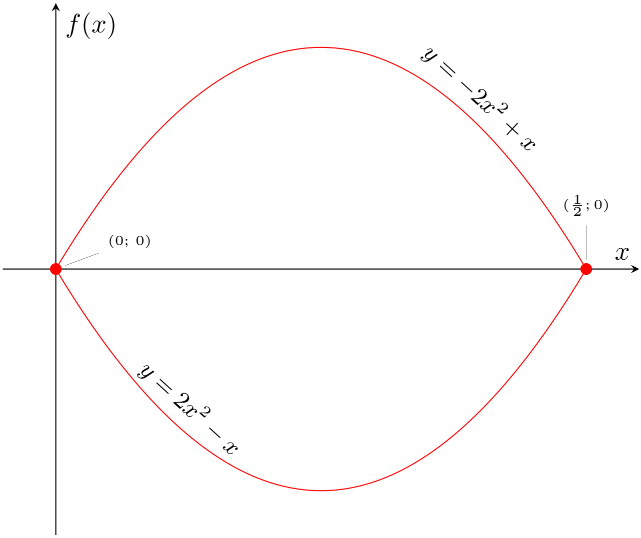
$$2y^2 - 6x^2 - xy - 23x - 6y - 20 = 0.$$

7. 

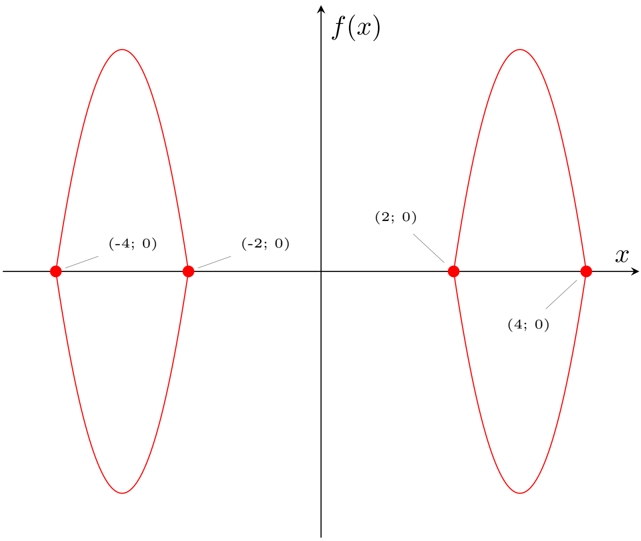
$$|x - 2y + 4| = |2y - 3x - 4|.$$

8. 

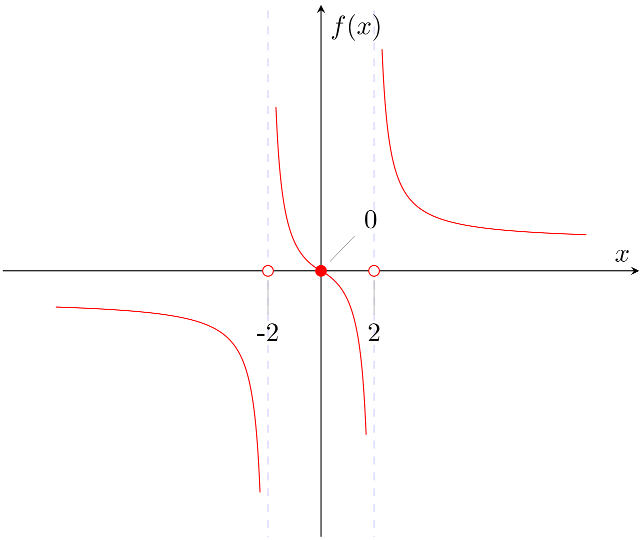
$$|y| = 2x^2 - x.$$

9. 

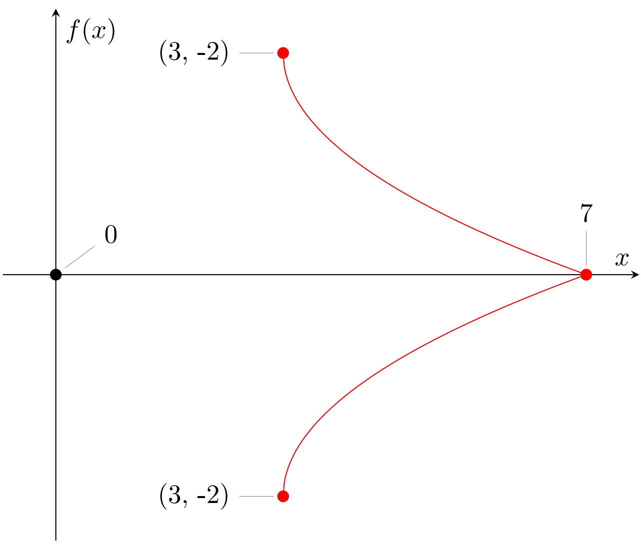
$$|y| = 3|x| - \frac{x^2}{2} - 4.$$

10. 

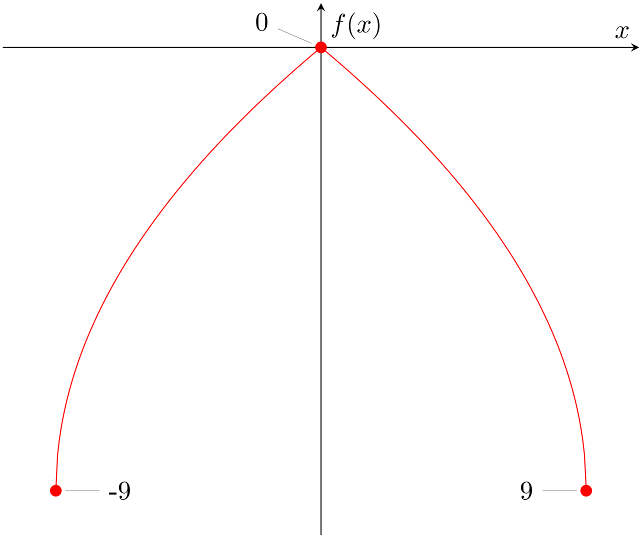
$$(y+1)|x| = 2y.$$

11. 

$$|y| = 2 - \sqrt{x-3}.$$

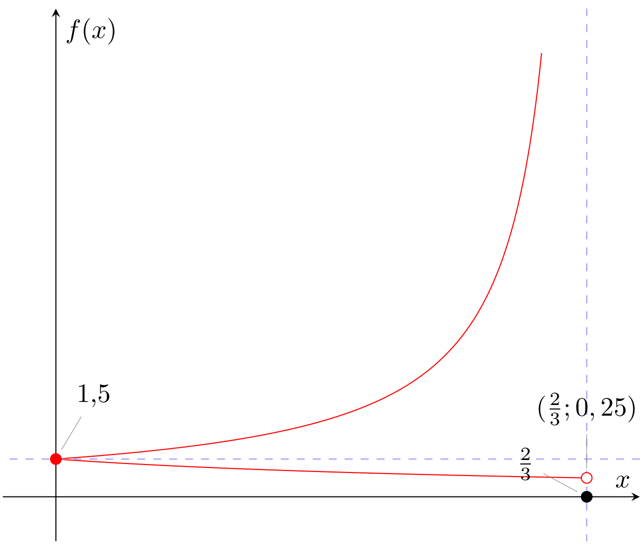
12. 

$$|x| = -6y - y^2.$$



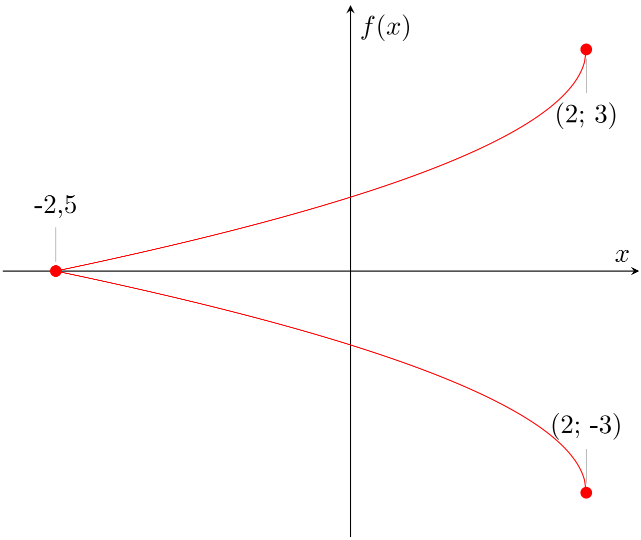
13.

$$|2y - 1| = x|3y|.$$



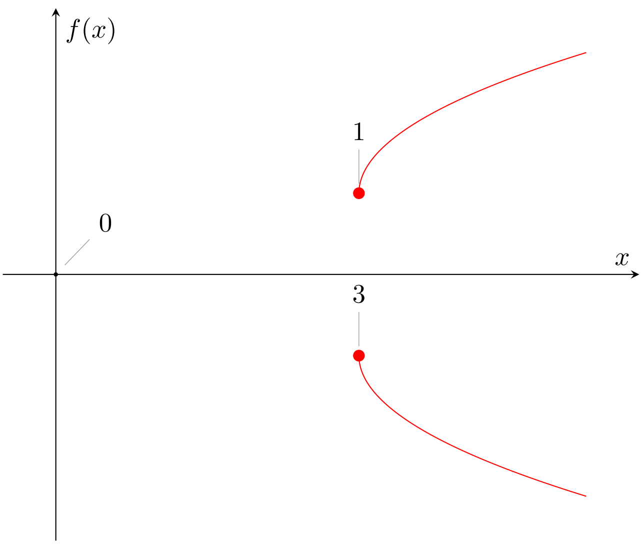
14.

$$y = \left|-\sqrt{4-2x}+3\right|.$$



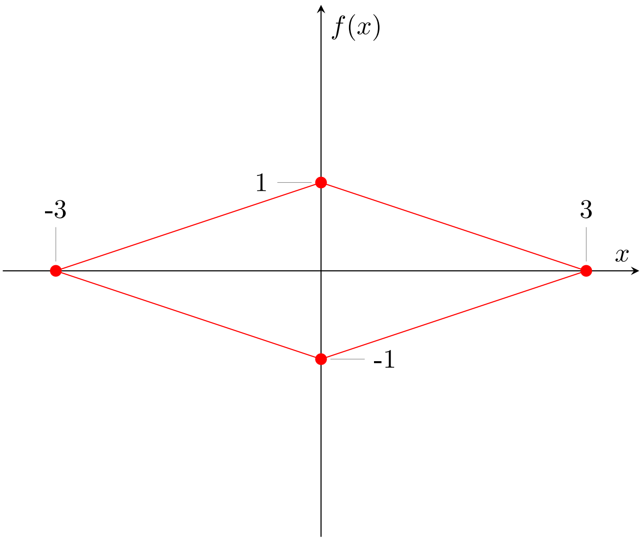
15.

$$|y| = \left|\sqrt{x-4}+1\right|.$$



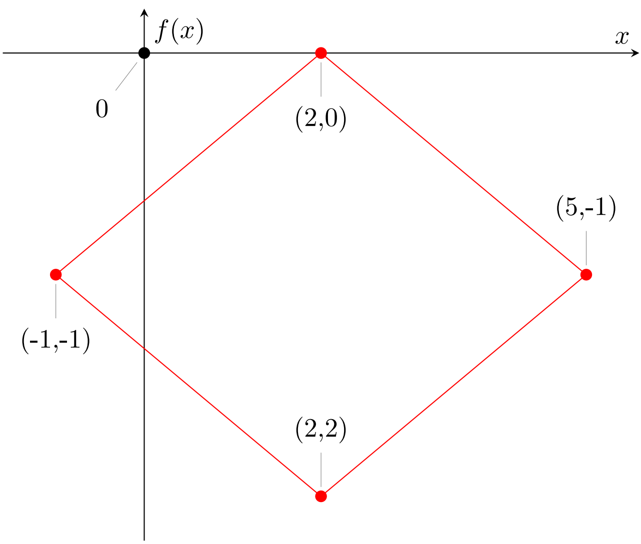
16.

$$|x| + 3|y| = 3.$$



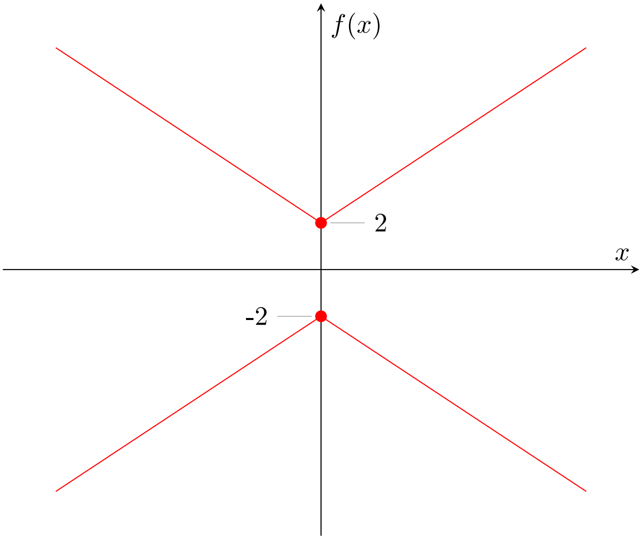
17.

$$|x - 2| + 3|y + 1| = 3.$$



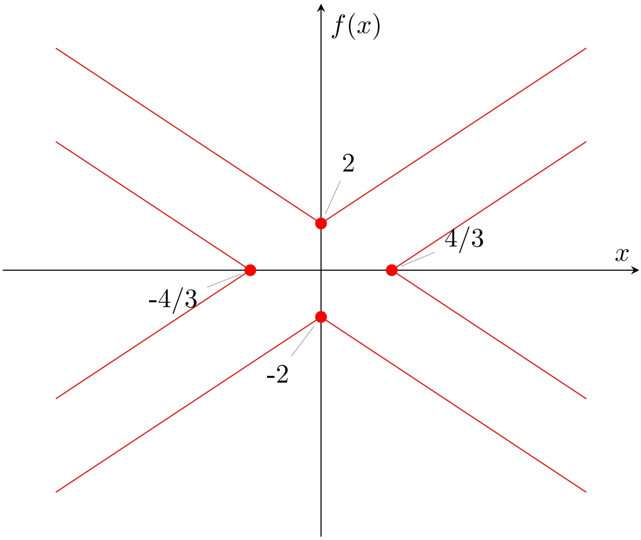
18.

$$2|y| - 3|x| = 4.$$



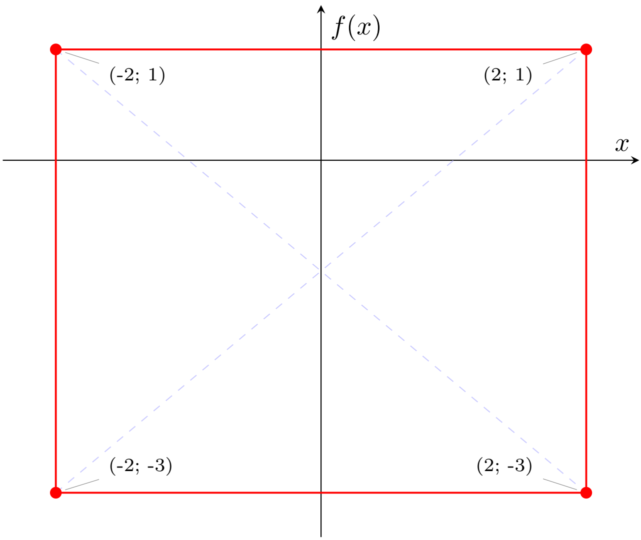
19.

$$\Big|2|y| - 3|x|\Big| = 4.$$



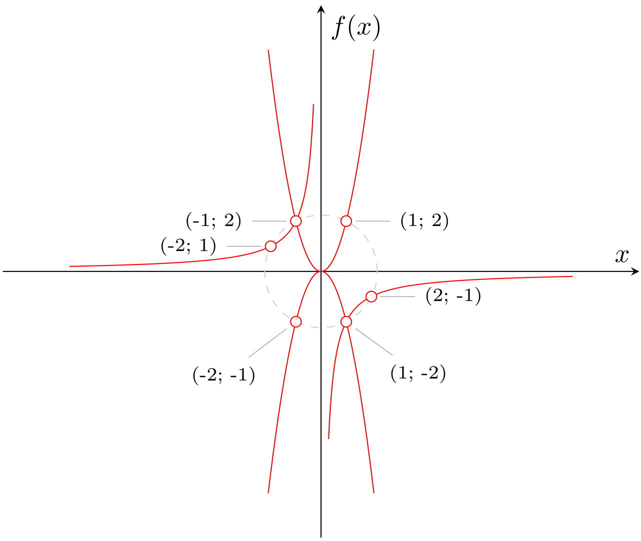
20.

$$\Big||y+1-x|+|y+1+x|\Big| = 4.$$



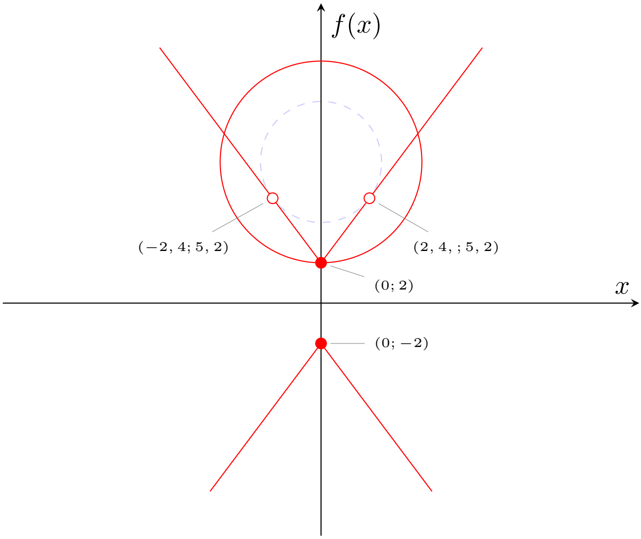
21.

$$\frac{(y^2-4x^4)(xy+2)}{x^2+y^2-5} = 0.$$



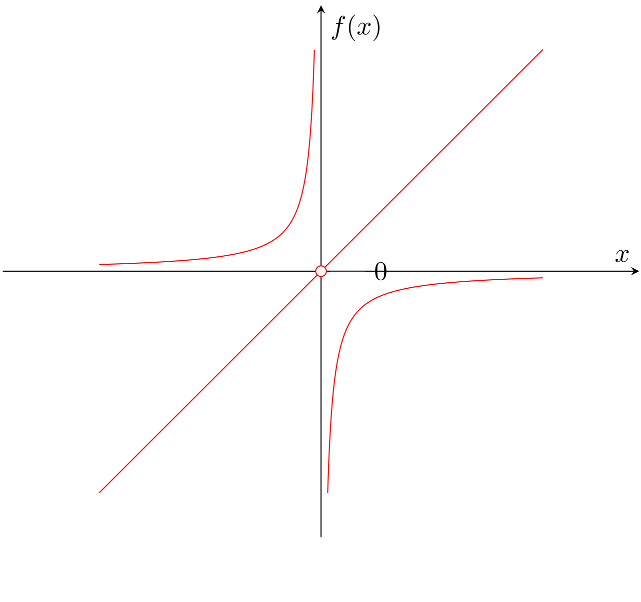
22.

$$\frac{(3|y|-4|x|-6)(x^2+y^2-14y+24)}{x^2+y^2-14y+40}=0.$$



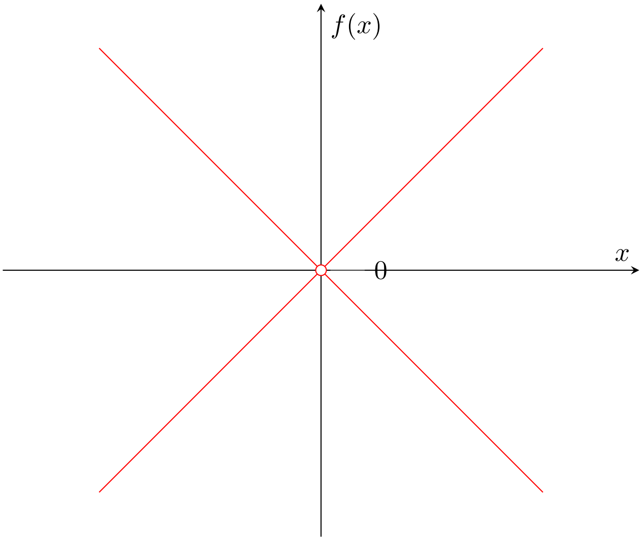
23.

$$x-\frac{3}{x}=y-\frac{3}{y}.$$



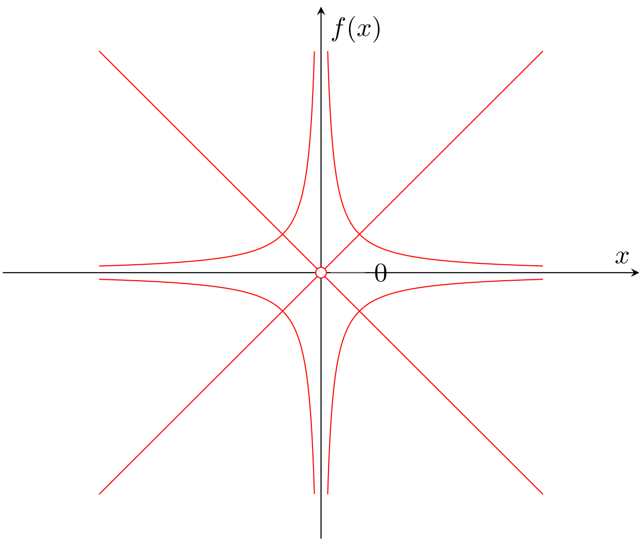
24.

$$|x| - \frac{3}{|x|} = |y| - \frac{3}{|y|}.$$



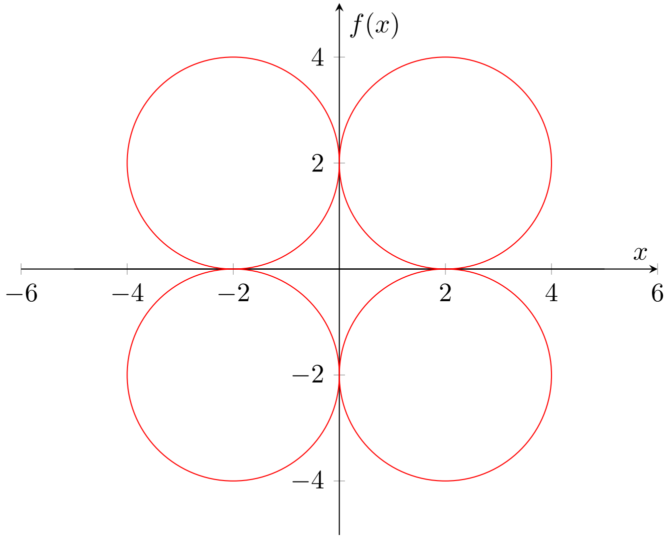
25.

$$\left|x - \frac{3}{x}\right| = \left|y - \frac{3}{y}\right|.$$



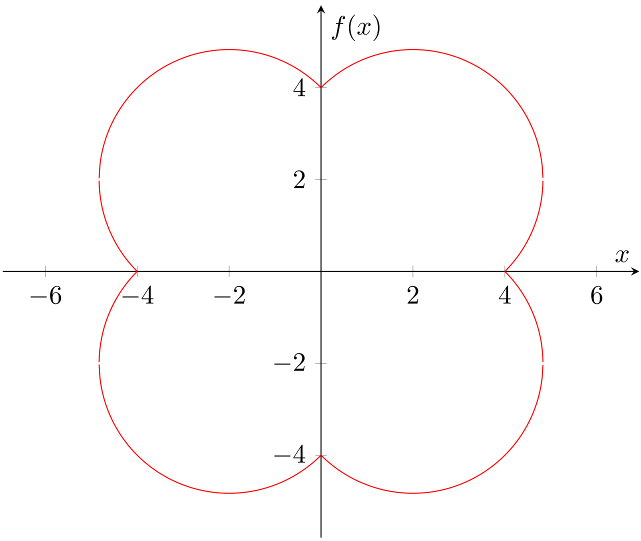
26.

$$x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| + 4 = 0.$$



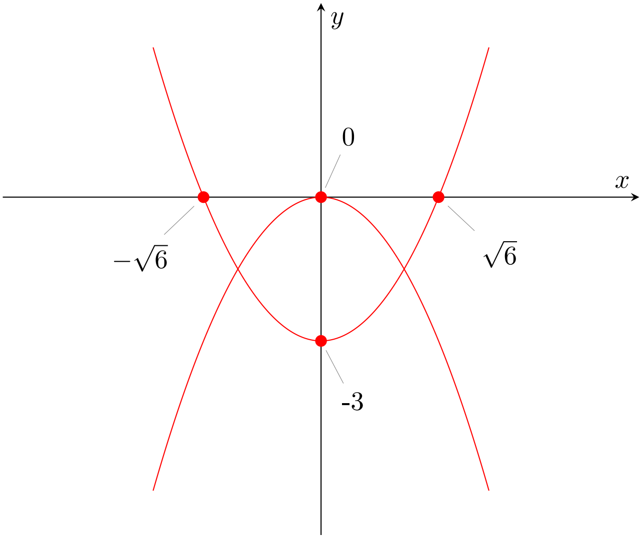
27.

$$x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| = 0.$$



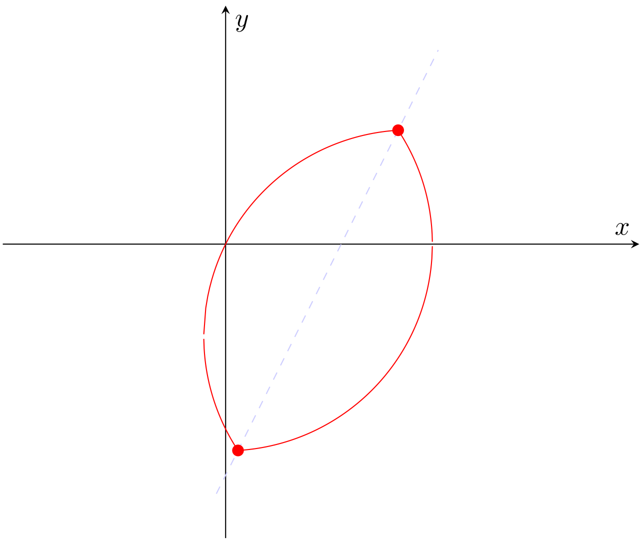
28.

$$x^4 - 6x^2 = 4y^2 + 12|y|.$$



29.

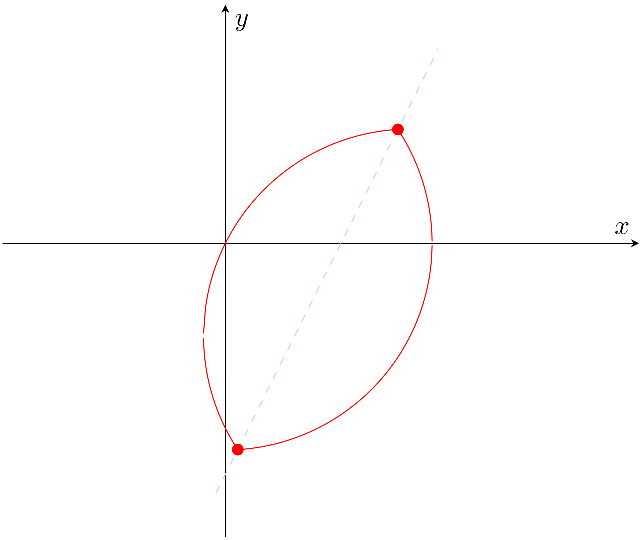
$$x^2 + y^2 = \min(4x - 2y; 5).$$



30.

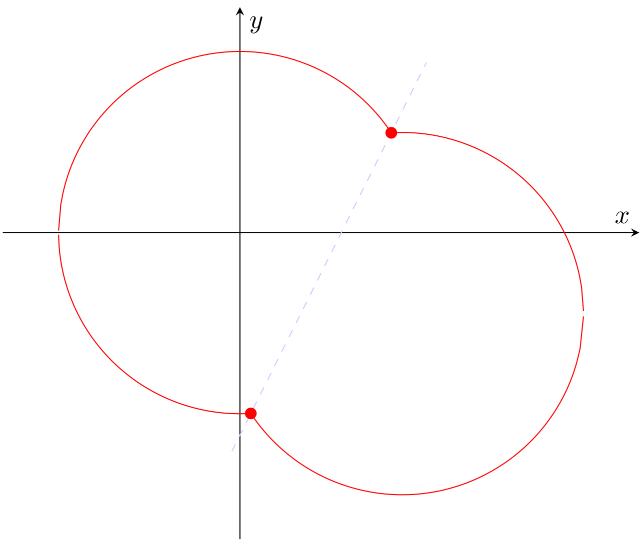
$$\frac{4\sqrt{5}\pi}{3}.$$

$$2x^2 + 2y^2 = 4x - 2y + 5 - |4x - 2y - 5|.$$



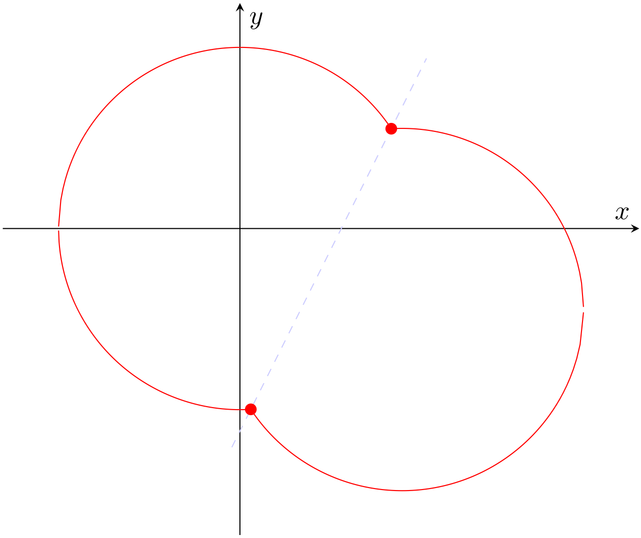
31. $\dfrac{4\sqrt{5}\pi}{3}$.

$$x^2 + y^2 = \max(4x - 2y; 5).$$



32. $\dfrac{8\sqrt{5}\pi}{3}$.

$$2x^2 + 2y^2 = 4x - 2y + 5 - |4x - 2y - 5|.$$



33. $$\frac{8\sqrt{5}\pi}{3}.$$

Задание фигур на координатной плоскости неравенствами.

Задачи для решения в классе:

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству:

1. $y < 2|x-1| + 2$.
2. $(|x|-2)(y+1)(y+2)^2 \geqslant 0$.
3. $|x(y-2)| \leqslant 3$.
4. $\dfrac{y - x^2 + 4|x| - 3}{2y^2 - x^2 - xy - 6x - 3y - 9} \geqslant 0$.
5. $|y-3| + 2 \geqslant \sqrt{x+1}$.
6. $(x^4 - y^2)(y + 2 + \sqrt{x+1}) > 0$.
7. $|x-2| + 2|y-3| \leqslant 2$.
8. $x^2 + y^2 - 6|x| + 2y - 15 \leqslant 0$.
9. $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| \geqslant 0$.
10. $x^2 + y^2 \geqslant \max(2x + 2y; 2)$.

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству (системе неравенств), и вычислите ее площадь.

11. $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leqslant 4(1 - \sqrt{xy})$.
12. $\begin{cases} (x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 \leqslant 4, \\ y + 2x \leqslant 0. \end{cases}$
13. $|x-1| + |y-2| + |x-y+1| \leqslant 2$.

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leqslant 0, \\ y \geqslant |x-2| + 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y - 1 \leqslant \sqrt{2x - x^2}, \\ x - 1 \leqslant \sqrt{2y - y^2}. \end{cases}$

16. $x^2 + y^2 \leqslant \min(2x + 2y; 2)$.

17. $\begin{cases} |y| + |y+4| \leqslant 4, \\ \dfrac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geqslant 0. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений:

18. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = \dfrac{4x^2 - x^4}{x^2 - 4}. \end{cases}$

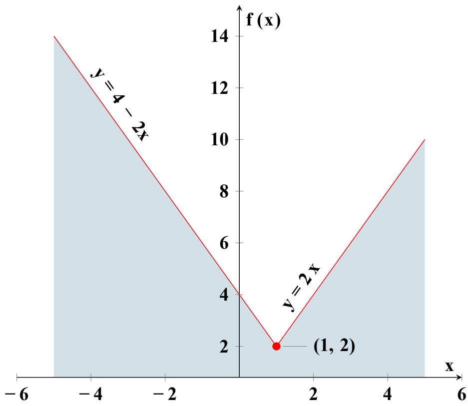
19. $\begin{cases} 2x = y + 4, \\ y = \sqrt{|x+1|}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - 3y + 12 = 0, \\ y = \sqrt{16 + 6x - x^2}. \end{cases}$

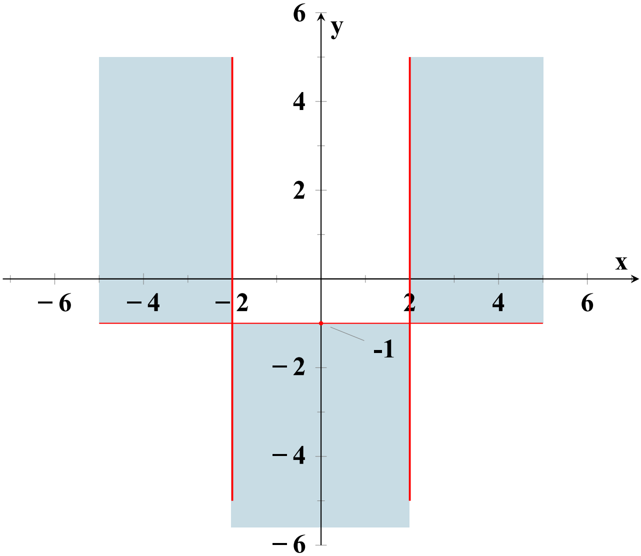
21. $\begin{cases} |y| = x^3 - 6x^2 + 12x - 8, \\ x^2 + y^2 = 6x - 8. \end{cases}$

Ответы:

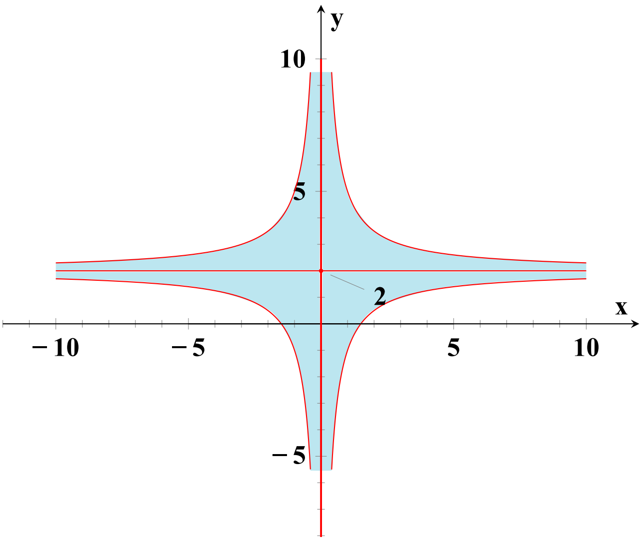
$$y < 2|x - 1| + 2.$$

1. 

$$(|x| - 2)(y + 1)(y + 2)^2 \geq 0.$$

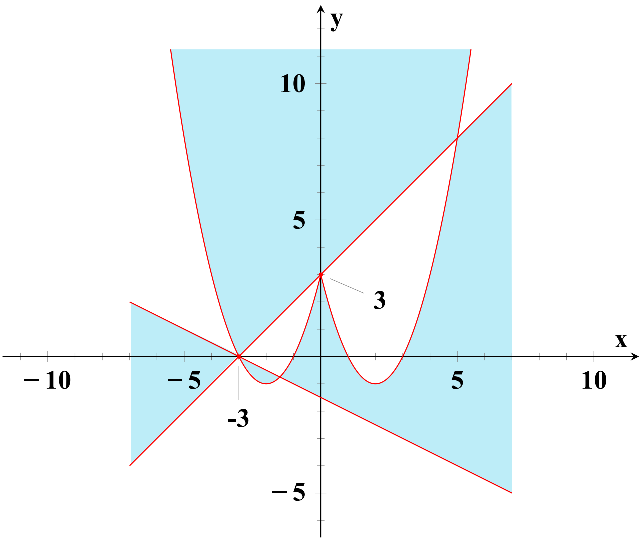
2. 

$$|x(y-2)| \leq 3.$$



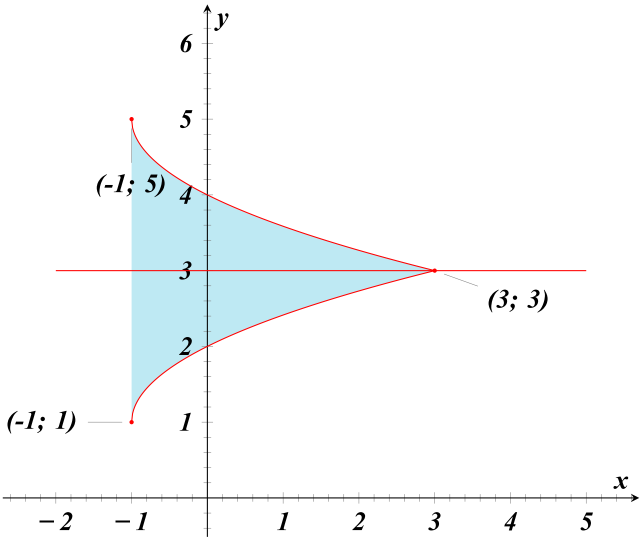
3.

$$\frac{y - x^2 + 4\,|x| - 3}{2y^2 - x^2 - xy - 6x - 3y - 9} \geq 0.$$

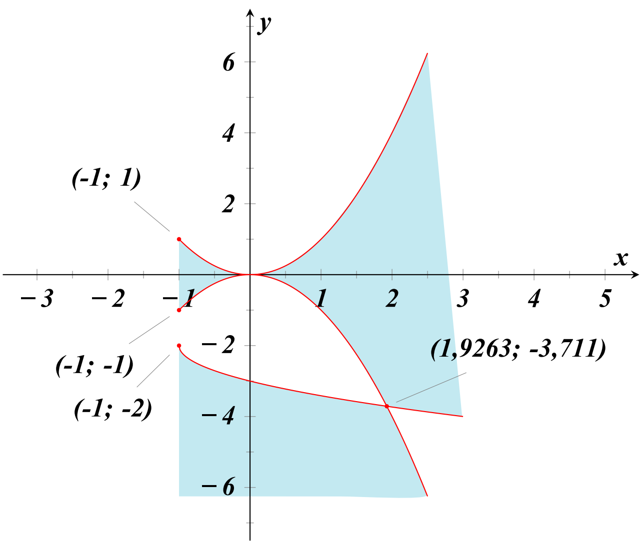


4.

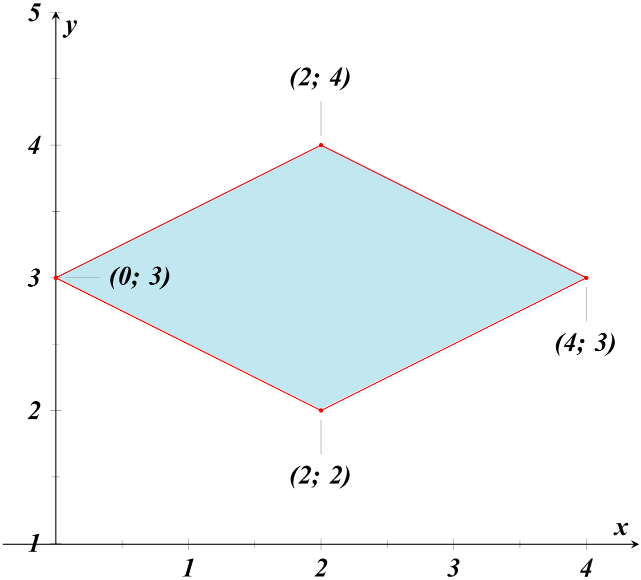
$$|y-3|+2 \geq \sqrt{x+1}.$$

5. 

$$(x^4-y^2)(y+2+\sqrt{x+1}) > 0.$$

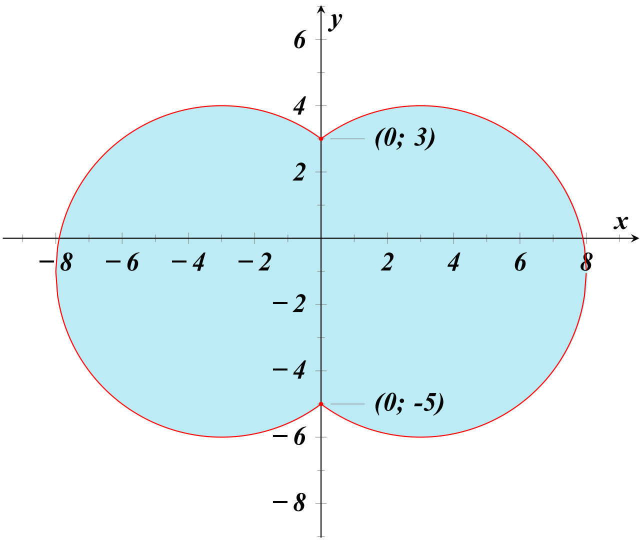
6. 

$$|x-2|+2|y-3|\le 2.$$

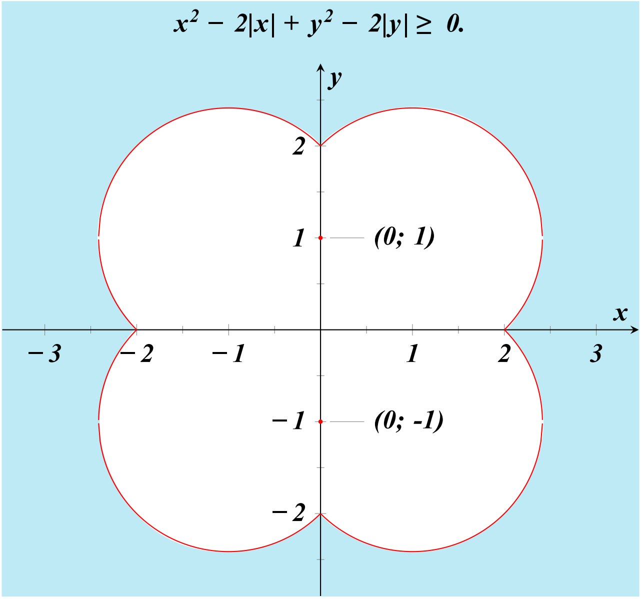


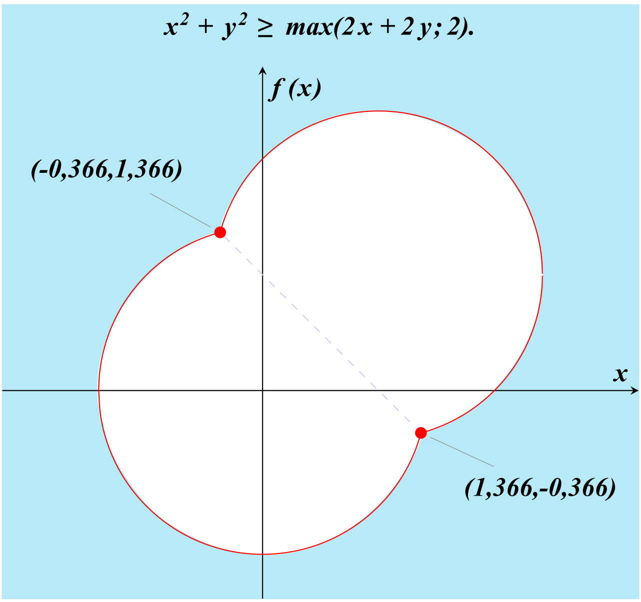
7.

$$x^2+y^2-6|x|+2y-15\le 0.$$

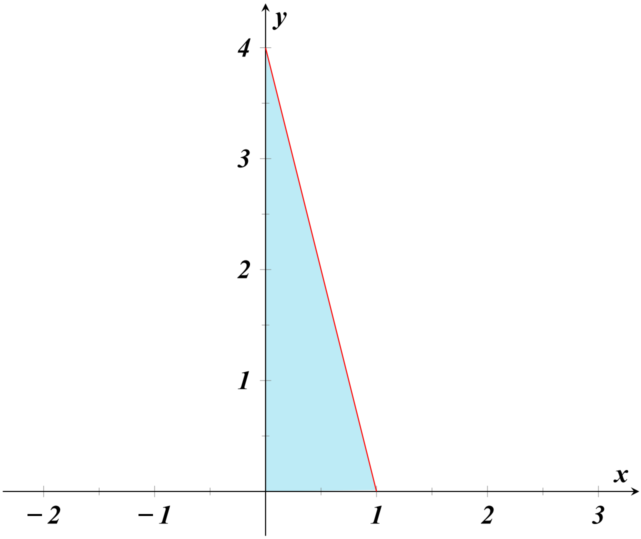


8.

9. 
$x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| \geq 0.$
y
x
2
1
(0; 1)
− 1
(0; -1)
− 2
− 3
− 2
− 1
1
2
3

10. 
$x^2 + y^2 \geq max(2x + 2y; 2).$
f (x)
x
(-0,366,1,366)
(1,366,-0,366)

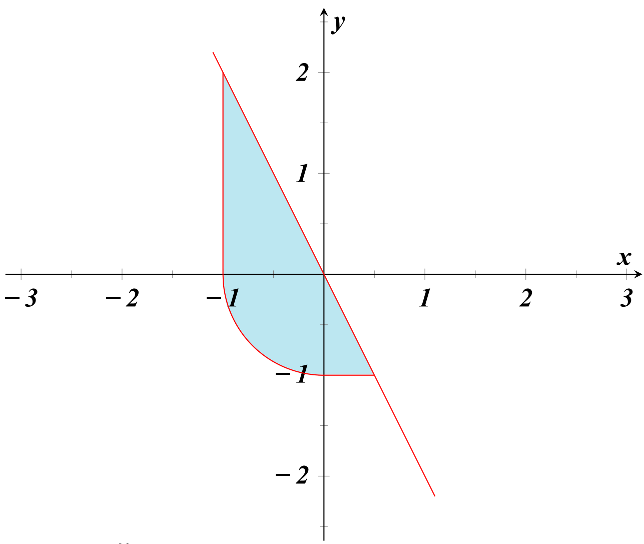
$$(2\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \le 4(1-\sqrt{xy}).$$



11.

$S = 2.$

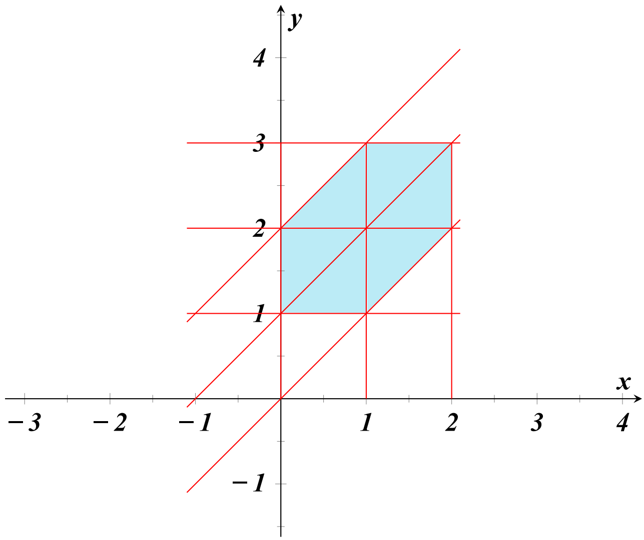
$$\begin{cases}(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 \le 4,\\ y+2x \le 0.\end{cases}$$



12.

$S = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}.$

$$|x-1|+|y-2|+|x-y+1|\leq 2.$$

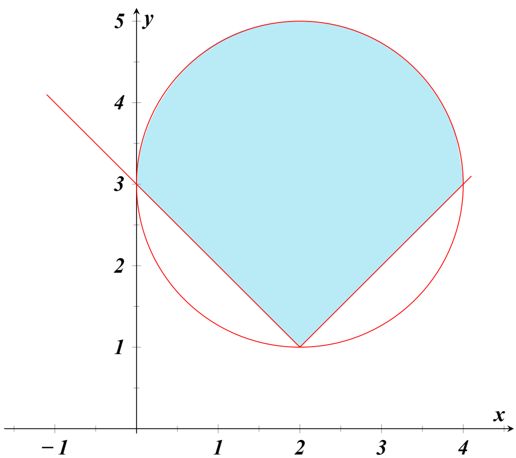


13.

$S=3.$

14.

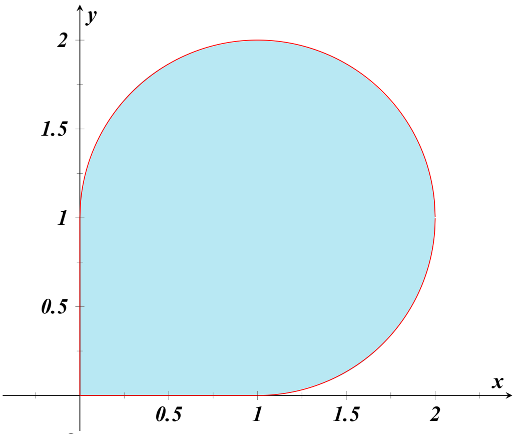
$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y+9\leq 0, \\ y\geq |x-2|+1. \end{cases}$$



$S=2\pi+4.$

15.

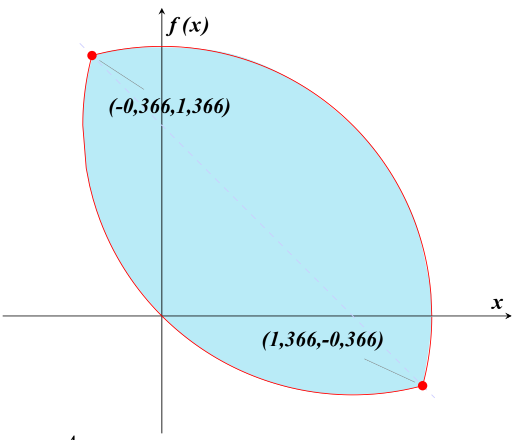
$$\begin{cases} y-1 \leq \sqrt{2x-x^2}, \\ x-1 \leq \sqrt{2y-y^2}. \end{cases}$$



$$S = \frac{3\pi}{4} + 1.$$

16.

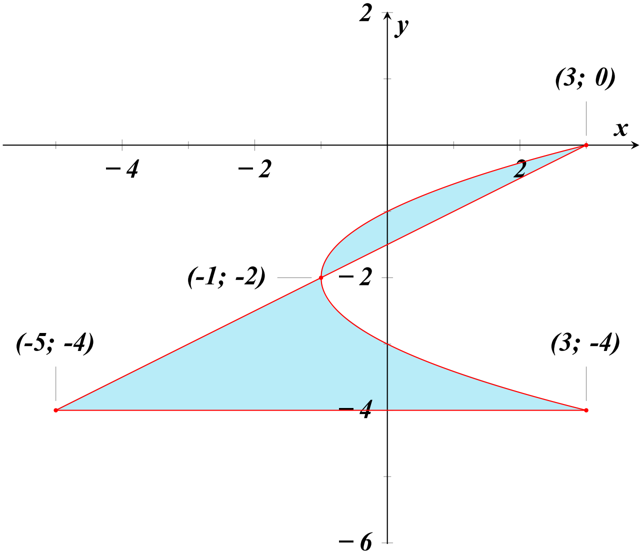
$$x^2 + y^2 \leq \min(2x + 2y; 2).$$



$$S = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} |y| + |y+4| \leq 4, \\ \dfrac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

17.



$S = 8$.

18. $(3; -3)$.

19. $(3; 2)$.

20. $(0; 4), (3; 5)$.

21. $(2; 0), (3; -1), (3; 1)$.

Указания:

7. Фигура симметрична относительно точки $(2; 3)$.

10. Используйте идею, что $c \geqslant \max(a; b) \Leftrightarrow c \geqslant a$ и $c \geqslant b$.

16. Используйте идею, что $c \leqslant \min(a; b) \Leftrightarrow c \leqslant a$ и $c \leqslant b$.

Задачи для решения дома:

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют неравенству:

1. $2x \geqslant -|y-1|+6$.
2. $\dfrac{|x-y|-1}{|y|-2} \leqslant 0$.
3. $|xy+2x-y-2| \geqslant 2$.
4. $\dfrac{(y-x^2+6|x|-8)(x^3-3x+2)}{2y^2-x^2-xy+4x+2y-4} \geqslant 0$.
5. $|y-2|+1 > \sqrt{3-x}$.
6. $(y^4-2y^2-x^2-2x)(x-2-\sqrt{y+3}) > 0$.
7. $2|x+3|+|y-1| > 2$.
8. $|2x-y-1|+|2x+y-3| \leqslant 4$.
9. $x^2-2x-2|x-1|+y^2+4y-2|y+2|+5 \geqslant 0$.
10. $x^2+y^2 \geqslant \min(4x-2y;5)$.

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют неравенству (системе неравенств), и вычислите ее площадь.

11. $3xy+(x-\sqrt{xy}-y)(x+\sqrt{xy}-y) \leqslant 4$.
12. $\begin{cases}(x+|x|)^2+(y-|y|)^2 \leqslant 16,\\ y-3x \leqslant 0.\end{cases}$
13. $|x+2|+|y-1|+|x+y+1| < 4$.
14. $|4x|+|3y|+|24-4x-3y| = 24$.

15. $\begin{cases} y + \sqrt{2x - x^2} \leqslant 2, \\ y + \sqrt{2} \geqslant 1 + x. \end{cases}$

16. $x^2 + y^2 \leqslant \max(4x - 2y; 5)$.

17. $\begin{cases} y + x \geqslant |x - y|, \\ \dfrac{x^2 - 8x + y^2 + 6y}{x + 2y - 8} \leqslant 0. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений (неравенств):

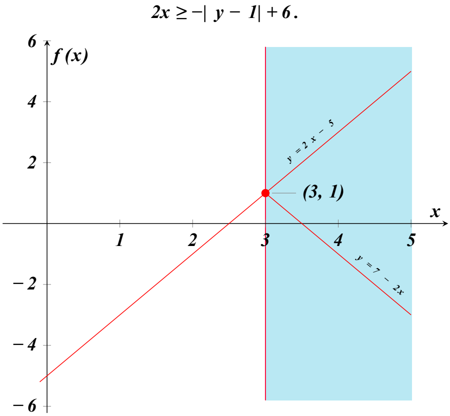
18. $\begin{cases} y + 5x = 12, \\ |y - 1| = (x - 1)^2. \end{cases}$

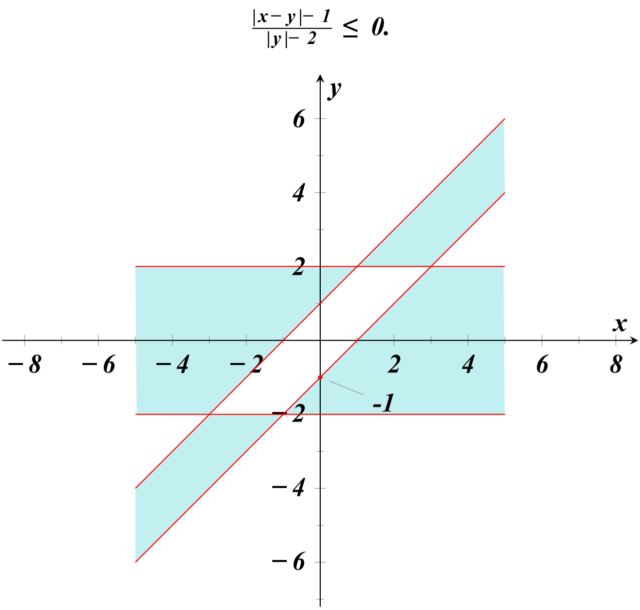
19. $\begin{cases} 4x + 3y = 48, \\ y = \sqrt{10x - x^2} + 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3, \\ x = y^2 + 2y - 1. \end{cases}$

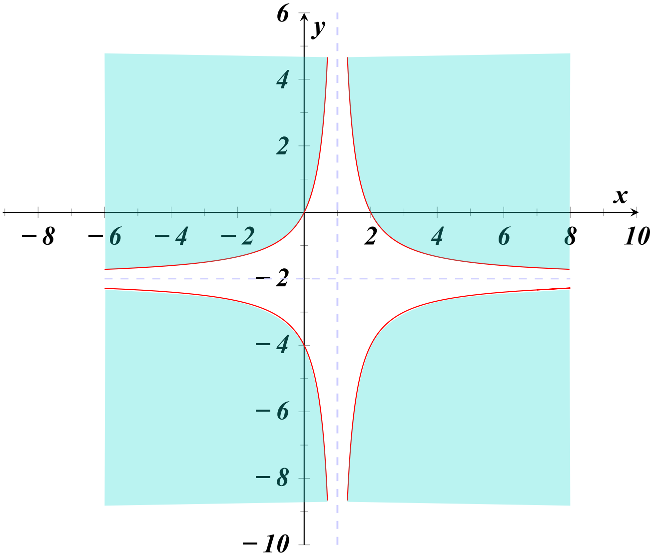
21. $\begin{cases} |x - 3 - y| + |x - 3 + y| \leqslant 6, \\ x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0. \end{cases}$

Ответы:

1. 
2x ≥ −| y − 1| + 6 .
f (x)
(3, 1)
y = 2 x − 5
y = 7 − 2x
x
6
4
2
−2
−4
−6
1
2
3
4
5

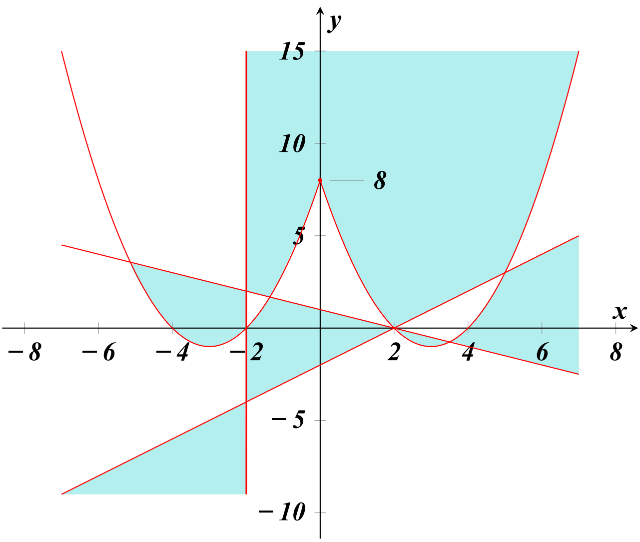
2. 
(|x − y| − 1)/(|y| − 2) ≤ 0.
y
x
-1
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

$$|xy + 2x - y - 2| \geq 2.$$



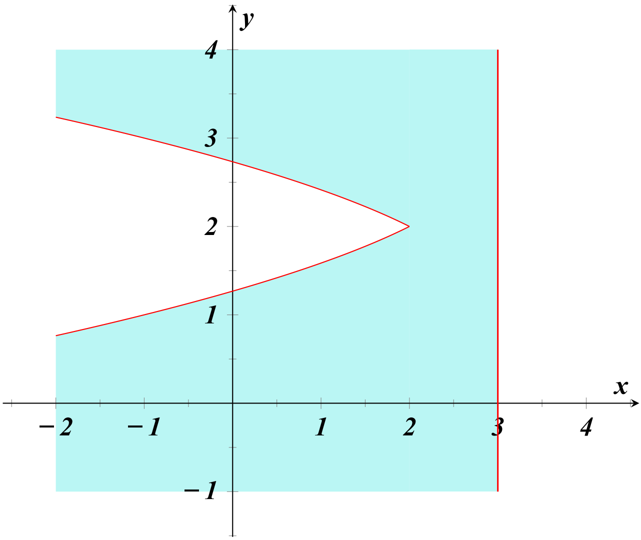
3.

$$\frac{(y - x^2 + 6|x| - 8)(x^3 - 3x + 2)}{2y^2 - x^2 - xy + 4x + 2y - 4} \geq 0.$$



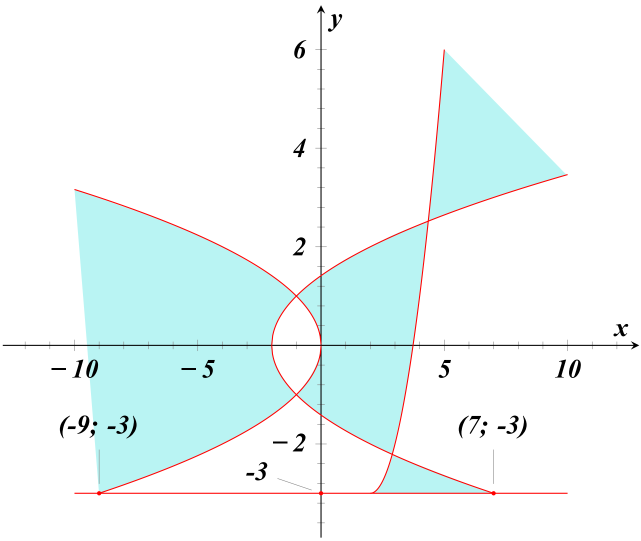
4.

$$|y-2|+1 > \sqrt{3-x}.$$



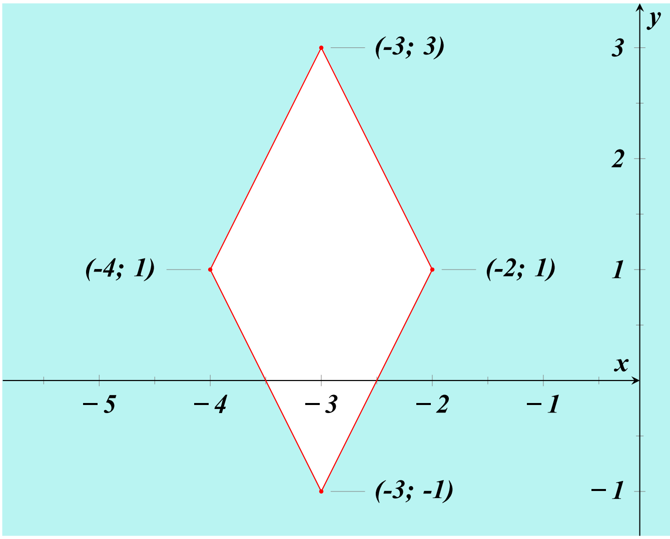
5.

$$(y^4-2y^2-x^2-2x)(x-2-\sqrt{y+3}) > 0.$$

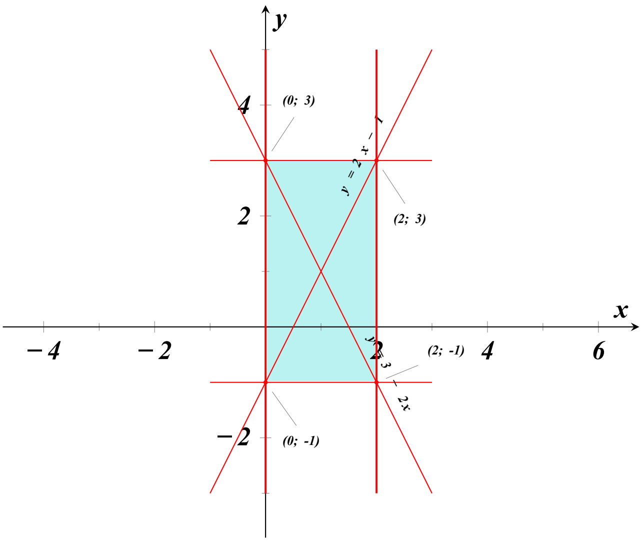


6.

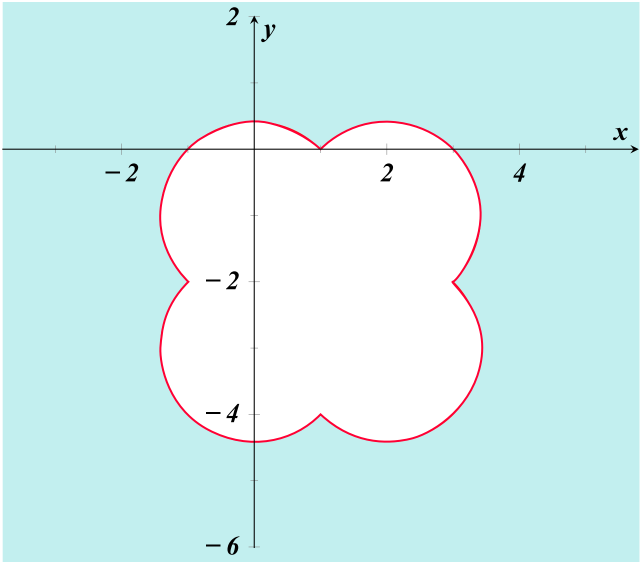
$$2|x+3|+|y-1|>2.$$

7. 

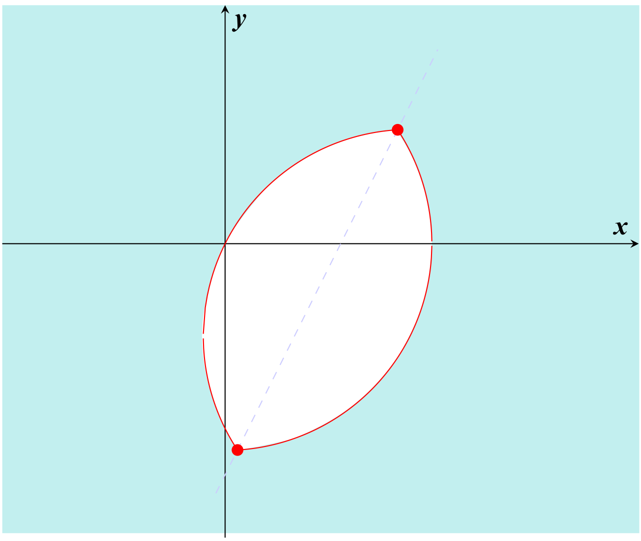
$$|2x-y-1|+|2x+y-3|\leq 4.$$

8. 

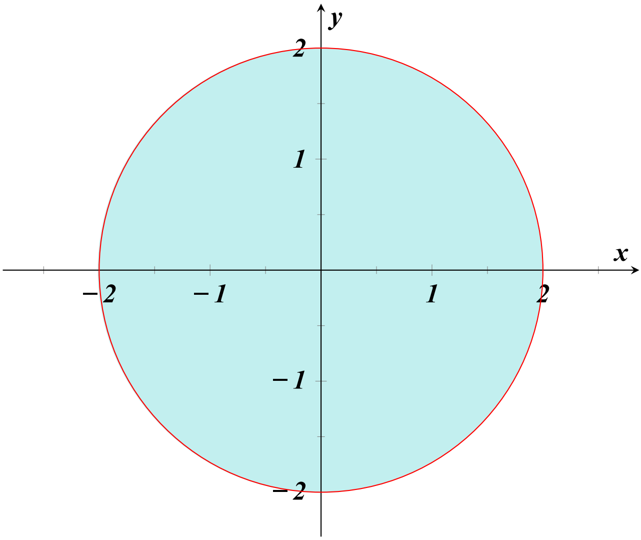
$$x^2 - 2x - 2|x - 1| + y^2 + 4y - 2|y + 2| + 5 \geq 0.$$

9. 

$$x^2 + y^2 \geq \min(4x - 2y; 5).$$

10. 

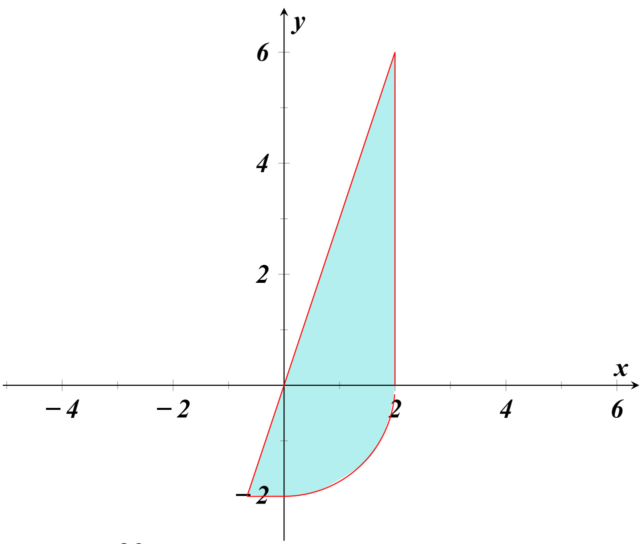
$$3xy + (x - \sqrt{xy} - y)(x + \sqrt{xy} - y) \leq 4.$$



11.

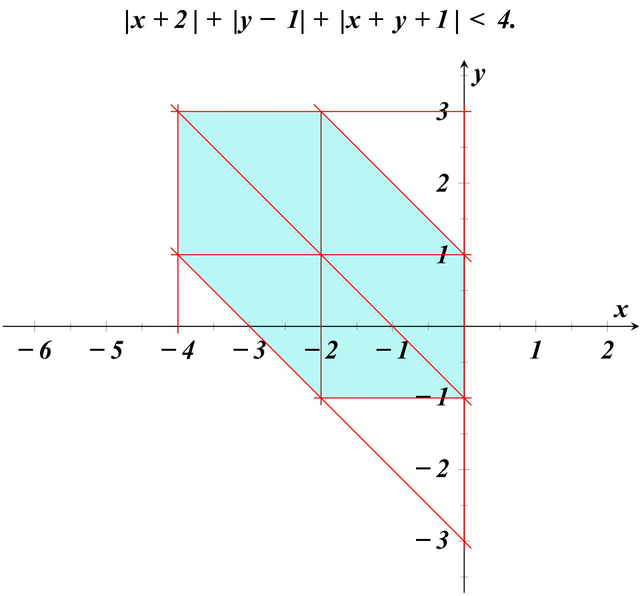
$S = 2\pi.$

$$\begin{cases} (x + |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0. \end{cases}$$



12.

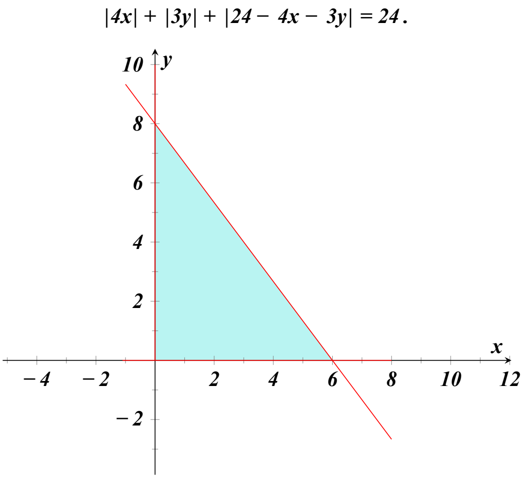
$S = \pi + \dfrac{20}{3}.$


|x + 2 | + |y − 1| + |x + y + 1 | < 4.
y
3
2
1
x
− 6
− 5
− 4
− 3
− 2
− 1
1
2
− 1
− 2
− 3

13.

$S = 12.$

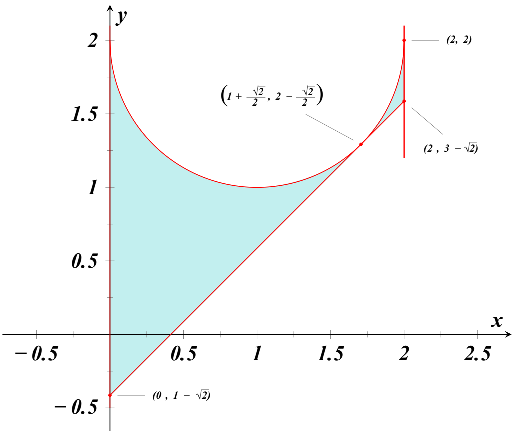
14.


|4x| + |3y| + |24 − 4x − 3y| = 24 .
10
y
8
6
4
2
x
− 4
− 2
2
4
6
8
10
12
− 2

$S = 24.$

15.

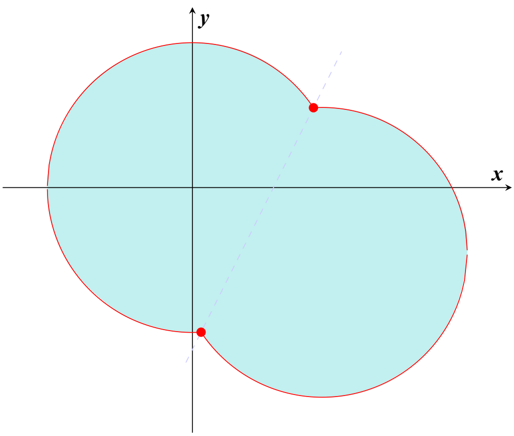
$$\begin{cases} y + \sqrt{2x - x^2} \leq 2, \\ y + \sqrt{2} \geq 1 + x. \end{cases}$$



$$S = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}.$$

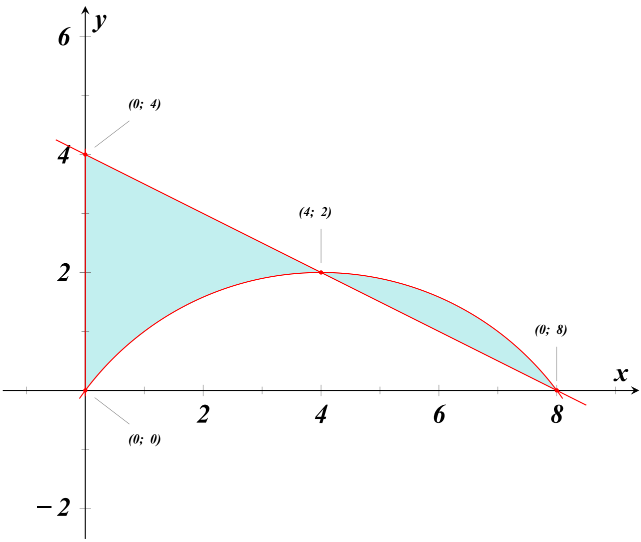
16.

$$x^2 + y^2 \leq \max(4x - 2y; 5).$$



$$S = \frac{20\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{cases} y + x \geq |\, x - y|, \\ \dfrac{x^2 - 8x + y^2 + 6\,y}{x + 2\,y - 8} \leq 0. \end{cases}$$



17. $S = 8$.

18. $(-5; 37), (2; 2), (3; -3), (4; -8)$.

19. $(9; 4)$.

20. $(-2; -1), (-1; 0)$.

21. $(0; 0), (6; 0)$.

Указания:

10. Используйте идею, что $c \geqslant \min(a; b) \Leftrightarrow c \geqslant a$ или $c \geqslant b$.

14. Используйте идею, что $|a| + |b| + |c| = a + b + c \Leftrightarrow a, b, c \geqslant 0$.

16. Используйте идею, что $c \leqslant \max(a; b) \Leftrightarrow c \leqslant a$ или $c \leqslant b$.

Геометрические идеи в задачах с параметром. Часть 1.

Задачи для решения в классе

1. Выясните взаимное расположение прямых $y = a^2x - 1$ и $y = (2a+3)x + a$.

2. При каких значениях параметра a график функции $y = x^2 + ax - 2a + 10$ пересекает ось Ox в двух точках, расположенных по разные стороны от начала координат?

3. При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x+1}{ax+2}$ убывает на промежутке $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$?

4. В зависимости от значений параметра a найдите количество точек пересечения графиков функций $y = 2\left||x| - 2\right|$ и $y = ax - 2a + 1$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - x + a = 0$

   (a) не имеет корней на отрезке $[-2; 2]$;

   (b) имеет 2 различных корня на отрезке $[-2; 2]$;

   (c) имеет ровно один корень на отрезке $[-2; 2]$;

   (d) имеет хотя бы один корень на отрезке $[-2; 2]$;

   (e) не имеет корней, меньших -2?

6. Решите неравенство $(x+3)(x-a) < 0$ при всевозможных значениях параметра a.

7. При всевозможных значениях параметра a решите неравенство $\dfrac{(x+a)(x+1)}{x-a} < 0$.

8. Среди всех решений $(x; y)$ неравенства $y - x \geqslant x^2 + 1$ найти те, для которых выражение $y - 2x$ принимает наименьшее значение.

9. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = a \end{cases}$$
имеет ровно три решения?

10. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$
имеет единственное решение.

11. Решите систему неравенств при всевозможных значениях параметра a
$$\begin{cases} |2x - a| \leqslant 4, \\ a + 4 \geqslant x^2. \end{cases}$$

12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$a|x - 1| + \frac{x^2 - 7x + 12}{3 - x} = 0$$
имеет ровно одно решение.

13. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$
   (a) имеет ровно 3 решения;
   (b) имеет ровно 2 решения.

14. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x+2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geqslant 0$ найдутся два числа, разность между которыми равна 4?

15. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(a + 3 - |x + 2|)\left(a + x^2 + 4x\right) = 0$$
   (a) имеет ровно три корня;
   (b) имеет ровно два корня.

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} |x| + 2|y| + |2y - 3x| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

19. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 2x - a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x + 6a \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

20. Найдите все значения параметра t, при которых система уравнений
$$\begin{cases} (x - 1 - 4t)^2 + (y - 1 - 3t)^2 = 9t^2, \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

21. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \leqslant 8\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

22. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы:

1. При $a = -1$ прямые совпадают, при $a = 3$ параллельны, при остальных значениях a пересекаются.
2. При $a \in (5; +\infty)$.
3. При $a \in (2; 4)$.
4. При $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ одна; при $a \in \left(-2; -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$ две; при $a = -\dfrac{3}{2}$ и $a = \dfrac{1}{4}$ три; при $a \in \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ четыре.
5. (a) $a \in (-\infty; -6) \cup) \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$;

   (b) $a \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right)$;

   (c) $a \in [-6; 0) \cup) \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$;

   (d) $a \in \left[-6; \dfrac{1}{4}\right]$;

   (e) $a \in [-6; +\infty)$.

6. Если $a<-3$, то $x\in(a;-3)$; если $a=-3$, то решений нет; если $a>-3$, то $x\in(-3;a)$.

7. Если $a<-1$, то $x\in(-\infty;a)\cup(-1;-a)$; если $a=\pm1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$;

   если $-1<a<0$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(a;-a)$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;-1)$; если $0<a<1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-a;a)$;

   если $a>1$, то $x\in(-\infty;-a)\cup(-1;a)$.

8. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{4}\right)$

9. При $a=-\sqrt{2}$.

10. $a=\dfrac{1}{8}$.

11. Если $a<-4$ или $a>12$, то решений нет; если $a=-4$, то $x=0$; если $-4<a\leqslant 0$, то $x\in\left[-\sqrt{a+4};\dfrac{a+4}{2}\right]$;

    если $0<a<12$, то $x\in\left[\dfrac{a-4}{2};\sqrt{a+4}\right]$; если $a=12$, то $x=4$.

12. $a\in\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

13. (a) $|a|=2$;

    (b) $|a|\in\left\{\dfrac{8}{5}\right\}\cup\left(2;\dfrac{16}{5}\right)\cup\left\{\sqrt{17}\right\}$.

14. При $a\in[-6;-3]\cup[5;+\infty)$.

15. $a\in(-12;-6)\cup\{0\}\cup(6;12)$.

16. $a\in\left(0;\dfrac{3}{16}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

17. (a) $a\in\{-3;4\}$;

    (b) $a\in(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)\cup\left\{\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}\right\}$.

18. $a \in \left\{\dfrac{9}{2}; \dfrac{117}{4}\right\}$.

19. $a \in \{-1; 0\}$.

20. $t \in \left\{1; \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$.

21. $|a| \in \left[4; 1 + \sqrt{41}\right]$.

22. $a = 2 + \sqrt{2}$.

Задачи для решения дома

1. Выясните взаимное расположение прямых
$y = (a^2 - 3)x + 2$ и $y = (a - 1)x + a$.

2. При каких значениях параметра a график функции
$y = ax^2 + x - 2a$ пересекает ось Ox в точках, расположенных по разные стороны от т.(1;0)?

3. При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x-1}{ax+3}$ возрастает на промежутке $[-1; 1)$?

4. В зависимости от значений параметра $a > 0$ найдите количество точек пересечения графиков уравнений
$|x| + |y| = a$ и $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{a^2}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$-x^2 + 4x - 3a = 0$

   (a) не имеет корней на полуинтервале $[-1; 4)$;
   (b) имеет 2 различных корня на полуинтервале $[-1; 4)$;
   (c) имеет ровно один корень на полуинтервале $[-1; 4)$;
   (d) имеет хотя бы один корень на полуинтервале $[-1; 4)$;
   (e) не имеет корней, больших 4?

6. Решите неравенство $x^2 + ax - 2x - 2a \geqslant 0$ при всевозможных значениях параметра a.

7. При всевозможных значениях параметра a решите неравенство
$\dfrac{a - x^2 - 1}{a + 2x - 4} \leqslant 0$.

8. Среди решений $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 3, \\ 2x - y \leqslant 1, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

найдите все те, для которых выражение $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение.

9. Найдите все значения параметра b, при которых система
$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

10. Решите систему неравенств при всевозможных значениях параметра a
$$\begin{cases} a \leqslant \sqrt{25-x^2}, \\ (4a-3x)(3a+4x) \geqslant 0. \end{cases}$$

11. Найдите все значения параметра a, при которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} 2|x| + |a| \leqslant 4, \\ x^2 + 4x \leqslant 4a + 12 \end{cases}$$
является отрезок числовой прямой длины 2.

12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$a|x+1| + \frac{x^2-5x+6}{2-x} = 0$$
имеет ровно одно решение.

13. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 5|x| + 12|y| = 60, \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$
   (a) имеет ровно 3 решения;
   (b) имеет ровно 2 решения.

14. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x-5)\sqrt{ax+2x-x^2-2a} \geqslant 0$ найдутся два числа, разность между которыми равна 4?

15. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = 3 - ax - 7a$ имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(a - 6 + |x - 1|)\left(a - x^2 + 2x\right) = 0$$
   (a) имеет ровно три корня;
   (b) имеет ровно два корня.

18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| + |3x + 2y| = 11, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

19. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 - x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 6a \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

20. Найдите все значения параметра t, при которых система уравнений
$$\begin{cases} (x + 1 - 2t)^2 + (y - 1 + 5t)^2 = 4t^2, \\ (x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 1 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

21. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 49 \leqslant 10\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 4x = a^2 - 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

22. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x-2| - 2y = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы:

1. При $a = 2$ прямые совпадают, при $a = -1$ параллельны, при остальных значениях a пересекаются.

2. При $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

3. При $a \in (-3; 3)$.

4. При $a \in (0; 1) \cup (\sqrt[4]{2}; +\infty)$ общих точек нет; при $a = 1$ и $a = \sqrt[4]{2}$ четыре; при $a \in \left(1; \sqrt[4]{2}\right)$ восемь.

5. (a) $a \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup) \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$;

   (b) $a \in \left(0; \dfrac{4}{3}\right)$;

   (c) $a \in \left[-\dfrac{5}{3}; 0\right] \cup) \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$;

   (d) $a \in \left[-\dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}\right]$;

   (e) $a \in [0; +\infty)$.

6. Если $a < -2$, то $x \in (-\infty; 2] \cup [-a; +\infty)$; если $a = -2$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a > -2$, то $x \in (-\infty; -a] \cup [2; +\infty)$.

7. Если $a<1$, то $x\in\left(\dfrac{4-a}{2};+\infty\right)$; если $a=1$, то $x\in\{0\}\cup\left(\dfrac{4-a}{2};+\infty\right)$;

если $1<a<2$, то $x\in\left[-\sqrt{a-1};\sqrt{a-1}\right]\cup\left(\dfrac{4-a}{2};+\infty\right)$; если $a=2$, то $x\in\left[-\sqrt{a-1}+\infty\right)$;

если $2<a<10$, то $x\in\left[-\sqrt{a-1};\dfrac{4-a}{2}\right)\cup\left[\sqrt{a-1};+\infty\right)$; если $a=10$, то $x\in\left[\sqrt{a-1}+\infty\right)$;

если $a>10$, то $x\in\left(\dfrac{4-a}{2};-\sqrt{a-1}\right]\cup\left[\sqrt{a-1};+\infty\right)$.

8. $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

9. $b=-\dfrac{1}{4}$.

10. Если $a\leqslant-\dfrac{20}{3}$, то $x\in[-5;5]$; если $-\dfrac{20}{3}<a\leqslant-\dfrac{15}{4}$, то $x\in\left[-5;-\dfrac{3a}{4}\right]$;

если $-\dfrac{15}{4}<a<0$, то $x\in\left[\dfrac{4a}{3};-\dfrac{3a}{4}\right]$; если $a=0$ или $a=5$,то $x=0$; если $0<a\leqslant3$, то $x\in\left[-\dfrac{3a}{4};\dfrac{4a}{3}\right]$;

если $3<a\leqslant4$, то $x\in\left[-\dfrac{3a}{4};\sqrt{25-a^2}\right]$; если $4<a<5$, то $x\in\left[-\sqrt{25-a^2};\sqrt{25-a^2}\right]$; если $a>5$, то решений нет.

11. $a\in\left\{12-8\sqrt{3};2\right\}$.

12. $a\in\left[-1;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

13. (a) $|a|=4;$;

(b) $|a| \in \left\{\dfrac{48}{13}\right\} \cup \left(4; \dfrac{72}{13}\right) \cup \left\{\sqrt{145}\right\}$.

14. При $a \in (-\infty; -4] \cup [8; 11]$.

15. $a \in (-30; -20) \cup \{0\} \cup (20; 30)$.

16. Ответ:$a \in \left\{-\dfrac{1}{16}\right\} \cup \left[0; \dfrac{3}{16}\right]$.

17. (a) $a \in \{-1; 6\}$;

    (b) $a \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty) \cup \left\{\dfrac{13-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

18. $a \in \left\{\dfrac{121}{50}; \dfrac{121}{13}\right\}$.

19. $a \in \left\{0; \dfrac{1}{4}\right\}$.

20. $t \in \left\{-1; \dfrac{-29 \pm 6\sqrt{6}}{25}\right\}$.

21. $|a| \in \left[\sqrt{34} - 2; 2 + \sqrt{74}\right]$.

22. $a = 2 + \sqrt{2}$.

Корень n-й степени. Степени с рациональным показателем

Корень n-й степени. Задачи

1. Вычислите:

   (a) $3{,}5\sqrt[9]{512} - \sqrt[3]{216 \cdot 1000}$;

   (b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{1}{4096}}} - \sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}$;

   (c) $\sqrt[4]{648 \cdot 1250} - \sqrt[3]{256 \cdot 54} - \sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$.

2. Найдите все значения переменной x, при которых определены следующие выражения:

   (a) $\sqrt[7]{\dfrac{3x}{8-x}}$;

   (b) $\sqrt[8]{\dfrac{5-x}{x+4}}$;

   (c) $\sqrt[9]{\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}$;

   (d) $\sqrt[4]{|x| - |x+6|}$;

   (e) $\sqrt[11]{\dfrac{2x}{x^3+8x^2-20x}}$.

3. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число

   (a) $\sqrt[4]{79}$;

   (b) $\sqrt[5]{-472}$;

   (c) $\sqrt[6]{1113}$.

4. Оцените $\sqrt[3]{x}$, если известно, что

   (a) $-125 < x \leqslant 42{,}875$;

(b) $-0{,}343 \leqslant x < -0{,}085184$.

5. Найдите знак числа $\dfrac{\sqrt[11]{-2021} - \sqrt[11]{-2022}}{\sqrt[4]{0{,}63} - \sqrt[4]{0{,}77}}$.

6. Решите неравенства:

(a) $4x^9 + 7 \leqslant 0$;

(b) $3x^8 - 7 < 0$;

(c) $x^6 - x^3 - 56 < 0$;

(d) $x^{12} - x^6 - 20 \leqslant 0$.

7. Постройте графики функций:

(a) $y = \sqrt[6]{x+2} - 1$;

(b) $y = \sqrt[4]{|x-3|}$;

(c) $y = \sqrt[4]{|x| - 1}$;

(d) $y = \sqrt[5]{x+2} - 1$;

(e) $y = \sqrt[3]{|x-3|}$;

(f) $y = \sqrt[3]{|x| - 1}$.

8. Вычислите:

(a) $0{,}5\sqrt[3]{96}\sqrt[3]{5\dfrac{1}{3}} - \dfrac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

(b) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt{8}\sqrt[3]{25}\sqrt{32} + \dfrac{\sqrt[5]{-729}}{\sqrt[5]{3}}$;

(c) $\sqrt[5]{6 - 2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6 + 2\sqrt{17}}$;

(d) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}} \cdot \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{12} + \sqrt{2}}$.

9. Вынесите множитель из-под знака корня:

(a) $\sqrt[5]{-972}$;

(b) $\sqrt[4]{64a^5}$;

(c) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, где $x \leqslant 0$;

(d) $\sqrt[4]{a^7b^4c^8}$;

(e) $\sqrt[6]{x^7y^{18}z^{13}}$;
(f) $\sqrt[4]{-x^4y^5}$;
(g) $\sqrt[6]{-x^6y^7z^9}$.

10. Внесите множитель под знак корня:

(a) $-2\sqrt[6]{0{,}125}$;
(b) $x\sqrt[4]{3}$, где $x \leqslant 0$;
(c) $x\sqrt[5]{3}$, где $x \leqslant 0$;
(d) $xy\sqrt[4]{5}$, где $x \leqslant 0$, $y > 0$;
(e) $xy\sqrt[3]{5}$, где $x \leqslant 0$, $y > 0$;
(f) $a\sqrt[8]{a}$;
(g) $a\sqrt[8]{3}$;
(h) $a\sqrt[8]{-a}$.

11. Сравните числа:

(a) $\sqrt[3]{6}$ и $\sqrt{3}$;
(b) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$;
(c) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{5}$;
(d) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

12. Расположите числа в порядке возрастания: $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$.

13. Вычислите:

(a) $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}$;
(b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}$;
(c) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}$;
(d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$;
(e) $\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{17\sqrt{5}-38}$;

(f) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$;

(g) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

14. Сократите дроби:

(a) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$;

(c) $\dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x}$.

15. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$;

(b) $\dfrac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+3}$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{2}}$;

(e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

16. Решите уравнение:

(a) $3\sqrt{x}=7-4\sqrt[28]{x^7}$;

(b) $5\sqrt{x+1}=6-\sqrt[12]{x^3+3x^2+3x+1}$;

(c) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

17. Упростите выражения:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$;

(b) $\left(\dfrac{\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{y^3}\right)\left(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):\dfrac{x+y}{2}$;

(c) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}-x}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}-1\right)}+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}$;

(d) $\left(\sqrt[4]{x^2-2x+1}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)$;

(e) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

(f) $\dfrac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\dfrac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\dfrac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}\left(x^2-2y^2\right)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{x+y}$;

(g) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8x^3+24x^2+18x}{2x-3}}-\sqrt[3]{\dfrac{8x^3-24x^2+18x}{2x+3}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{27}-\dfrac{1}{6x}}\right)^{-1}$;

(h) $\sqrt{\dfrac{x-8\sqrt[6]{x^3y^2}+4\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}+2\sqrt[12]{x^3y^2}}+3\sqrt[3]{y}}$;

(i) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

Степень с рациональным показателем. Задачи

18. Вычислите:

(a) $16^{-0{,}75}\cdot 25^{-0{,}5}+64^{-\frac{4}{3}}\cdot 9^{1{,}5}-100^{-0{,}5}$;

(b) $(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}\cdot 125^{\frac{2}{3}}-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:(2{,}5)^{-2}\cdot(0{,}75)^{-1}$.

19. Докажите, что число $x_0 = \left(\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-0,5} \cdot 10^{-3} + 10000^{-0,75}\right)^{0,5}$ является корнем уравнения $110x^2 - 21x + 1 = 0$.

20. Найдите области определения следующих функций:

    (a) $f(x) = \left(3x^2 - 23x + 14\right)^{\frac{4}{11}}$;

    (b) $f(x) = \left(5 - |2x - 7|\right)^{-\frac{2}{13}}$.

21. Решите уравнения:

    (a) $\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{3}} = 2$;

    (b) $(2x - 1)^{\frac{2}{3}} = 3$;

    (c) $(2 - 3x)^{\frac{3}{7}} = -1$.

22. Найдите знаки следующих чисел:

    (a) $\dfrac{3^{-\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}}{1 - 0{,}8^{-\frac{3}{5}}}$;

    (b) $2 - 0{,}2021^{-0,8} - 2{,}021^{0,7}$.

23. Вычислите:

    (a) $\left((3\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}} - 16^{-0,25}\right)\left(16^{-\frac{1}{4}} + 3^{-0,5}\right)$;

    (b) $\left(1 + 4^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{3}}\right)\left(1 - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}\right)^{0,5}$.

24. Представьте выражения в виде степени с основанием y:

(a) $y^2\sqrt[3]{y\sqrt[4]{y\sqrt{y}}}$;

(b) $\dfrac{y\sqrt[4]{y\sqrt[3]{y^2}}}{y\sqrt[6]{y\sqrt[5]{y}}}$.

25. Упростите выражения:

(a) $\left(x^{-\frac{2}{5}}-x^{0,8}\right)\left(x^{1,6}+x^{-0,8}\right)\left(x^{\frac{4}{5}}+x^{-0,4}\right)$;

(b) $\left(x^{\frac{8}{3}}+x^{-\frac{1}{15}}+x^{-2,8}\right)\left(x^{\frac{4}{3}}-x^{-\frac{7}{5}}\right)$;

(c) $\dfrac{x^{\frac{8}{7}}-y^{0,8}}{x^{\frac{6}{5}}+y^{\frac{12}{7}}}$;

(d) $\left(\dfrac{x+x^{0,75}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}+y^2}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}y^{0,5}+y}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)+\dfrac{3\sqrt{y}\left(x^{\frac{1}{2}}-y\right)}{x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{0,25}-\sqrt{y}\right)}\right)^{-\frac{1}{3}}:$ $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}$;

(e) $\left(\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+12\right)^{\frac{1}{4}}:(x-1)$;

(f) $\dfrac{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-0,5}+\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-0,5}}{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-0,5}-\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-0,5}}$;

(g) $\dfrac{\left(x^{\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(x^{\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{y^{-1}}-\sqrt[3]{x^{-1}}\right)\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}\right)}-2y-\dfrac{4y^2}{x-y}$.

Ответы

1. (a) -53; (b) $-1{,}5$; (c) $4{,}5$.

2. (a) $x \neq 8$; (b) $x \in (-4; 5]$; (c) $x \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$;
   (d) $x \in (-\infty; -3]$;
   (e) $x \in (-\infty; -10) \cup (-10; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

3. (a) $2 < \sqrt[4]{79} < 3$; (b) $-4 < \sqrt[5]{-472} < -3$; (c) $3 < \sqrt[6]{1113} < 4$.

4. (a) $-5 < x \leqslant \dfrac{7}{2}$; (b) $-\dfrac{7}{10} \leqslant x < -\dfrac{11}{25}$.

5. отрицательно.

6. (a) $x \in \left(-\infty; -\sqrt[9]{\dfrac{7}{4}}\right]$; (b) $\left(-\sqrt[8]{\dfrac{7}{3}}; \sqrt[8]{\dfrac{7}{3}}\right)$; (c) $x \in \left(-\sqrt[3]{7}; 2\right)$;
   (d) $x \in \left(-\sqrt[6]{5}; \sqrt[6]{5}\right)$.

7.

8. (a) 8;
   (b) -243;
   (c) -2;
   (d) -2.

9. (a) $-3\sqrt[5]{4}$;
   (b) $2a\sqrt[4]{4a}$;
   (c) $-xy\sqrt[6]{y}$;
   (d) $a|b|c^2\sqrt[4]{a^3}$;
   (e) $x|y|^3z^2\sqrt{xz}$;
   (f) $-|x|y\sqrt[4]{-y}$;
   (g) $-|x|yz\sqrt[6]{-yz^3}$.

10. (a) $-\sqrt{2}$;
    (b) $-\sqrt[4]{3x^4}$;
    item $\sqrt[5]{3x^5}$;
    (c) $-\sqrt[4]{5x^4y^4}$;
    (d) $\sqrt[3]{5x^3y^3}$;
    (e) $\sqrt[8]{a^9}$;
    (f) $\sqrt[8]{3a^8}$ при $a \geqslant 0$, $-\sqrt[8]{3a^8}$ при $a < 0$;
    (g) $-\sqrt[8]{-a^9}$.

11. (a) $\sqrt[3]{6} > \sqrt{3}$;
    (b) $-\sqrt[4]{4} > -\sqrt[3]{3}$;
    (c) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{5}$;
    (d) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}} > -\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

12. $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}} < \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}} < \sqrt[16]{64}$.

13. (a) -1; (b) 3; (c) $\dfrac{1}{3}$; (d) 1; (e) 1; (f) 2; (g) 3.

14. (a) $\sqrt[4]{b} - a\sqrt{a}$; (b) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a}\sqrt{b} + b$; (c) $\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$.

15. (a) $-\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}{2}$; (b) $9-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$; (c) $\dfrac{\left(3-\sqrt[4]{2}\right)\left(9+\sqrt{2}\right)}{79}$;
(d) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}{3}$;
(e) $\dfrac{\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[6]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{3}$; (f) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\sqrt[4]{8}}{2}$.

16. (a) $x=1$; (b) $x=0$; (c) $x=8$.

17. (a) $\sqrt[3]{x^2}+2$; (b) $x+\sqrt{xy}+y$; (c) x; (d) $\dfrac{1-x}{2}$; (e) $2\sqrt[4]{y}$;
(f) $\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$; (g) 0; (h) $\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{y}\right|$; (i) x.

18. (a) $\dfrac{39}{1280}$; (b) $\dfrac{1925}{16}$.

19. $x_0 = \dfrac{1}{10}$.

20. (a) $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right) \cup (7; +\infty)$; (b) $x \in (1; 6)$.

21. (a) $x = \pm 3$; (b) $x = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$; (c) корней нет.

22. (a) отрицательно; (b) отрицательно.

23. (a) $\dfrac{1}{12}$; (b) 3.

24. (a) $y^{\frac{59}{24}}$; (b) $y^{\frac{13}{60}}$.

25. (a) $x^{-1{,}6}-x^{3{,}2}$; (b) $x^{4}-x^{-4{,}2}$; (c) $\dfrac{x^{\frac{4}{7}}-y^{0{,}4}}{x^{\frac{8}{7}}-x^{\frac{4}{7}}y^{0{,}4}+y^{0{,}8}}$; (d) 1;

(e) $\dfrac{x+1}{x}$ при $x>1$, $-\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ при $x<1$;

(f) $-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2}$ при $x>\dfrac{5}{2}$, $-\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$ при $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}$;

(g) $2(x+y)$.

Комбинаторика. Правило суммы и произведения.

Задачи для решения в классе

1. В вазе лежат 5 яблок и 7 апельсинов. Сколькими способами можно выбрать фрукт из вазы?

2. В Волшебной стране три города: Чудесный, Сказочный и Загадочный. Из Чудесного в Сказочный ведет 5 дорог, а из Сказочного в Загадочный — 6 дорог. Сколькими способами можно проехать из Чудесного в Загадочный?

3. В Волшебной стране построили еще один город — Таинственный — и 5 новых дорог: 2 из Чудесного в Таинственный и 3 из Таинственного в Загадочный. Сколькими способами можно теперь добраться из Чудесного города в Загадочный?

4. Сколько подмножеств у множества из 8 элементов (включая само множество и пустое)?

5. Сколько различных натуральных делителей у числа 15552 (включая 1 и само число 15552)?

6. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске чёрную и белую ладью так, чтобы они не били друг друга?

7. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске две одинаковые ладьи так, чтобы они не били друг друга?

8. Назовём словом произвольную конечную последовательность букв. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «лилии»?

9. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове «к» не стоит непосредственно за буквой «и»?

10. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2,..., 9, если цифры в записи числа не повторяются, и в числе присутствует цифра 7?

11. Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует её. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А ещё он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

12. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 1.

13. Из карточек, на которых написаны цифры 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, составляются восьмизначные числа, делящиеся на 36. Сколько различных чисел получится?

14. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке (50; 30). Найдите количество таких квадратов.

15. В числе 2*0*1*6*0* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

16. Каких целых чисел от 1 до 80000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

17. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3y^2 = 15^{15}20^{20}$? Решением считается пара чисел $(x;y)$.

18. Найдите количество пар целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих равенству $x^2 + xy = 30000000$.

19. Есть семь карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5. Сколько существует различных **шестизначных** чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

20. Дано число 800...008 (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

21. На клетчатой доске размера 22x25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

22. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

Ответы:

1. 12.
2. 30.
3. 36.
4. 256.
5. 42.
6. 3136.
7. 1568.
8. 10.
9. 136080.
10. 82320.
11. 504.
12. 810.
13. 140.
14. 930.
15. 3645.
16. Чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на 780.
17. 126.
18. 256.
19. 276.
20. 14080.
21. 2556
22. 19594

Задачи для решения дома

1. На полке стоят 10 книг со сказками, 9 – с приключенческими романами и 7 – с детективами. Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

2. В магазине одежды есть 7 разных шапок, 5 шарфов и 4 пары перчаток. Сколькими способами можно купить комплект из шапки, шарфа и пары перчаток?

3. В магазине одежды по-прежнему продается 7 разных шапок, 5 шарфов и 4 пары перчаток. Сколькими способами можно купить два предмета одежды с разными названиями?

4. Сколько различных подмножеств у множества, состоящего из 9 элементов, если известно, что все каждое содержит ровно один элемент из двух, наперёд заданных?

5. Сколько различных натуральных делителей у числа 999^{999} (включая 1 и само число 999^{999})?

6. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске ладью и короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью?

7. Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов золотую, серебряную и бронзовую медали?

8. Назовём словом произвольную конечную последовательность букв. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

9. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика», если в полученном слове «м» не стоит непосредственно за буквой «е»?

10. Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

11. Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

12. Найдите количество пятизначных чисел, у которых вторая цифра больше третьей на 2.

13. Из карточек, на которых написаны цифры 0, 2, 2, 3, 3, 3, 5, составляются семизначные числа, делящиеся на 45. Сколько различных чисел получится?

14. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке (55; 25). Найдите количество таких квадратов.

15. В числе 2*0*1*6*02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

16. Каких целых чисел от 1 до $4 \cdot 10^{25}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

17. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5y^3 = 18^{50}10^{33}$? Решением считается пара чисел $(x;y)$.

18. Есть восемь карточек с цифрами 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько существует различных **семизначных** чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

19. Найдите количество пар целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих равенству $y^2 - xy = 700000000$.

20. Дано число 5300...0035 (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

21. На клетчатой доске размера 31x19 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

22. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2 - 7xy + y^2 = 10^{100}$.

Ответы:

1. 26.
2. 140.
3. 83.
4. 256.
5. 2998000.
6. 672.
7. 6840.
8. 151200.
9. 120960.
10. 6.
11. 3537.
12. 7200.
13. 110.
14. 600.
15. 1296.
16. Чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на $\dfrac{5^{26}-5}{4}$.
17. 126.
18. 1680.
19. 324.
20. 22100.
21. 2592.
22. 19998.

Комбинаторика. Числа сочетаний. Формула включений и исключений.

Задачи для решения в классе

1. Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?

2. На плоскости отметили 14 точек. Сколько отрезков с концами в отмеченных точках можно построить?

3. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике $(n>3)$?

4. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

5. На плоскости проведены 15 прямых так, что никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения этих прямых.

6. В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (A и B), состоящие из чётного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

7. Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

8. В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

9. Трое садовников ухаживают за оранжереей, в которой число растений кратно трём. Утром один из садовников полил треть растений, через час второй также полил треть, а через два часа и третий садовник полил треть растений. При этом две орхидеи и

три лилии остались без полива, а розовый куст полили три раза. Сколько растений было полито дважды?

10. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

11. В сумме $32+33+34+...+100$ нужно вычеркнуть несколько слагаемых так, чтобы получившаяся сумма стала равна 4455. Сколькими способами это можно сделать?

12. На каждой из прямых $y = 3$ и $y = 4$ отмечено по 73 точки с абсциссами 1, 2, 3,..., 73. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

13. Даны 6000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 6000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

14. На столе лежат 100 различных карточек с числами 3, 6, 9,..., 297, 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

15. Есть 306 различных карточек с числами 3, 19, 3^2, 19^2,..., 3^{153}, 19^{153} (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

16. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

17. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40^o. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

18. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 2747.

19. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

20. У фокусника есть набор из 144 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку дублем, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответы:

1. 1400.
2. 91.
3. $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
4. 2970.
5. 105.
6. 2046.
7. 45.
8. 52.
9. 6.
10. 1596.
11. 20.
12. 10654.
13. 179940.
14. 990.
15. 17328.
16. 216.
17. 216.
18. 5111.
19. 2520.
20. 1386.

Задачи для решения дома

1. В набор должны войти 3 банки кофе или 4 упаковки чая и 5 коробок конфет. Каким количеством способов можно составить набор, если есть 5 банок кофе, 6 упаковок чая и 8 коробок конфет?

2. На окружности отметили 10 точек. Сколько дуг с концами в отмеченных точках можно построить?

3. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из его сторон?

4. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

5. Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

6. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько треугольников образовано этими прямыми?

7. В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы, состоящие из чётного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

8. Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?

9. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

10. Четверо сестёр при входе в дом кладут ключ от квартиры на полочку. Утром мать случайным образом разложила ключи по

сумочкам дочерей. Сколько существует вариантов, при которых ни одна из сестёр не получит своего ключа?

11. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB, 11 – на стороне BC, 12 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

12. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 64 точки с ординатами 1, 2, 3,..., 64. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

13. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

14. На столе лежат 140 различных карточек с числами 3, 6, 9, . . . 417, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

15. Есть 200 различных карточек с числами 2, 3, 2 3^2, 2^2,..., 2^{100}, 3^{100} (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

16. Дано число 5300 . . . 0035 (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

17. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

18. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1 400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

19. На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;59)$, $(59;59)$ и $(59;0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

20. Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 6, \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

Ответы:

1. 8400.
2. 90.
3. 240.
4. 1200.
5. 1024.
6. 120.
7. 1419.
8. 540.
9. 26.
10. 9.
11. 4951.
12. 8420.
13. 22386.
14. 1390.
15. 4389.
16. 22100.
17. 765.
18. 5880.
19. 370330.
20. 7560.

Последовательности. Прогрессии.

Задачи для решения в классе:

1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 38, а сумма первого и шестого членов равна 23. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, если сумма четвертого и двенадцатого ее членов равна – 8.

3. В бесконечной числовой последовательности $x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geqslant 2$ разность $x_{n+1}-x_n$ вдвое меньше, чем $x_{n+1}-x_{n-1}$. Найдите отношение $\dfrac{x_{20}-x_{18}}{x_{2018}-x_{2000}}$.

4. Найдите первый член и разность убывающей арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 6, а сумма их квадратов равна 20.

5. Дана конечная арифметическая прогрессия a_1,$a_2\ldots$,a_n с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

6. Найдите четыре числа, составляющих убывающую геометрическую прогрессию, если сумма крайних ее членов равна 252, а сумма средних членов равна 168.

7. Все члены возрастающей геометрической прогрессии положительны, сумма первых трех ее членов равна 169, а сумма их обратных величин равна $\dfrac{1}{9}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

8. Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии.

Сумма всех членов этой прогрессии без первых трех членов относится к сумме всех членов без последних трех как $3:2$. Найдите количество членов этой прогрессии.

9. Найдите число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы последних 12 членов к сумме первых 12 членов равно 125, а отношение суммы всех членов без первых восьми к сумме всех членов без последних восьми равно 5.

10. S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\dfrac{(S_{3n}-S_{2n})^2}{S_n(S_{4n}-S_{3n})} = 2048$. Найдите n.

11. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n – сумма n первых членов этой прогрессии. Докажите, что:

    (а) если $S_m = S_n$, то $S_{m+n} = 0$ $(m \neq n)$;

    (б) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$.

12. Найдите четыре числа, первые три из которых составляют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, если сумма крайних чисел равна 24, а сумма средних чисел равна 12.

13. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй ее член равен 16, а сумма этой прогрессии в 36 раз меньше суммы квадратов ее членов.

14. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в $\dfrac{21}{16}$ раза меньше суммы первых $3n$ членов.

15. Докажите, что если a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

16. Найдите сумму $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{\text{n цифр}}$.

17. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$. Найдите формулу общего члена этой последовательности, то есть выразите x_n явно через n одной формулой и без многоточий.

18. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

19. S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6a_{12} > S + 1$, $a_7a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1.

20. Последовательность задана формулой $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 2}$. Известно, что $x_{2018} + x_{2022} = 14$. Найдите x_{2020}.

21. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^3 - 30x^2 + p = 0$ имеет ровно три различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответы:

1. $a_1 = 4$, $d = 3$.
2. -60.
3. $\dfrac{1}{9}$.
4. $a_1 = 4$, $d = -2$.
5. в $\dfrac{5}{2}$ раз.
6. 224, 112, 56, 28.
7. $b_1 = 13$, $q = 3$.
8. 18.
9. 36.
10. 11.
12. -3, 3, 9, 27.
13. $b_1 = 48$, $q = \dfrac{1}{3}$.
14. 1,5.
16. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{10\,(10^n-1)}{9} - n\right)$.
17. $a_n = 3^n - 2^n$.
18. $a_n = n2^n$.
19. -6; -5; -4; -2; -1; 0.
20. 1.
21. 2000.

Указания:

9-10. Пусть b, q и S_n – первый член, частное и сумма первых n членов геометрической прогрессии соответственно. Тогда
$S_{m+k} = S_m + b \cdot q^m + b \cdot q^{m+1} + \ldots + b \cdot q^{m+k-1}$, откуда
$S_{m+k} - S_m = q^m(b + b \cdot q + \ldots + b \cdot q^{k-1}) = q^m S_k$.

17. Запишите данное равенство двумя способами:
$a_{n+1} - 2a_n = 3(a_n - 2a_{n-1})$ и $a_{n+1} - 3a_n = 2(a_n - 3a_{n-1})$.
По формуле для n-го члена геометрической прогрессии для прогрессий $B_n = a_n - 2a_{n-1}$ и $C_n = a_n - 3a_{n-1}$ находим, что
$B_n = a_n - 2a_{n-1} = 3^{n-2}B_2 = 3^{n-2}\,(a_2 - 2a_1)$ и
$C_n = a_n - 3a_{n-1} = 2^{n-2}C_2 = 2^{n-2}\,(a_2 - 3a_1)$. Далее из полученной системы уравнений выразите a_n через a_1 и a_2.

18. Запишите данное равенство в следующем виде:
$a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$. По формуле для n-го члена геометрической прогрессии для прогрессии $B_n = a_n - 2a_{n-1}$ нахо-

дим, что $B_n = a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-2}B_2 = 2^{n-2}\underbrace{(a_2 - 2a_1)}_{A}$. Заменяя здесь n на $n-1$, получим: $a_{n-1} - 2a_{n-2} = A \cdot 2^{n-3}$, откуда $a_{n-1} = 2a_{n-2} + A \cdot 2^{n-3}$.
Вставляя это выражение в $a_n = 2a_{n-1} + A \cdot 2^{n-2}$, найдём: $a_n = 2^2 a_{n-2} + 2A \cdot 2^{n-2}$.
Повторяя тот же прием несколько раз, получим:
$a_n = 2^{n-1}a_1 + (n-1)A \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}a_1 + (n-1)(a_2 - 2a_1)\,2^{n-2} = 2^{n-1} \cdot 2 + (n-1)(8 - 2 \cdot 2)2^{n-2} = n2^n$.

20. Из данного равенства возведением в квадрат получаем: $x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n + 4x_n^2 = 3x_n^2 + 2$, то есть $x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n + x_n^2 = 2$. Заменив $n+1$ на n, получаем: $x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}x_n + x_n^2 = 2$. Значит, x_{n-1} и x_{n+1} – корни квадратного уравнения $t^2 - 4x_n t + x_n^2 - 2 = 0$ с неизвестной t, откуда по теореме Виета $x_{n-1} + x_{n+1} = 4x_n$. Поэтому $x_{2018} + x_{2020} = 4x_{2019}$, $x_{2020} + x_{2022} = 4x_{2021}$. Складывая эти равенства получаем: $x_{2018} + x_{2022} + 2x_{2020} = 4\,(x_{2019} + x_{2021}) = 4 \cdot 4x_{2020}$. Отсюда $x_{2020} = \dfrac{x_{2018} + x_{2022}}{14} = 1$.

21. Используйте расширенную теорему Виета для решения задачи.

Задачи для решения дома:

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 15, а сумма 5-го, 6-го и 7-го членов равна -9. Найдите первый член прогрессии, а также ее разность.

2. Сумма 31-го и 39-го членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму 5-го, 35-го и 65-го членов этой прогрессии.

3. В бесконечной числовой последовательности $x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geqslant 2$ разность $x_{n+1}-x_n$ вдвое меньше, чем $x_{n+1}-x_{n-1}$. Найдите отношение $\dfrac{x_{20}-x_{19}}{x_{2019}-x_{2000}}$.

4. Найдите первый член и разность возрастающей арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 6, а сумма их квадратов равна 20.

5. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна 13, а разность первого и четвертого членов равна 65.

6. Все члены возрастающей геометрической прогрессии положительны, сумма первых трех ее членов равна 441, а сумма их обратных величин равна $\dfrac{1}{16}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

7. Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 23 членов к сумме последних 23 членов равно $\dfrac{1}{6}$, а отношение суммы всех членов без первых семи к сумме всех членов без последних семи равно $\dfrac{4}{3}$.

8. Найдите число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы последних 19 членов к сумме первых 19 членов равно 216, а отношение суммы всех членов без первых 5 к сумме всех членов без последних 5 равно 6.

9. S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\dfrac{(S_{4n}-S_{3n})^2}{S_n(S_{6n}-S_{5n})} = 4096$. Найдите n.

10. Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

11. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n – сумма n первых членов этой прогрессии. Докажите что:

    (a) если $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, то $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$;

    (b) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

12. Три числа, сумма которых равна 77, составляют геометрическую прогрессию и являются также первым, седьмым и девятнадцатым членами нестационарной арифметической (разность не равна нулю) прогрессии. Найдите эти числа.

13. Все члены бесконечно убывающей прогрессии положительны. Сумма первых трех членов равна 7, а сумма обратных величин этих членов равна $2\dfrac{3}{4}$. Найдите сумму прогрессии.

14. Третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, произведение первого и четвертого членов и второй член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью равной $\dfrac{2}{3}$. Найдите сумму геометрической прогрессии.

15. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\dfrac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

16. Докажите, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ не могут быть членами арифметической прогрессии.

17. Среди первых ста членов арифметической прогрессии с положительной разностью есть числа $\frac{13}{6}, \frac{75}{2}$ и $\frac{389}{6}$. Найдите разность этой прогрессии. Найдите наименьшее из возможных значений первого члена этой прогрессии.

18. Докажите, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

19. Найдите сумму $5+55+555+\ldots+\underbrace{555\ldots5}_{\text{n цифр}}$.

20. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

21. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$. Найдите формулу общего члена этой последовательности.

22. Последовательность задана формулой $x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2+2}$. Известно, что $x_{2017} + x_{2023} = 990$. Найдите x_{2020}.

23. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^3 - 18x^2 + p = 0$ имеет ровно три различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответы:

1. $a_1 = 7$, $d = -2$.
2. 12.
3. $\dfrac{1}{19}$.
4. $a_1 = 0$, $d = 2$.
5. $b_1 = 1$, $q = -4$.
6. $b_1 = 21$, $q = 4$.
7. 58.
8. 34.
9. 12.
10. увеличится в $\dfrac{11}{8}$ раз.
12. 11, 22, 44.
13. 8.
14. 9.
15. $b_1 = 3$, $q = \dfrac{1}{2}$.
17. $d = \dfrac{2}{3}$, $(a_1)_{min} = -\dfrac{7}{6}$.
19. $\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right)$.
20. $a_n = 3^n + (-2)^n$.
21. $a_n = (n-2)3^n$.
22. 5.
23. 432.

Указания:

16. Докажите, что $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ не является рациональным числом.

Теория вероятностей

Задачи для решения в классе

1. В случайном эксперименте бросают две правильные игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет

   (a) 7 очков;

   (b) 8 очков.

2. На полке помещается 11 книг. Школьник расставляет книги на полке случайным образом. Какова вероятность того, что два тома стихов Пушкина окажутся рядом?

3. Из колоды в 36 карт наудачу берется 8 карт. Какова вероятность, что попадутся 3 туза и 2 дамы?

4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 игры из 4-х или 5 из 8-ми? Ничьих не бывает.

5. Найдите вероятность того, что при четырёх бросаниях игральной кости хотя бы раз выпадет единица или тройка.

6. В отделении банка стоят два банкомата. Вероятность того, что к концу дня в первом банкомате закончатся купюры, равна 0,3; во втором – 0,2. Вероятность того, что купюры закончатся в обоих банкоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня купюры останутся в обоих банкоматах.

7. У Иры 12 магнитов с изображениями, у Наташи - 10. Девочки совершили обмен, каждая отдав другой по одному магниту из коллекции. Через некоторое время они ещё раз обменялись: каждая снова отдала подруге один из своих магнитов. Найдите вероятность того, что

   (a) после второго обмена у Иры оказался исходный набор магнитов;

   (b) после второго обмена у каждой девочки оказался исходный набор магнитов;

(c) после второго обмена хотя бы у одной из девочек оказался исходный набор магнитов.

8. Из коробки, в которой лежат 2 белых, 3 синих и 5 красных шаров наудачу вынимают 3 шара. Найдите вероятность того, что среди них будут
   (a) хотя бы два шара одного цвета;
   (b) хотя бы два шара разных цветов.
9. На отрезке $[-2; 4]$ наудачу взяты два числа. Найдите вероятность того, что
   (a) сумма чисел окажется меньше 1;
   (b) сумма квадратов чисел окажется больше 8.
10. К причалу в течение суток должны подойти для погрузки баржа и теплоход. Время прихода каждого судна равновозможно в течение суток. Барже требуется для погрузки 6 часов, а теплоходу 4. Найдите вероятность того, что одному из судов придётся ожидать причала.
11. В круге случайным образом проводится хорда. Найти вероятность того, что её длина будет больше длины стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, если при построении хорды
    (a) был зафиксирован один из диаметров круга, и на нём случайным образом выбрана середина хорды;
    (b) был зафиксирован один из концов хорды, а второй выбран случайным образом;
    (c) в круге случайным образом была выбрана середина хорды.
12. Брошены две игральные кости. Найдите условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.
13. Из 100 карточек с числами 00, 01,..., 98, 99 случайным образом выбирается одна. Пусть N_1 и N_2 - соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найдите $P(N_1 = k|N_2 = 0)$ для $k = 0,1,...,18$.

14. Две фабрики выпускают одинаковые кофемолки. Первая фабрика выпускает 40% этих кофемолок, вторая — 60%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных кофемолок, а вторая — 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине кофемолка окажется бракованной. Ответ округлите до сотых.

15. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 лёгких. Трое студентов собираются сдавать экзамен, вытаскивая билеты друг за другом. У кого из них больше шансов вытянуть лёгкий билет?

16. Стрелок делает не более двух выстрелов по мишени. Если он не попадает в первый раз, то делает второй выстрел. Вероятность попасть с первого выстрела равна 0,7, со второго – 0,8. Найти вероятность того, что мишень не была поражена.

17. Известно, что в городе N каждый десятый мужчина и каждая сотая женщина болеют за местную футбольную команду. Наудачу выбранный человек оказался болельщиком местного футбольного клуба. Какова вероятность, что это мужчина? (Считаем, что мужчин и женщин в городе одинаковое количество.)

18. Магазин закупает для продажи в розницу кондитерскую продукцию у двух поставщиков. В ассортименте закупаемой продукции первого производителя мармелад составляет 60%, а пастила – 40%. В ассортименте второго производителя, соответственно, 20% и 80%. Какова вероятность того, что купленная коробка сладостей была изготовлена вторым производителем, если известно, что в ассортименте магазина мармелада в три раза меньше пастилы?

19. Монету подбросили 1001 раз. Какова вероятность того, что выпало более 500 орлов?

20. Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160? .

Ответы:

1. (a) $\dfrac{1}{6}$;

   (b) $\dfrac{5}{36}$.

2. $\dfrac{2}{11}$.

3. $\dfrac{C_4^3 C_4^2 C_{31}^3}{C_{36}^8} = \dfrac{2}{561}$.

4. 3 из 4-х.

5. $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{65}{81}$.

6. 0,6.

7. (a) $\dfrac{1}{10}$;

   (b) $\dfrac{1}{120}$;

   (c) $\dfrac{7}{40}$.

8. (a) $\dfrac{3}{4}$;

   (b) $\dfrac{109}{120}$.

9. (a) $\dfrac{25}{72}$;

   (b) $1 - \dfrac{\pi}{9}$.

10. $\dfrac{107}{288}$.

11. (a) $\dfrac{1}{2}$;

    (b) $\dfrac{1}{3}$;

    (c) $\dfrac{1}{4}$.

12. $\dfrac{1}{7}$.

13. $\dfrac{1}{19}$ для $k = 0$, $\dfrac{2}{19}$ для $k = 1,2\ldots,9$, 0 для $k = 10,11\ldots,18$.

14. 0,04.

15. Шансы равны.

16. 0,06.

17. $\dfrac{10}{11}$.

18. $\dfrac{7}{8}$.

19. $\dfrac{1}{2}$.

20. Больше вероятность того, что сумма не более 160.

Задачи для решения дома

1. В ящике стола лежали 2 чёрные ручки и 3 синих и 2 красных. Саша, не глядя, переложил 3 ручки в другой ящик. Какова вероятность того, что чёрные ручки теперь лежат в разных ящиках?

2. На полке среди других книг стоят 3 тома рассказов Чехова. Какова вероятность того, что они стоят по порядку (не обязательно непосредственно друг за другом)?

3. Из колоды в 36 карт наудачу берется 8 карт. Какова вероятность, что среди них окажется ровно 3 дамы и ровно 2 короля?

4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника не менее 3 игр из 4-х или не менее 5 из 8-ми? Ничьих не бывает.

5. На подносе лежат пирожные и 10 пирожков, среди которых 5 с мясом, 2 с капустой и 3 с вишней. Петя решил перекусить и взял 3 пирожка. Если ему попадётся хотя бы один пирожок с вишней, то он не будет брать пирожное. Какова вероятность того, что все пирожные останутся лежать на подносе?

6. Чтобы поступить в университет на механико-математический факультет, абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и физика, и не менее 75 баллов за внутренний экзамен по математике. Чтобы поступить на факультет вычислительной математики и кибернетики, нужно набрать не менее 75 баллов за ЕГЭ по каждому из четырех предметов – математика, русский язык, физика и информатика, и не менее 60 баллов за тот же внутренний экзамен по математике, что и на механико-математический факультет. Вероятность того, что Фёдор получит не менее 75 баллов за ЕГЭ по математике, равна 0,8, по русскому языку – 0,9, по физике – 0,85, по информатике – 0,7. Вероятность того, что Фёдор сдаст внутренний экзамен не менее, чем на 60 баллов равна 0,9. Вероятность того, что Фёдор сдаст внутренний экзамен не менее, чем на 75 баллов равна 0,7. Найдите вероятность того, что Фёдору хватит баллов хотя бы на один из двух упомянутых факультетов. Ответ округлите до сотых.

7. Из 9 книг, среди которых 2 сборника сказок, 3 приключенческих романа и 4 детектива, выбирают наудачу 4 штуки. Найдите вероятность того, что

   (a) набор будет состоять из 2 детективов и 2 романов;

   (b) в наборе будет ровно 2 романа;

   (c) в наборе будет не более 2-х романов;

   (d) в набор попадёт хотя бы по одной книге каждого жанра.

8. На полке в шкафу вперемешку лежат 10 пар носков. Наудачу берутся 6 носков. Найдите вероятность того, что среди них будет

   (a) хотя бы одна пара;

   (b) ровно одна пара.

9. Из 28 костей домино случайным образом выбирают две. Найдите вероятность того, что их можно приложить друг к другу согласно правилам игры.

10. На деревянной рейке наудачу сделали 2 отметки и по этим отметкам распилили рейку на 3 части. Найдите вероятность того,

    (a) длина средней части не менее чем в три раза короче исходной рейки;

    (b) из получившихся отрезков рейки можно составить треугольник.

11. На бесконечную шахматную доску со стороной клетки 3 см бросают монету радиусом 1 см. Найдите вероятность того, что монета попадёт целиком внутрь

    (a) одной клетки;

    (b) не более двух клеток;

    (c) ровно трёх клеток.

12. Известно, что при броске двух игральных костей не выпало ни одной единицы. Найдите вероятность того, хотя бы на одной кости выпало 6 очков.

13. Из урны, содержащей 3 белых, 5 чёрных и 2 красных шара, два игрока по очереди извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Найдите вероятность того, что

    (a) выиграет игрок, начавший игру;

    (b) выиграет второй участник;

    (c) игра закончится вничью.

14. В день спектакля к 18.45 в кассе театра №1 билеты остаются с вероятностью 0,2, в кассе №2 с вероятностью 0,3, и в кассе №3 с вероятностью 0,7. Зритель в 18.45 вошёл в театр и направился к кассам. Какова вероятность, что он купит билет в первой же выбранной наудачу кассе?

15. В ящике лежат 16 теннисных мячей: 10 новых и 6 игранных. Для игры из ящика взяли 2 мяча наугад, а после игры вернули обратно в ящик. Какова вероятность того, что вынутые для следующей игры 2 мяча, окажутся новыми? Ответ округлите до сотых.

16. Программа экзамена содержит 30 различных вопросов, из которых студент выучил только половину. Для получения положительной оценки достаточно ответить на 2 вопроса, предложенных экзаменатором, или на один из них и ещё на один дополнительный вопрос. Найдите вероятность того, что студент успешно сдаст экзамен.

17. Стрелок попадает в мишень из обычной винтовки с вероятностью 0,6, а из снайперской - с вероятностью 0,9. В пирамидке стоят 7 обычных винтовок и 5 пристрелянных. Стрелок входит в тир, берёт наудачу одну из винтовок и поражает из неё мишень. Какова вероятность, что была использована обычная винтовка?

18. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч, случайно независимо друг от друга

выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

19. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-3; 4]$ и после этого решает уравнение

$$3x^3 + (4 - 3a)x^2 + (3 - 2a)x + a + 2 = 0.$$

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых как минимум два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

20. Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p — вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q — вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

Ответы:

1. $\dfrac{4}{7}$.

2. $\dfrac{1}{6}$.

3. $\dfrac{C_4^3 C_4^3 C_{31}^3}{C_{36}^8} = \dfrac{2}{561}$.

4. Не менее 5 из 8-х.

5. $1 - \dfrac{C_7^3}{C_{10}^3} = \dfrac{17}{24}$.

6. 0,51.

7. (a) $\dfrac{2}{21}$;

   (b) $\dfrac{10}{21}$;

   (c) $\dfrac{20}{21}$;

   (d) $\dfrac{4}{7}$.

8. (a) $1 - \dfrac{C_{10}^6 \cdot 2^6}{C_{20}^6} = \dfrac{211}{323}$;

   (b) $\dfrac{5C_9^4 \cdot 2^4}{C_{20}^6} = \dfrac{84}{323}$.

9. $\dfrac{7}{18}$.

10. (a) $\dfrac{5}{9}$;

    (b) $\dfrac{1}{4}$.

11. (a) $\dfrac{1}{9}$;

    (b) $\dfrac{5}{9}$;

    (c) $\dfrac{4-\pi}{9}$.

12. $\dfrac{9}{25}$.

13. (a) $\dfrac{83}{210}$;

    (b) $\dfrac{43}{210}$;

    (c) $\dfrac{2}{5}$.

14. 0,4

15. 0,19.

16. $\dfrac{1}{2}$.

17. $\dfrac{42}{87}$.

18. $\dfrac{1}{2}$.

19. $\dfrac{3}{8}$.

20. $2^{-90} C_{90}^{35}$.

Преобразование тригонометрических выражений.

Определение тригонометрических функций. Основное тригонометрическое тождество и его следствия. Формулы приведения. Задачи для классной работы

1. Найдите значение выражения:

   (a) $2\sin 30^\circ - \sqrt{3}\sin 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$;

   (b) $\dfrac{12\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ}$.

2. Верно ли утверждение:

   (a) если α – угол второй четверти, то $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$;

   (b) если $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, то α – угол второй четверти.

3. В какой четверти может находиться угол β, если известно, что

   (a) $\cos\beta < 0$, $\sin\beta > 0$;

   (b) $|\cos\beta| = -\cos\beta$?

4. Определите знак выражения

   (a) $\sin\dfrac{5\pi}{6}\cos\dfrac{5\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{8}\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{9}$;

   (b) $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos\dfrac{5\pi}{4}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{8}$.

5. Найдите значение выражения

   (a) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$;

   (b) $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$;

   (c) $\dfrac{\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) - \sin\dfrac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + \cos(-\pi) - \sin\dfrac{\pi}{4}}$.

6. Сравните числа

   (a) $\cos\dfrac{2\pi}{13}$ и $\cos^2\dfrac{2\pi}{13}$;

   (b) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{10}$;

   (c) $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{11}$;

   (d) $\sin 2$ и $\sin 3$;

   (e) $\cos 4$ и $\cos 5$;

   (f) $\operatorname{ctg} 5$ и $\operatorname{ctg} 6$;

   (g) $\cos 6$ и $\cos 6{,}5$;

   (h) $\operatorname{tg} 1{,}5$ и $\operatorname{tg} 4{,}7$.

7. Докажите, что при $0 < \beta < 90^\circ$ справедливо неравенство $\cos\beta + \sin\beta > 1$.

8. Известно, что $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

9. Известно, что $\operatorname{ctg}\gamma = -\dfrac{20}{21}$, $\pi < \gamma < \dfrac{5\pi}{2}$. Найдите $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$.

10. Вычислите

    (a) $\sin 225^\circ \cos 240^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$;

    (b) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\cos\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

    (c) $\cos(-9{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi) - \sin 7{,}6\pi \operatorname{ctg} 2{,}4\pi$;

    (d) $\sin(-1{,}3\pi)\cos(-1{,}7\pi)\operatorname{tg}(-0{,}7\pi) + \sin 0{,}8\pi \cos 1{,}8\pi \operatorname{tg} 1{,}2\pi$.

11. Упростите выражения:

    (a) $\operatorname{tg}(270^\circ - \varphi)\operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) - \cos(90^\circ + \varphi)\sin(180^\circ + \varphi)$;

    (b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha - \sin^2(\alpha - 3\pi) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;

    (c) $\dfrac{\cos\psi}{1 + \sin\psi} + \operatorname{tg}\psi$;

(d) $\dfrac{1-\sin^2\gamma}{1-\cos^2\gamma}+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\gamma$;

(e) $(\operatorname{ctg}\varphi-3\operatorname{tg}\varphi)^2-(\operatorname{ctg}\varphi+3\operatorname{tg}\varphi)^2$.

12. Вычислите:

(a) $\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{tg}6^\circ\operatorname{tg}9^\circ\ldots\operatorname{tg}84^\circ\operatorname{tg}87^\circ$;

(b) $\dfrac{\sin 150^\circ-\cos 240^\circ}{\operatorname{ctg}730^\circ\operatorname{ctg}800^\circ+\operatorname{tg}730^\circ\operatorname{tg}800^\circ}$.

13. Известно, что $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{3}$. Найдите

(a) $\dfrac{2\cos\gamma+7\sin\gamma}{3\cos\gamma-4\sin\gamma}$;

(b) $\dfrac{\cos^2\gamma-\sin\gamma\cos\gamma-3\sin^2\gamma}{2\cos^2\gamma-3\cos\gamma\sin\gamma+5\sin^2\gamma}$;

(c) $\dfrac{\cos\gamma-\sin\gamma}{\cos^3\gamma+\sin^3\gamma}$.

14. Упростите выражения:

(a) $\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)\right)^2+\dfrac{2\sin^2(3\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}$;

(b) $\dfrac{\cos^4\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta}$;

(c) $\sqrt{\sin^2\gamma(1-\operatorname{ctg}\gamma)+\cos^2\gamma(1-\operatorname{tg}\gamma)}$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\gamma<2\pi$;

(d) $\operatorname{ctg}\delta-\sqrt{\dfrac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta}}$ при $\pi<\delta<2\pi$;

(e) $\sqrt{4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1}-\sqrt{4-4\sin^2\alpha}$ при $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

(a) $\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha$;

(b) $3\cos^2\alpha-5\sin\alpha$;

(c) $\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

16. Докажите неравенства:

    (a) $\sin^2\beta\cos^2\beta \leqslant \dfrac{1}{4}$;

    (b) $\sin^4\beta + \cos^4\beta \geqslant \dfrac{1}{2}$;

    (c) $\sin^6\beta + \cos^6\beta \geqslant \dfrac{1}{4}$;

    (d) $\sin^8\beta + \cos^8\beta \geqslant \dfrac{1}{8}$;

    (e) $9\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \leqslant 4$.

17. Известно, что $\cos\alpha - \sin\alpha = p$. Найдите

    (a) $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$;

    (b) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

18. Найдите $\dfrac{\sin^{10}\gamma}{1-\operatorname{tg}^4\gamma} + \dfrac{\cos^{10}\gamma}{1-\operatorname{ctg}^4\gamma}$, если известно, что $\sin^2\gamma\cos^2\gamma = m$.

Определение тригонометрических функций. Основное тригонометрическое тождество и его следствия. Формулы приведения. Задачи для домашней работы

19. Найдите значение выражения:

    (a) $\left(\dfrac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60^\circ - \cos^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ\right)^{-1}$;

    (b) $\sqrt{(1-2\sin 45^\circ)^2} - \sqrt{(1-2\cos 45^\circ)^2}$.

20. В какой четверти может находиться угол β, если известно, что

    (a) $\cos\beta < 0$, $\sin\beta < 0$;

    (b) $|\operatorname{tg}\beta| = -\operatorname{tg}\beta$?

21. Определите знак выражения

    (a) $\sin\dfrac{4\pi}{7}\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{13\pi}{9}$;

(b) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)\cos\dfrac{19\pi}{8}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{7\pi}{11}\,\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

22. Найдите значение выражения

(a) $\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$;

(b) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\,0-2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.

23. Сравните числа

(a) $\sin\dfrac{7\pi}{10}$ и $\sin^2\dfrac{7\pi}{10}$;

(b) $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{7\pi}{12}$;

(c) $\sin\dfrac{3\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{7\pi}{12}$;

(d) $\sin 4$ и $\sin 5$;

(e) $\cos 2$ и $\cos 3$;

(f) $\mathrm{ctg}\,3$ и $\mathrm{ctg}\,4$;

(g) $\mathrm{tg}\,5$ и $\mathrm{tg}\,6$;

(h) $\mathrm{ctg}\,3{,}2$ и $\mathrm{ctg}\,6{,}3$.

24. Докажите, что при $90^\circ < \beta < 180^\circ$ справедливо неравенство $-\cos\beta+\sin\beta > 1$.

25. Известно, что $\sin\gamma = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$. Найдите $\cos\gamma$, $\mathrm{ctg}\,\gamma$, $\mathrm{tg}\,\gamma$.

26. Известно, что $\mathrm{tg}\,\gamma = \dfrac{24}{7}$, $90^\circ < \gamma < 360^\circ$. Найдите $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\mathrm{ctg}\,\gamma$.

27. Вычислите

(a) $\sin\dfrac{7\pi}{4}\cos\dfrac{7\pi}{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{5\pi}{3}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{4\pi}{3}$;

(b) $\sin(-300^\circ)\cos(-135^\circ)\,\mathrm{tg}\,(-240^\circ)\,\mathrm{ctg}\,(-150^\circ)$;

(c) $\sin 5{,}9\pi \operatorname{tg}(-0{,}6\pi) + \cos 3{,}6\pi \operatorname{ctg}(-8{,}9\pi)$;

(d) $\operatorname{ctg} 2{,}2\pi \sin 2{,}7\pi \sin(-3{,}2\pi) + \operatorname{ctg}(-2{,}3\pi) \cos(-5{,}7\pi) \cos 9{,}2\pi$.

28. Упростите выражения:

(a) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \varphi) \operatorname{ctg}(180^\circ - \varphi) - \operatorname{ctg}(90^\circ + \varphi) \operatorname{tg}(180^\circ + \varphi)$;

(b) $\cos(5\pi - \gamma) + \operatorname{ctg}(3{,}5\pi - \gamma) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \gamma\right) \operatorname{ctg}(\pi + \gamma)$;

(c) $\operatorname{ctg}\psi + \dfrac{\sin\psi}{\cos\psi + 1}$;

(d) $\operatorname{ctg}^6\gamma - \dfrac{\cos^2\gamma - \operatorname{ctg}^2\gamma}{\sin^2\gamma - \operatorname{tg}^2\gamma}$.

29. Вычислите:

(a) $\operatorname{ctg} 1^\circ \operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{ctg} 5^\circ \ldots \operatorname{ctg} 87^\circ \operatorname{ctg} 89^\circ$;

(b) $\sin 750^\circ \sin 150^\circ + \cos 930^\circ \cos(-870^\circ) + \operatorname{tg} 780^\circ$.

30. Докажите тождество:

(a) $\dfrac{\cos\gamma \operatorname{ctg}\gamma - \sin\gamma \operatorname{tg}\gamma}{(\sin\gamma + \cos\gamma)^2 - \cos\gamma \sin\gamma} = \dfrac{1}{\sin\gamma} - \dfrac{1}{\cos\gamma}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{3} - 2\sin\gamma}{2\cos\gamma - 1} = \dfrac{1 + 2\cos\gamma}{\sqrt{3} + 2\sin\gamma}$;

(c) $\sin^6\gamma + \cos^6\gamma = 1 - 3\sin^2\gamma \cos^2\gamma$.

31. Известно, что $\operatorname{ctg}\gamma = -4$. Найдите

(a) $\dfrac{5\cos\gamma - 7\sin\gamma}{2\cos\gamma + 3\sin\gamma}$;

(b) $\dfrac{2\cos^2\gamma + 3\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma - \cos\gamma\sin\gamma - 11\sin^2\gamma}$;

(c) $\dfrac{4\cos\gamma - \sin\gamma}{\cos^3\gamma - 6\sin^3\gamma}$.

32. Упростите выражения:

(a) $\left(\dfrac{\cos(2{,}5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(7\pi + \alpha)} - \sin(-\alpha) \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

(b) $\dfrac{(\operatorname{tg}\delta+\operatorname{ctg}\delta)^2-(\operatorname{tg}\delta-\operatorname{ctg}\delta)^2}{\dfrac{1}{\sin^2\delta\cos^2\delta}-\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{ctg}^2\delta}$;

(c) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\omega-\cos^2\omega\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\omega}$ при $90^\circ<\beta<180^\circ$, $180^\circ<\omega<270^\circ$;

(d) $\sqrt{2-2\cos^2\beta}+\sqrt{2\sin^2\beta-2\sqrt{2}\sin\beta+1}$ при $135^\circ\leqslant\beta\leqslant180^\circ$.

33. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

(a) $3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

(b) $5\sin^2\alpha+\cos\alpha$;

(c) $\sin^2\alpha\cos^4\alpha\left(2-\sin^2\alpha\right)$;

(d) $\dfrac{1}{\cos^4\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$;

(e) $1-5\sqrt{\cos^2\alpha}-3\sin^2\alpha$.

34. Докажите, что если $0<\delta<90^\circ$, то
$\sin\delta+\cos\delta+\operatorname{ctg}\delta+\operatorname{tg}\delta+\dfrac{1}{\sin\delta}+\dfrac{1}{\cos\delta}\geqslant6.$

35. Докажите, что $\operatorname{ctg}^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi+\dfrac{1}{\sin^2\varphi}+\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\geqslant6.$

36. Найдите $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha$, если известно, что
$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=11.$

Формулы сложения. Задачи для классной работы

37. (a) Найдите $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\gamma\right)$, если $\operatorname{tg}\gamma=-\dfrac{3}{4}$, $0<\gamma<\pi$.

(b) Найдите $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{53}}$, $\pi\leqslant\beta\leqslant2\pi$.

(c) Найдите все возможные значения $\cos(\alpha-\gamma)$, если $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\sin\gamma=\dfrac{8}{17}$;

(d) Найдите $\sin\gamma$, если $\cos\alpha = 0{,}7$, $\cos(\alpha+\gamma) = 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $\dfrac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

38. Докажите, что если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, то $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

39. Известно, что $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, то $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \left(\sqrt{2}+1\right)\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}\beta = \left(\sqrt{2}-1\right)\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}\gamma = 2\sin x\cos x$. Следует ли отсюда, что $\alpha = \beta+\gamma$?

40. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

    (a) $\sin\delta + \cos\delta$;

    (b) $\dfrac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

41. Докажите тождества:

    (a) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$;

    (b) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

42. Упростите выражения:

    (a) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sin^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin^2\alpha$;

    (b) $(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1)\cos(\alpha+\beta) + (1 - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

    (c) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

43. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что оно существует.

44. Найдите все значения, которые может принимать отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к сумме его катетов.

Формулы сложения. Задачи для домашней работы

45. (a) Найдите $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\gamma\right)$, если $\operatorname{ctg}\gamma=\dfrac{21}{20}$, $\pi<\gamma<2\pi$.

    (b) Найдите $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\beta\right)$, если $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{3}{11}$, $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$.

    (c) Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\sin\gamma=-\dfrac{24}{25}$.

    (d) Найдите $\alpha-\beta$, если $\sin\alpha=\dfrac{40}{41}$, $0<\alpha<90^\circ$, $\sin\beta=-\dfrac{9}{41}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

    (e) Найдите $\alpha-\beta$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{p\sqrt{3}}{4-p}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{p-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<90^\circ$, $0<\beta<90^\circ$.

46. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

    (a) $\sqrt{3}\sin\delta-\cos\delta$;

    (b) $\sqrt{2}\sin\gamma-\sqrt{6}\cos\gamma$.

47. Докажите тождества:

    (a) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$;

    (b) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

48. (a) Найдите $\operatorname{ctg}(120^\circ+\gamma)$, если $2\cos^2\gamma+\left(6-\sqrt{2}\right)\cos\gamma-3\sqrt{2}=0$.

    (b) Найдите $\sin\psi$, если $\sin\left(\psi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{20}{29}$, $\dfrac{3\pi}{4}<\psi<\dfrac{5\pi}{4}$.

49. Известно, что α, β, γ – углы некоторого треугольника. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

50. Углы ромба α и β удовлетворяют соотношению $\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=1$. Найдите эти углы.

51. Углы треугольника связаны соотношением $\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Следует ли отсюда, что треугольник равнобедренный?

Формулы кратных углов. Задачи для классной работы

52. Используя формулы сложения, выведите формулы:

   (a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

   (b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

   (c) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

   (d) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

   (e) $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

   (f) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

   (g) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

   (h) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

   (i) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

53. (a) Найдите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

   (b) Найдите $\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\cos(\pi - 4\alpha) = -\dfrac{1}{4}$.

   (c) Известно, что $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{2}{7}$. Найдите $\operatorname{tg} 2\gamma$, $\cos 4\gamma$ и $\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

   (d) Найдите $\dfrac{3\sin\gamma}{4-5\cos\gamma}$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2} = -\dfrac{5}{3}$.

54. Вычислите:

(a) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{8}+\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{8}$;

(b) $\sin^4\dfrac{23\pi}{12}-\cos^4\dfrac{13\pi}{12}$;

(c) $\cos 2\alpha$, если $\dfrac{\sin\alpha-7\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-\dfrac{2}{3}$.

55. Упростите выражения:

(a) $\dfrac{2\cos^2\gamma-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\gamma\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\gamma\right)}$;

(b) $\sin^2\gamma\operatorname{tg}\gamma-\cos^2\gamma\operatorname{ctg}\gamma+2\operatorname{ctg}2\gamma$;

(c) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\gamma}-\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{9\pi}{4}+\gamma\right)\sin\gamma}{cos2\gamma}$;

(d) $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\gamma\right)+\dfrac{1}{2}\sin 2\gamma$;

(e) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\gamma}}$, если $0\leqslant\gamma\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

56. Найдите $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\gamma\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\gamma\right)$, если $\cos\gamma\sin(5{,}5\pi+\gamma)=p$. Какие значения может принимать p?

57. Найдите $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)=p$, $135^\circ<\alpha<180^\circ$.

58. Вычислите:

(a) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$;

(b) $\cos\dfrac{\pi}{11}\cos\dfrac{2\pi}{11}\cos\dfrac{3\pi}{11}\cos\dfrac{4\pi}{11}\cos\dfrac{5\pi}{11}$;

(c) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$;

(d) $\dfrac{8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ-\sin 10^\circ}{\sin^2 40^\circ}$.

59. (a) Известно, что $6\sin^2\alpha\geqslant 4+\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha\geqslant-\dfrac{1}{9}$. Найдите $\cos\alpha$.

(b) Известно, что $9\cos^2\gamma \leqslant 5 + 9\sin\gamma$ и $\cos 2\gamma \geqslant \dfrac{7}{9}$. Найдите $\operatorname{tg} 2\gamma$.

Формулы кратных углов. Задачи для домашней работы

60. (a) Найдите $\sin 2\delta$, $\cos 2\delta$, $\sin 3\delta$, $\operatorname{ctg} 3\delta$, если $\sin\delta = \dfrac{1}{3}$, $\cos\delta < 0$.

(b) Известно, что $\operatorname{ctg}\psi = -3$, $0 < \psi < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos 2\psi$, $\sin 2\psi$, $\operatorname{tg} 2\psi$, $\sin 3\psi$.

(c) Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{3}$.

(d) Найдите угол треугольника γ, если $\sin^4\gamma = 0{,}5 + \cos^4\gamma$.

(e) Найдите угол φ треугольника, если известно, что $\sin^3\varphi\cos\varphi = \dfrac{1}{4} - \cos^3\varphi\sin\varphi$.

61. Вычислите:

(a) $\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cos^2\dfrac{17\pi}{16}$;

(b) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8} + \operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{8}$;

(c) $\sin^2\dfrac{\pi}{13} + \sin^2\dfrac{11\pi}{26}$;

(d) $\dfrac{\sin 4\gamma}{\sin\gamma}$, если $4\sin^2\gamma - 9\cos\gamma - 6 = 0$;

(e) $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{4} - \beta\right)$, если $\sin 2\beta = -\dfrac{3}{8}$;

(f) $\sin 2\alpha$, если $\dfrac{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}{5\cos\alpha - 4\sin\alpha} = -2$.

62. Докажите тождества:

(a) $1 + \cos(3\pi + 3\beta)\cos 2\beta - \cos(1{,}5\pi - 3\beta)\sin 2\beta = 2\sin^2 2{,}5\beta$;

(b) $\operatorname{tg}^4\beta\bigl(8\cos^2(\pi - \beta) - \cos(\pi + 4\beta) - 1\bigr) = 8\sin^4\beta$;

(c) $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)\left(1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{1}{2\cos^4\dfrac{\beta}{2}}$.

63. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

(a) $\cos^2\omega - 4\cos 2\omega$;

(b) $$\frac{\sin\left(2\omega + \dfrac{5\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\omega + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 1}.$$

64. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$, если $\cos\gamma + \sin\gamma = p$. Какие значения может принимать p?

65. Известно, что $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 4$, $\operatorname{tg}\alpha = p$. Найдите $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$.

66. Пусть α и β – острые углы прямоугольного треугольника. Докажите, что

(a) $$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) - 4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta - 4 + 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

(b) $$\frac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - \cos(3\pi + \beta)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\alpha - \pi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\beta}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

67. Является ли число $\operatorname{ctg}^2\dfrac{9\gamma}{2}$ рациональным, если $\cos 3\gamma = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\right)$?

68. Найдите величины α и β острых углов прямоугольного треугольника, если $\sin 2\alpha = 1 + \sin(3\alpha - \beta)$.

Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение. Задачи для классной работы

69. Упростите выражения:

(a) $\cos 47^\circ + \cos 73^\circ$;

(b) $\sin 93^\circ - \cos 63^\circ$;

(c) $\dfrac{2\sin^2 49^\circ - 1}{\cos 53^\circ - \cos 37^\circ}$;

(d) $\dfrac{\sin 7\gamma + \sin 11\gamma}{\cos 10\gamma - \cos 8\gamma}$;

(e) $\sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$;

(f) $\dfrac{\sin 3\gamma - \sin\gamma \cos 2\gamma}{\sin 3\gamma + \sin\gamma}$;

(g) $\cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)$;

(h) $\cos^2\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right)$.

70. Докажите тождества:

(a) $\sqrt{3} - 2\sin 2\beta = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \beta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \beta\right)$;

(b) $3 - 4\cos^2\beta = 4\sin\left(\beta + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(c) $\dfrac{\sin 5\gamma - 2\sin 3\gamma\cos 3\gamma}{1 - \cos 5\gamma - 2\sin^2 3\gamma} = \operatorname{ctg}\dfrac{11\gamma}{2}$;

(d) $\dfrac{\sin 4\gamma + 2\sin 2\gamma}{2(\cos\gamma + \cos 3\gamma)} = \cos\gamma \operatorname{tg} 2\gamma$.

71. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $\sin\left(\gamma - \dfrac{\pi}{5}\right)\sin\left(\gamma + \dfrac{\pi}{20}\right)$.

72. Найдите $\dfrac{\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = t$.

73. Найдите $\dfrac{\sin 5\delta}{\sin 3\delta}$, если $\dfrac{\sin 3\delta}{\sin\delta} = \dfrac{6}{5}$.

74. (a) Найдите $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Найдите $\dfrac{\cos 11\gamma + 3\cos 9\gamma + 3\cos 7\gamma + \cos 5\gamma}{\cos 8\gamma}$, если $\cos\gamma = -\dfrac{1}{3}$.

(c) Найдите $\cos 12\beta - \cos 6\beta - 2\cos 7\beta\cos 5\beta$, если $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

(d) Найдите $\sin 2\omega \cos 5\omega - \sin\omega\cos 6\omega$, если $\sin\omega = p$.

75. Вычислите:

(a) $\sin\dfrac{7\pi}{16}\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{\pi}{16}\sin\dfrac{\pi}{24}$;

(b) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$;

(c) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$;

(d) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$;

(e) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{7}$.

Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение. Задачи для домашней работы

76. Упростите выражения:

(a) $\cos 29^\circ - \cos 31^\circ$;

(b) $\cos 14^\circ - \sin 16^\circ$;

(c) $\dfrac{\sin 11^\circ - \sin 49^\circ}{1 - 2\cos^2 54^\circ 30'}$;

(d) $\dfrac{\sin 4\gamma - \sin 6\gamma}{\cos 3\gamma + \cos 7\gamma}$;

(e) $\cos 17^\circ \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cos 86^\circ$;

(f) $\dfrac{\cos 2\gamma - \cos 4\gamma}{\cos 2\gamma - \cos\gamma\cos 3\gamma}$;

(g) $\sin^2\beta + \sin^2\gamma + \cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)$;

(h) $\sin^2\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\alpha + \dfrac{7\pi}{12}\right)$.

77. Докажите тождества:

(a) $1 + 2\cos 2\alpha = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$;

(b) $\dfrac{2\cos^2 2\gamma + \cos 5\gamma - 1}{\sin 5\gamma + 2\cos 2\gamma \sin 2\gamma} = \operatorname{ctg}\dfrac{9\gamma}{2}$;

(c) $\dfrac{2\cos\beta+\cos 3\beta+\cos 5\beta}{\cos 3\beta+\sin\beta\sin 2\beta}=4\cos 2\beta;$

(d) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\omega\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\omega\right)-\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+2\omega\right)=\sin 2\omega.$

78. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:

(a) $\sin\left(\gamma+\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\gamma-\dfrac{\pi}{24}\right);$

(b) $\dfrac{2\cos^2\gamma+\cos 4\gamma-1}{\cos^4\dfrac{\gamma}{2}-\sin^4\dfrac{\gamma}{2}}.$

79. Проверьте справедливость следующих равенств:

(a) $\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=\dfrac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}};$

(b) $\dfrac{1}{2}\sin 40^\circ-\cos 30^\circ+\cos 20^\circ\cos 10^\circ=2\sqrt{3}\sin^2 20^\circ\cos 20^\circ;$

(c) $\cos^2 73^\circ+\cos 47^\circ\cos 73^\circ+\cos^2 47^\circ=\dfrac{3}{4}.$

80. Известно, что $2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=p$. Найдите $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+\alpha\right)$, а также укажите допустимые значения параметра p.

81. Известно, что $\cos^2 2\beta+(2p-5)\sin 2\beta+10p-1=0$. Найдите $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}-\beta\right)$, а также укажите допустимые значения параметра p.

82. (a) Найдите $\sin 5\alpha-\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

(b) Найдите $\cos 3\alpha-\cos 5\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) Найдите $\cos 8\beta+\cos 6\beta+2\sin 5\beta\sin 3\beta$, если $\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(d) Найдите $\cos 7\omega\cos 4\omega-\cos 8\omega\cos 3\omega$, если $\cos\omega=p$.

83. Вычислите:

(a) $\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{7\pi}{16}\sin\dfrac{5\pi}{24};$

(b) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

(c) $\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$;

(d) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Ответы

1. (a) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
   (b) $-6\sqrt{3}$.
2. (a) Нет;
   (b) да.
3. (a) II четверть;
   (b) II или III четверть.
4. (a) Отрицательно;
   (b) положительно.
5. (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;
   (b) $-2\sqrt{2}$;
   (c) $-\sqrt{2}$.
6. (a) $\cos\dfrac{2\pi}{13} > \cos^2\dfrac{2\pi}{13}$;
   (b) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5} < \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{10}$;
   (c) $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5} > \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{11}$;
   (d) $\sin 2 > \sin 3$;
   (e) $\cos 4 < \cos 5$;
   (f) $\operatorname{ctg} 5 > \operatorname{ctg} 6$;
   (g) $\cos 6 < \cos 6{,}5$;
   (h) $\operatorname{tg} 1{,}5 < \operatorname{tg} 4{,}7$.

8. $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

9. $\sin\gamma = \dfrac{21}{29}$; $\cos\gamma = \dfrac{20}{29}$; $\operatorname{tg}\gamma = -\dfrac{21}{20}$.

10. (a) $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$;
    (b) $-\dfrac{1}{4}$;
    (c) 0;
    (d) 1.
11. (a) $\cos^2\varphi$;
    (b) 1;
    (c) $\dfrac{1}{\cos\psi}$;
    (d) $\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$;
    (e) -12.

12. (a) 1;
(b) $\frac{1}{2}$.

13. (a) $\frac{13}{5}$;
(b) $\frac{3}{14}$;
(c) $\frac{5}{7}$.

14. (a) 1;
(b) -1;
(c) $\cos\gamma - \sin\gamma$;
(d) $\frac{1}{\sin\delta}$;
(e) -1.

15. (a) $\min = -4$, $\max = 1$;
(b) $\min = -5$, $\max = \frac{61}{12}$;
(c) $\min = -1$, $\max$ не существует.

17. (a) $\frac{3p - p^3}{2}$;
(b) $\frac{1}{2} + p^2 - \frac{1}{2}p^4$.

18. $m^3 - m^2$.

19. (a) 1;
(b) 0.

20. (a) III четверть;
(b) II или IV четверть.

21. (a) Положительно;
(b) положительно.

22. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;
(b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

23. (a) $\sin\frac{7\pi}{10} > \sin^2\frac{7\pi}{10}$;
(b) $\cos\frac{3\pi}{5} < \cos\frac{3\pi}{5}\sin\frac{7\pi}{12}$;
(c) $\sin\frac{3\pi}{5} > \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{7\pi}{12}$;
(d) $\sin 4 > \sin 5$;
(e) $\cos 2 > \cos 3$;
(f) $\operatorname{ctg} 3 < \operatorname{ctg} 4$;
(g) $\operatorname{tg} 5 < \operatorname{tg} 6$;
(h) $\operatorname{ctg} 3{,}2 < \operatorname{ctg} 6{,}3$.

25. $\cos\gamma = \dfrac{12}{13}$; $\operatorname{ctg}\gamma = -\dfrac{12}{5}$; $\operatorname{tg}\gamma - \dfrac{5}{12}$.

26. $\sin\gamma = -\dfrac{24}{25}$; $\cos\gamma = -\dfrac{7}{25}$; $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{7}{24}$.

27. (a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;
    (b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;
    (c) 0;
    (d) 1.

28. (a) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$;
    (b) $\operatorname{tg}\gamma$;
    (c) $\dfrac{1}{\sin\psi}$;
    (d) 0.

29. (a) 1;
    (b) $1+\sqrt{3}$.

31. (a) $\dfrac{27}{5}$;
    (b) $\dfrac{35}{9}$;
    (c) $\dfrac{289}{70}$.

32. (a) 1;
    (b) 2;
    (c) $-\sin\omega\cos\beta$;
    (d) 1.

33. (a) max и min не существуют;
    (b) $\min = -1$, $\max = \dfrac{101}{20}$;

(c) $\min = 0$, $\max = \dfrac{1}{4}$;

(d) $\min = 1$, $\max$ не существует;

(e) $\min = -\dfrac{49}{12}$, $\max = -2$.

36. $\dfrac{2}{13}$.

37. (a) $\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$;

(b) $-\dfrac{53\sqrt{3}+56}{143}$;

(c) $\pm\dfrac{171}{221}$, $\pm\dfrac{21}{221}$;

(d) $-\dfrac{7}{10}$.

39. Да.

40. (a) $\min = -\sqrt{2}$, $\max = \sqrt{2}$;

(b) $\min = -\sqrt{17}$, $\max = \sqrt{17}$.

42. (a) $\dfrac{3}{2}$;

(b) 0;

(c) $\operatorname{tg}^2\beta$.

43. 1.

44. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

45. (a) $\dfrac{20-21\sqrt{3}}{58}$;

(b) $-\dfrac{11+3\sqrt{3}}{2\sqrt{130}}$;

(c) $\pm\dfrac{4}{3}$, $\pm\dfrac{44}{117}$;

(d) 90°;

(e) 30°.

46. (a) $\min = -2$; $\max = 2$;
    (b) $\min = -2\sqrt{2}$, $\max = 2\sqrt{2}$.

48. (a) $-\sqrt{3} \pm 2$;
    (b) $-\dfrac{1}{29\sqrt{2}}$.

50. $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

51. Да $(\alpha = \beta)$.

53. (a) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{3}$;
    (b) $\dfrac{25}{64}$;
    (c) $\operatorname{tg} 2\gamma = \dfrac{28}{45}$, $\cos 4\gamma = \dfrac{1241}{2809}$, $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{53}+7}{2\sqrt{53}}}$;
    (d) $-\dfrac{45}{28}$.

54. (a) 2;
    (b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
    (c) $-\dfrac{168}{193}$.

55. (a) 1;
    (b) 0;
    (c) 1;
    (d) $\dfrac{1}{2}$;
    (e) $2\sin\gamma$.

56. $p + \dfrac{1}{2}$; допустимые значения p – промежуток $p \in [-1; 0]$.

57. $-\sqrt{1-p^2}$.

58. (a) $\dfrac{1}{4}$;
    (b) $\dfrac{1}{32}$;
    (c) $\dfrac{1}{16}$;
    (d) 2.

59. (a) $-\dfrac{2}{3}$
    (b) $\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.

60. (a) $\sin 2\delta = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\delta = \dfrac{7}{9}$, $\sin 3\delta = \dfrac{23}{27}$, $\operatorname{tg} 3\delta = -\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$;
    (b) $\cos 2\psi = \dfrac{4}{5}$, $\sin 2\psi = -\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg} 2\psi = -\dfrac{3}{4}$, $\sin 3\psi = \dfrac{13}{5\sqrt{10}}$;
    (c) $\dfrac{44}{125}$;
    (d) 60°;
    (e) 75° или 15°.

61. (a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}}$;
    (b) $-2\sqrt{2}$;
    (c) 1;
    (d) $\dfrac{7}{8}$;
    (e) $\dfrac{11}{5}$;
    (f) $\dfrac{39}{89}$.

63. (a) $\min = -3$, $\max = 4$;
    (b) $\min = 1-\sqrt{2}$, $\max = 1+\sqrt{2}$.

64. $\dfrac{1}{2}p^2$; $p \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

65. $-\dfrac{2p}{p^2+3}$.

67. Да (число равно $\dfrac{25}{7}$).

68. $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$ или $\alpha = 75°$, $\beta = 15°$.

69. (a) $\cos 13°$;
   (b) $\sin 33°$;
   (c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
   (d) $-\dfrac{\cos 2\gamma}{\sin\gamma}$;
   (e) 0;
   (f) $\dfrac{1}{2}$;
   (g) 1;
   (h) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\alpha$.

71. $\min = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$, $\max = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}$.

72. $t\sqrt{2}$.

73. $\dfrac{31}{30}$.

74. (a) $-\dfrac{32}{27}$;
   (b) $-\dfrac{8}{27}$;
   (c) $\dfrac{10}{343}$;
   (d) $8p^5 - 8p^3 + p$.

75. (a) $\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$;
   (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

(c) 4;

(d) $-\dfrac{1}{2}$;

(e) $-\sqrt{7}$.

76. (a) $\sin 1^\circ$;

(b) $\cos 46^\circ$;

(c) $-\sqrt{3}$;

(d) $-\dfrac{\sin\gamma}{\cos 2\gamma}$;

(e) 0;

(f) 2;

(g) 1;

(h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha$.

78. (a) $\min = -\dfrac{1}{4}$, $\max = \dfrac{3}{4}$;

(b) $\min = -2$, $\max = 2$.

80. $\dfrac{11}{4} - p$; $p \in [2; 3]$.

81. $p - \dfrac{1}{2}$; $p \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

82. (a) $-\dfrac{476}{169\sqrt{13}}$;

(b) $-\dfrac{16}{9\sqrt{3}}$;

(c) $-\dfrac{117}{125}$;

(d) $-8p^5 + 12p^3 - 4p$.

83. (a) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{16\sqrt{2}}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

(c) $\dfrac{1}{8}$;

(d) $-\dfrac{1}{2}$.

Иррациональные уравнения, системы и неравенства.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-14x+13}+x=5$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3}=x+7$.
4. Решите уравнение
$$\sqrt{1-\frac{4}{2-x}}=\frac{1}{2-x}.$$
5. Решите уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}.$$
6. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.
7. Решите уравнение $|x-\sqrt{x}-3|+|\sqrt{x}+7-x|=6$.
8. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$.
9. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.
10. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x}+3y=9,\\ x-1=(\sqrt{x}+1)\,y.\end{cases}$$
11. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3\sqrt{3x^2-y^4}=2x-7y,\\ \\ 6\sqrt{3x^2-y^4}=x-8y.\end{cases}$$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \dfrac{7}{2}, \\ \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \dfrac{27}{2}. \end{cases}$$

13. Найдите все пары положительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} + 2 = 0, \\ \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

14. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0.$$

15. Решите неравенство $\sqrt{x^2-9} > x-1$.

16. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

17. Решите неравенство $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} < 12$.

18. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2} + 1 < \sqrt{3-x^2}$.

19. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geqslant 1 + \sqrt{x+1}.$$

20. Решите неравенство

$$\frac{3x+3}{3-\sqrt{x^2-2x+10}} \leqslant 1.$$

21. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x} < 1.$$

22. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3} \geqslant 1.$$

23. Решите неравенство

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1.$$

24. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5$.

25. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x+2)\sqrt{ax+x-x^2-a} \geqslant 0$ найдутся два числа, разность между которыми равна 4?

Ответы:

1. -2.
2. $\frac{7}{9}$.
3. $\frac{5+\sqrt{137}}{2}$.
4. $-\sqrt{5}$.
5. $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$.
6. 1.
7. 4; $\frac{17+\sqrt{33}}{2}$.
8. -6;4.
9. 4; $\sqrt{13}-1$.
10. (9;2).
11. $(0;0)$,$(-2\sqrt{11};-\sqrt{11})$.
12. $\left(\frac{19}{4};\frac{17}{8}\right)$.
13. $\left(\frac{1}{3};3\right)$, $\left(\sqrt[4]{\frac{21}{76}};2\sqrt[4]{\frac{84}{19}}\right)$.
14. (-1;0), (1;4).
15. $(-\infty;-3]\cup(5;+\infty)$.
16. $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$.
17. $[0;81)$.
18. $\left[-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$.
19. (0;1].
20. $\left[-\frac{5}{4};1\right)\cup(1;+\infty)$.

21. $(-\infty; 1) \cup (3; 5]$.
22. (-3;0].
23. $(-\infty; -4] \cup [1; 3) \cup (5; +\infty)$.
24. $[3; 35) \cup (120; +\infty)$.
25. $a \in [-6; -3] \cup [5; +\infty)$.

Указания.

6. Возвести в куб, воспользоваться соотношением $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ и, решив полученное уравнение-следствие, обязательно сделать проверку!

7. Сделать замену $t = x - \sqrt{x}$. Можно также воспользоваться геометрическим смыслом модуля.

8. Сделать замену $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

24. Сделать замену $t = \sqrt{\sqrt{x+1} - 2}$.

25. Разложить подкоренное выражение на множители, найти значения параметра, при которых ОДЗ допускает расположение точек на требуемом расстоянии и затем решать неравенство при допустимых a методом интервалов.

Задачи для решения дома

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-8x+5}+2=x$.

2. Решите уравнение $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+5$.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\frac{6}{x-3}}=\frac{1}{x-3}.$$

5. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-10}.$$

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

7. Решите уравнение $|x-\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}+6-x|=8$.

8. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-12x+46}-\sqrt{x^2-6x+22}=3$.

9. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+2y=5,\\ 2\,(x+2)=(\sqrt{x}+3)\,y.\end{cases}$$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\sqrt{2y^2-x^4}=3x+2y,\\ 7\sqrt{2y^2-x^4}=2x+3y.\end{cases}$$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5,\\ 4x^2+2x+3y-9y^2=32.\end{cases}$$

13. Найдите все пары положительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

14. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x\sqrt{8+2x-x^2}} < 0.$$

15. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x + 12} > x - 5$.

16. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant x - 1$.

17. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 17} + \sqrt[4]{x^2 + 17} > 6$.

18. Решите неравенство $2 > \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}$.

19. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - 6}{2 - \sqrt{x+4}} \geqslant 2 + \sqrt{x+4}.$$

20. Решите неравенство

$$\frac{2x+8}{8 - \sqrt{x^2 - 2x + 65}} \leqslant 1.$$

21. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1.$$

22. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4+6x-x^2}}{x-4} \geqslant 1.$$

23. Решите неравенство

$$\frac{26 - 3x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < -1.$$

24. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\sqrt{x+99-20\sqrt{x-1}}>5$.

25. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x-5)\sqrt{ax+2x-x^2-2a}\leqslant 0$ найдутся два числа, разность между которыми равна 6?

Ответы:

1. $2+\sqrt{3}$.
2. 3.
3. $\dfrac{5+\sqrt{113}}{2}$.
4. $\sqrt{10}$.
5. $\dfrac{7+\sqrt{11}}{2}$.
6. -1.
7. $0; 1; \dfrac{17+\sqrt{33}}{2}$.
8. -3;9.
9. $6; \sqrt{13}+1$.
10. $\left(\dfrac{49}{25}; \dfrac{9}{5}\right)$.
11. $(0;0)$,$(-\sqrt{17}; 3\sqrt{17})$.
12. $\left(\dfrac{17}{4}; \dfrac{5}{2}\right)$.
13. $\left(3; \dfrac{1}{3}\right), \left(\sqrt[4]{66}; \dfrac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.
14. (-2;-1), (2;4).
15. $(-\infty; 2] \cup \left(\dfrac{13}{2}; +\infty\right)$.
16. $\{1\} \cup [2; +\infty))$.
17. $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
18. $\left[-1; -\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}; 1\right]$.
19. (0;4].
20. $[-5; 1) \cup (1; +\infty)$.
21. $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right) \cup (5; +\infty)$.
22. (4;6].
23. $(-\infty; -4] \cup [6; 10) \cup (14; +\infty)$.
24. $[10; 50) \cup (145; +\infty)$.
25. $a \in (-\infty; -4] \cup [8; 11]$.

Обратные тригонометрические функции.

Задачи для решения в классе

1. Найдите значение выражения $\cos(\arcsin 0{,}6)$.
2. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)}{\pi}$.
3. Вычислите $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-1) + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{\arcsin\dfrac{3}{5} + \arccos 0{,}6}{\pi}$.
5. Вычислите $\arcsin(\sin(\pi^2))$.
6. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$.
7. Найдите значение выражения $\arccos\dfrac{36}{85} - \arccos\dfrac{15}{17} + \arcsin\dfrac{4}{5}$.
8. Вычислите $\sin^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arcctg}(-3)\right)$.
9. Вычислите $\sin(2\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$.
10. При каких x числа $\arcsin(3^{-x})$ и $\operatorname{arctg}(5 \cdot 3^x - 7)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника?

Ответы:

1. 0,8.
2. 0,125.
3. $\dfrac{7\pi}{4}$.
4. 0,5.
5. $3\pi - \pi^2$.
6. 2.
7. $\dfrac{\pi}{2}$.
8. 0,5.
9. $\dfrac{17}{15}$.
10. $\log_3\dfrac{5}{3}$.

Задачи для решения дома

1. Найдите значение выражения $\cos(\arccos 0{,}5)$.
2. Вычислите $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arcctg}\sqrt{3} - \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Вычислите $\arccos(\cos(2\pi^2))$.
4. Найдите наибольшее значение выражения $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.
5. Вычислите $\sin^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)$.
6. Вычислите $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$.
7. Найдите значение выражения $\cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}\right) - \sin\left(4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)$.
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y^2 + y^4 = \ln x, \\ 2\operatorname{arctg} x + \arcsin y = 0. \end{cases}$

Ответы:

1. 0,5.
2. $\dfrac{\pi}{6}$.
3. $2\pi^2 - 6\pi$.
4. $\dfrac{\pi}{2}$.
5. 0,98.
6. 0,2.
7. 0.
8. $(1; -1)$.

Тригонометрические уравнения.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнение $2\cos(2x-3)=1$.
2. Решите уравнение $\cos x+2\cos 2x=1$.
3. Решите уравнение $2\cos^2 x+2\cos x=3\sin^2 x$.
4. Решите уравнение $2\cos^2 x+\sin^2 x=3\sin x\cos x$.
5. Решите уравнение $\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x+2\cos^3 x=0$.
6. Решите уравнение $\sin 2x+3(\sin x+\cos x+1)=0$.
7. Решите уравнение $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x$.
8. Решите уравнение $3\sin x+4\cos x=4$.
9. Решите уравнение $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=3$.
10. Решите уравнение $\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg} x}-\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg} x}=\sin 2x$.
11. a) Решите уравнение $3\cos 2x+5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)-1=0$.

    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5{,}5\pi;-5\pi]$.
12. Решите уравнение $\cos 2x-\cos 6x=0$.
13. Решите уравнение $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
14. a) Решите уравнение $14^{\sin x}=(0{,}5)^{\cos x}\cdot 7^{\sin x}$.

    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

15. a) Решите уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

16. Решите уравнение $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$.

17. Решите уравнение $\sin 2x \sin 4x + \sin x \sin 7x = 0$.

18. a) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin 2x = 0$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

19. a) Решите уравнение $2\sin 2x + \sin x = 4\cos x + 1$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

20. a) Решите уравнение $\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

21. Решите уравнение $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}$.

22. Решите уравнение $\sin^2 x + |\cos x| = 1$.

23. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi x) - 1} = (2x - 1)(x + 2)$.

24. Решите уравнение $\sqrt{7 - \cos x - 6\cos 2x} = 4\sin x$.

25. Решите уравнение $\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x$.

26. Решите уравнение
$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\cos^2 x + \pi}{4\cos^6 x + 1}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4\cos^6 x + 1}\right) = 0.$$

27. Найдите все решения уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\cos 6x} = \dfrac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{\sin 6x}$, принадлежащие интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

28. Решите уравнение
$(5\sin x + 12\cos x)(100 + 48\cos x - 13\cos 2x) = 1757.$

29. Решите уравнение $\sqrt{38}\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{37 - \sin 3x}.$

30. Решите уравнение $(\cos 2x - 2\cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$

Ответы:

1. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

2. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

3. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\arccos\dfrac{3}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

5. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

6. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = -\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

7. $x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

8. $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pi - 2\arcsin\dfrac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

9. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

10. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

11. a) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$ b) $\left\{-\dfrac{16\pi}{3}\right\}.$

12. $x = \dfrac{\pi k}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$

13. $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

14. a) $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$ b) $\left\{-\dfrac{13\pi}{4}\right\}.$

15. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = (-1)^{(n+1)}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

    b) $\left\{\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}.$

16. $x = (-1)^{(k+1)}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

17. $x = \dfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$

18. a) $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

b) $\left\{-3\pi, -\pi, -\dfrac{9\pi}{4}\right\}.$

19. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

b) $\left\{\pi \pm \arccos\dfrac{1}{4}\right\}.$

20. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

b) $\left\{-\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right\}.$

21. $x = \dfrac{2\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{9},\ n \in \mathbb{Z}.$

22. $x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

23. $x = 0{,}5.$

24. $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \left(\pi - \arccos\dfrac{3}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

25. $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

26. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

27. $x = -\dfrac{11\pi}{30}.$

28. $x = \arccos\dfrac{12}{13} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

29. $\dfrac{5\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

30. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Задачи для решения дома

1. Решите уравнение $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$.

2. Решите уравнение $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.

3. Решите уравнение $\cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2} = \sin 2x$.

4. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$.

6. Решите уравнение $\sin x \sin 7x = \cos 2x \cos 4x$.

7. a) Решите уравнение $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.
   b) Найдите наибольший отрицательный корень.

8. a) Решите уравнение $6^{\cos x} = (0{,}5)^{-\sin x} \cdot 3^{\cos x}$.
   b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

9. a) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.
   b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

10. a) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

11. a) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.
    b) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

12. Решите уравнение $8\sin x + 15\cos x = 18$.

13. Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x + 3\cos 2x} = 2\sqrt{3}\cos x$.

14. Решите уравнение $\cos 3x + |\cos x| = \sin 2x$

15. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4\sin^6 x + 1}\right) - \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi\sin^2 x + \pi}{4\sin^6 x + 1}\right) = 0$.

16. Найдите все решения уравнения $\dfrac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}$, принадлежащие интервалу $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

17. Решите уравнение $(8\sin x + 15\cos x)(53 + 32\sin x + 17\cos 2x) = 1318$.

18. Решите уравнение $\sqrt{30}\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{29 + \sin 3x}$.

19. Решите уравнение $(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

Ответы:

1. $\operatorname{arcctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$
2. $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
3. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
4. $x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
5. $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$
6. $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$
7. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

   b) $\{-\pi\}.$
8. a) $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

   b) $\left\{-\dfrac{11\pi}{4}\right\}.$
9. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

   b) $\left\{\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right\}.$
10. a) $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

    b) $\left\{-4\pi, -3\pi, -\dfrac{10\pi}{3}, -\dfrac{8\pi}{3}\right\}.$
11. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

    b) $\left\{-\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{17\pi}{6}\right\}.$
12. Нет решений.

13. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = -\arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

14. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

15. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

16. $x \in \left\{\dfrac{\pi}{20}; \dfrac{9\pi}{20}\right\}.$

17. $x = \arcsin\dfrac{8}{17} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

18. $x = \dfrac{3\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

19. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства

Задачи для решения в классе

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{\cos x} + 3^{\cos^{-1} y} = 10, \\ 3^{\cos x} 3^{\cos^{-1} y} = 9. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \cos y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \sin y. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9\cos x\cos y - 5\sin x\sin y = -6, \\ 7\cos x\cos y - 3\sin x\sin y = -4. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{2}\cos y = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{2}\sin y + \sqrt{3}\cos x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\sqrt{2}\cos y, \\ \cos 2y + 2\sin 2x + \frac{3}{4} = 2\sin^3 2x. \end{cases}$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x} = 4\operatorname{ctg} y, \\ \sqrt{\frac{4}{3}\sin 2x} = \cos x\sin y. \end{cases}$$

10. Решите неравенство

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11. Решите неравенство

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 < 0.$$

12. Решите неравенство

$$\frac{5}{2\cos x - 1} - \frac{1}{2\cos x + 1} \leqslant 6.$$

13. Решите неравенство

$$\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x \geqslant \sin 2x.$$

14. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)} \left(\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x\right) \geqslant 1.$$

15. Решите неравенство

$$\sqrt{4\sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \left(\frac{x-5}{2x-1}\right) \geqslant 0.$$

16. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

Ответы:

1. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k; \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right), \left((-1)^{m}\frac{\pi}{4}+\pi m; \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi l\right),$
$k, n, l, m \in \mathbb{Z}.$

2. $\left(\frac{3\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

3. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k; \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right), \left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m; \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi l\right), k, n, l, m \in \mathbb{Z}.$

5. $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k; \mp\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), \left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m; \mp\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right),$
$k, n, l, m \in \mathbb{Z}.$

6. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi(k+n); \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right),\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}.$

8. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}.$

9. $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k; \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}+2\pi n\right),$
$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(2m+1); \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}+\pi(2l+1)\right),\ k, n, l, m \in \mathbb{Z}.$

10. $x \in \left(\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

11. $x \in \left(\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

12. $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \cup \left[-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k, -\frac{pi}{3}+2\pi k\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k, \arccos\frac{1}{3}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

13. $x \in \left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k, 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2\pi k, \pi+2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}.$

14. $x \in \left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k, -\frac{\pi}{12}+2\pi k\right) \cup \left(2\pi k, \frac{7\pi}{12}+2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

15. $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -4\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right],$
$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}.$

16. $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

Задачи для решения дома

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\sin x} + 2^{1+\sin^{-1} y} = 3, \\ 2^{\sin x} 2^{\sin^{-1} y} = 1. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin x \cos y - 7 \cos x \sin y = -6, \\ 7 \sin x \cos y + 5 \cos x \sin y = -2. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \sqrt{3}\sin y = \frac{5}{2}, \\ \cos y - \sqrt{2}\sin x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin 3x| = -\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2y + 2\cos 2x \sin^2 2x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

10. Решите неравенство

$$\cos 2x \geqslant \frac{1}{2}.$$

11. Решите неравенство

$$8\cos^2 x + 2\cos x - 1 \leqslant 0.$$

12. Решите неравенство

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$$

13. Решите неравенство

$$\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x < \sin 6x.$$

14. Решите неравенство

$$\log_{\sin x - \cos x}(\sin x - 5\cos x) \geqslant 1.$$

15. Решите неравенство

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \left(\log_{\operatorname{tg} x}\left(2 + 4\cos^2 x\right) - 2\right) \geqslant 0.$$

16. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2\sin x.$$

Ответы:

1. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\pm\frac{\pi}{6}+2\pi l\right), k,n,l,m\in\mathbb{Z}.$
2. $\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi k}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$
3. $(\pi k;\pi n),\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m;-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right), k,n,l,m\in\mathbb{Z}.$
4. $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m;\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi l\right), k,n,l,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi n\right),\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m;\pm\frac{3\pi}{4}+\pi+2\pi l\right),$
   $k,n,l,m\in\mathbb{Z}.$
6. $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right), k,n\in\mathbb{Z}.$
7. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ k,n\in\mathbb{Z}.$
8. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k;(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ k,n\in\mathbb{Z}.$
9. $\left(\arcsin\frac{4}{5}+2\pi k;\pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10}+2\pi n\right),$
   $\left(-\arcsin\frac{4}{5}+\pi(2m+1);\pm\arccos\frac{\sqrt{15}}{10}+\pi(2l+1)\right),\ k,n,l,m\in\mathbb{Z}.$
10. $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k,\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$
11. $x\in\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k\right]\cup\left[\arccos\frac{1}{4}+2\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\mathbb{Z}.$
12. $x\in\left(-\pi+2\pi k,-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k,2\pi k\right)\cup$
    $\cup\left(\arcsin\frac{1}{8}+2\pi k,\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\pi-\arcsin\frac{1}{8}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$
13. $x\in\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3},-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3},\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right],\ k\in\mathbb{Z}.$
14. $x\in\left(\operatorname{arctg}5+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\pi+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$
15. $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi k,\frac{\pi}{3}+\pi k\right],\ k\in\mathbb{Z}.$
16. $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Задачи для решения в классе.

1. Решите уравнение

$$\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos 45\right)\cdot x+\pi=2\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

2. Решите уравнения:

   (a) $2\arcsin^2 x-7\arcsin x+3=0$;

   (b) $\arccos^2 x-\dfrac{3\pi}{4}\arccos x+\dfrac{\pi^2}{8}=0$;

   (c) $\arccos(2x^3+3x^2-2)=\arccos(2x^2+x-2)$;

   (d) $\arccos\left(x^2+x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arcsin\left(x^2+x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

   (e) $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=1$;

   (f) $2\operatorname{arctg}(2x+1)=\arccos x$;

   (g) $2\arcsin 2x=\arccos 7x$;

   (h) $\operatorname{arcctg}\dfrac{2x-1}{x}+\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Решите уравнения:

   (a) $\arcsin(\sin x)=5\pi-x$;

   (b) $\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)+2\operatorname{arctg}x=0$.

4. Решите уравнение $\arcsin\left(\dfrac{3x+11}{x+5}\right)=-\pi-\dfrac{\pi x}{2}$.

5. Решите неравенства:

(a) $\arcsin x \leqslant 3$;

(b) $\arcsin x < \arccos 2x$;

(c) $\cos(2\arccos x) \geqslant x$;

(d) $9\,\mathrm{tg}\,(2\,\mathrm{arctg}\,x) \geqslant 2(5x-16)$;

(e) $\pi - \arccos\left(\dfrac{-x-1}{4}\right) > \mathrm{arctg}\sqrt{2x^2+4x+5}$.

6. Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \geqslant \arcsin(x^2-2x-4).$$

7. Для каждого значения параметра α решите неравенство $\arcsin x < \alpha$.

8. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy неравенством $\sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\arccos y}$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\arccos a}$ имеет бесконечное число решений.

10. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$\left(y^2 - \arcsin^2(\sin x)\right)\left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \times$$
$$\times\left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) < 0.$$

11. Найдите все значения параметра a, при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\dfrac{4-x}{4}\right), \\ x^2+y^2-8x-8y=b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответы:

1. $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) $x = \sin\dfrac{1}{2}$;
   (b) $x \in \left\{0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;
   (c) $x \in \left\{-1; \dfrac{1}{2}\right\}$;
   (d) $x \in \{-1; 0\}$;
   (e) $\emptyset$;
   (f) $x = 0$;
   (g) $x = \dfrac{1}{8}$;
   (h) $x = \dfrac{4}{5}$.

3. (a) $x \in \left[\dfrac{9\pi}{2}; \dfrac{11\pi}{2}\right]$;
   (b) $x \leqslant 0$.

4. $x = -3$.

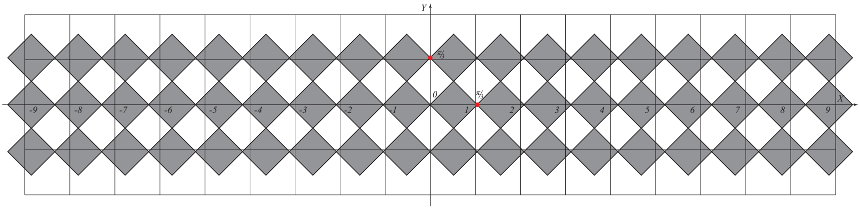
5. (a) $x \in [-1; \sin 3]$;
   (b) $x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{1\}$;
   (c) $x \in (-\infty; -1) \cup \left[-\dfrac{4}{5}; 1\right) \cup \{2\}$;
   (d) $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
   (e) $x \in \left[-5; \sqrt{2} - 1\right)$.

6. $x = 3$.

7. Решений нет при $\alpha \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$;
   $x \in [-1; \sin\alpha)$ при $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;
   $x \in [-1; 1]$ при $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$.

8. $1 + \dfrac{\pi}{4}$.

9. $a \in [-1; 1)$.

10. 

.

11. $a \in \left(-\dfrac{13}{3}; \dfrac{37}{3}\right)$.

Указание.

3. (a) Решите уравнение графически, нарисовав графики функций $y_1(x) = \arcsin(\sin x)$ и $y_2(x) = 5\pi - x$;

   (b) Докажите, что $\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{arctg}|x|$.

4. Используйте идею, что

$$\arcsin\left(\frac{3x+11}{x+5}\right) + \pi + \frac{\pi x}{2} = \arcsin\left(3 - \frac{4}{x+5}\right) + \pi + \frac{\pi x}{2}$$

– строго возрастающая функция на своей области определения.

5. (d) Докажите, что $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

11. Первое уравнение на ОДЗ равносильно уравнению

$$\frac{a-y}{3} = \frac{4-x}{4} \Leftrightarrow y = \frac{3x}{4} - 3 + a.$$

ОДЗ определяется неравенством $-1 \leqslant \dfrac{4-x}{4} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 8$. Итак, первое уравнение задаёт некоторый отрезок AB на плоскости, перпендикулярный вектору $\overline{(3; -4)}$, расположение которого зависит от параметра a.

Второе уравнение может быть переписано в виде

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = b + 32$$

– это уравнение окружности с центром $M(4;4)$ радиуса $\sqrt{b+32}$ (также может быть точка или пустое множество, но нас эти варианты не интересуют, так как тогда у системы меньше двух решений).

Система может иметь два решения при каком-либо b тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный из M на прямую, содержащую отрезок AB, попадает во внутреннюю точку отрезка (если окружность пересекает прямую, то точки пересечения находятся по разные стороны от проекции центра окружности на прямую).

Задачи для решения дома.

1. Решите уравнение $2\operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12} = \left(\arcsin\dfrac{4}{5} - \arccos\dfrac{3}{5}\right)$.

2. (a) $2\arcsin^2 x - \pi\arcsin x + \dfrac{\pi^2}{9} = 0$;

   (b) $\operatorname{arcctg}^2 x + \dfrac{3\pi}{4}\operatorname{arcctg} x - \dfrac{\pi^2}{4} = 0$;

   (c) $\arcsin\left(3x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}\right) = \arcsin\left(2x + \dfrac{1}{3}\right)$;

   (d) $\arccos x - \arcsin x = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

   (e) $\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \dfrac{\pi^2}{36}$;

   (f) $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\dfrac{\pi}{2}$;

   (g) $\arcsin x + \arccos(x-1) = \pi$;

   (h) $\arcsin 2x = 3\arcsin x$;

   (i) $2\arccos x = \arccos\dfrac{7x}{3}$;

   (j) $\operatorname{arcctg}\dfrac{3x-1}{x} + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Решите уравнения:

   (a) $\arccos(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{3}$;

   (b) $\arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Решите уравнение $\arccos\left(\dfrac{3x+4}{1-2x}\right) = \pi x + 6\pi$.

5. Решите неравенства:

   (a) $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$;

   (b) $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) \geqslant 1$;

(c) $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \leqslant 0$;

(d) $\arcsin x \leqslant \arccos x$;

(e) $2\arcsin(x+1) + \arcsin(4x^2+8x+4) < 0$;

(f) $\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right)$.

6. Решите неравенство $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) < \frac{6\pi}{x}$.

7. Для каждого значения параметра α решите неравенство

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + (x-a)^2 \leqslant 2\,\mathrm{arctg}\, x.$$

8. Для каждого значения параметра α решите неравенство $\arccos x \leqslant \alpha$.

9. Найдите площадь фигур, заданных на координатной плоскости Oxy неравенствами:

(a) $\sqrt{\arcsin y} \leqslant \sqrt{\arccos x}$;

(b) $\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geqslant \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2)$.

10. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\sqrt{\arcsin a} \leqslant \sqrt{\arccos x}$ найдутся два решения, разность между которыми равна $\frac{3}{2}$.

11. Найдите все значения параметра a такие, что система

$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{4+y}{4}\right) = \arccos(x-a), \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y = b \end{cases}$$

имеет не более одного решения при любом значении параметра b.

Ответы:

1. $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) $x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$;
   (b) $x = \frac{\pi}{\cos 2}$;
   (c) $x \in \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$;
   (d) $x = \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
   (e) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
   (f) $x = -\frac{1}{12}$;
   (g) $x \in \{0; 1\}$;
   (h) $x \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}\right\}$;
   (i) $\emptyset$;
   (j) $x = \frac{3}{5}$.

3. (a) $x \in \left\{0; \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$;
   (b) $x \leqslant -1$.

4. $x = -5$.

5. (a) $x < \operatorname{tg} 1$;
   (b) $x \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$;
   (c) $x \in \left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$;
   (d) $x \in \left[-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
   (e) $x \in \left(-\frac{5+\sqrt{5}}{5}; -1\right)$;
   (f) $x \in \left[\sin\frac{\pi}{10}; \sin\frac{9\pi}{10}\right) \cup \left(\sin\frac{9\pi}{50}; \sin\frac{3\pi}{10}\right]$.

6. $x \in [\log_5 123; 3)$.

7. Решений нет при $a < 0$; $x = a$ при $a \geqslant 0$.

8. Решений нет при $\alpha < 0$; $x \in [\cos\alpha; 1]$ при $\alpha \in [0; \pi]$; $x \in [-1; 1]$ при $\alpha > \pi$.

9. (a) $1 + \dfrac{\pi}{4}$;

   (b) 4.

10. $a \in \left[0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

11. $a \in (-\infty; -15] \cup [19; +\infty)$.

Указание.

3. (a) Решите уравнение графически, нарисовав графики функций $y_1(x) = \arccos(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$ и $y_2(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{3}$;

   (b) Докажите, что

$$\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{3\pi}{2}, & \text{если } x < -1, \\ \dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} x, & \text{если } x \in [-1; 1], \\ 2\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

5. (f) Обозначьте $u = \dfrac{5}{2\pi}\arccos x, v = \dfrac{10}{3\pi}\arcsin x$. Тогда справедливо соотношение $4u + 3v = 5$.

   Решением неравенства $\arcsin u > \arccos v$ является множество:

$$0 \leqslant u < 1, 0 \leqslant v < 1, u^2 + v^2 > 1.$$

Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства.

Задачи для решения в классе

1. Исследуйте функцию на чётность

   (a) $f(x) = 4 \cdot 2^{-x} + 2^{x+2}$;

   (b) $f(x) = 5^{|x+3|}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке :

   (a) $f(x) = 0{,}1^{1-|x-2|}, [1; 5]$;

   (b) $f(x) = \left|2^{x-1} - 4\right|, [2; 6]$;

   (c) $f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + 1, [1; 3]$.

3. Исследуйте функцию на монотонность:

   (a) $y = 0{,}3^{|x|-4}$;

   (b) $y = 2^{2|x|-|x+3|}$.

4. Выясните, сколько решений имеет уравнение при всевозможных значениях параметра a: $0{,}5 \cdot 3^{1-x} - 4 = a$.

5. Постройте график функции $y = |2^{x^2-1} - 4| + 1$ и с его помощью выясните, сколько решений имеет уравнение $|2^{x^2-1} - 4| + 1 = a$ при $a = 0$,$a = 1$,$a = 2$,$a = \frac{9}{2}$,$a = 5$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $9^x - (6 + 2a) \cdot 3^x - a - 1 = 0$ не имеет корней.

7. При каждом значении параметра a решите уравнение $4^x - 2a(a + 1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

8. Решите уравнение

   (a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$;

(b) $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$;

(c) $18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0$;

(d) $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{x}} = 10$;

(e) $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x + 5} = 3$.

9. Решите уравнение $\left(\dfrac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)} = \dfrac{x^7}{8}$.

10. Решите систему уравнений

(a) $\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 7\cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3\cdot 2^{x+1} - 5y = 93; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3^{x+y+1} + 7\cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3\cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$.

11. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. Решите неравенство

(a) $3^x < 1 + 12\cdot 3^{-x}$;

(b) $7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}\cdot\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2} + 6$;

(c) $2^{x+3} - x^3\cdot 2^x \leqslant 16 - 2x^3$;

(d) $17^{\frac{5x-3}{3-x}}\cdot 2^{3-x} \leqslant 68$;

(e) $\sqrt{32^x+4} - \sqrt{|32^x-7|} < 1$;

(f) $x \cdot 3^{\log_{1/9}\left(16x^4-8x^2+1\right)} < \dfrac{1}{3}$.

13. Решите неравенство

(a) $\left(x^2-3x+3\right)^{4x^3+5x^2} \leqslant \left(x^2-3x+3\right)^{2x^3+18x}$;

(b) $\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}} > 1$;

(c) $x^{\log_3 x} - 2 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}$.

14. Найдите все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leqslant 2, \\ x+3y \geqslant 2-\log_4 3. \end{cases}$$

Ответы:

1. (a) Чётная;
   (b) Ни чётная, ни нечётная.

2. (a) 0,1 – наименьшее, 100 – наибольшее;
   (b) 0 – наименьшее, 28 – наибольшее;
   (c) –8 – наименьшее, 17 – наибольшее.

3. (a) На $(-\infty;0]$ функция возрастает, на $[0;+\infty)$ функция убывает;
   (b) На $(-\infty;0]$ функция убывает, на $[0;+\infty)$ функция возрастает.

4. При $a \leqslant -4$ решений нет; при $a > -4$ одно решение.

5. Ни одного; 2; 4; 3; 2.

6. $a \in (-\infty;-2)$.

7. При $a<0$ $x=\log_2(-a)$; при $a=0$ решений нет;
   при $a>0$ $x_1=\log_2 a$, $x_2=2\log_2 a$.

8. (a) –1;4;
   (b) $2; -5; -\frac{4}{5}$;
   (c) $\log_3 2; \log_2 9$;
   (d) ± 2;
   (e) $\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.
9. $\frac{729}{8}$,2.
10. (a) $(1; \log_3 2)$;
    (b) $(3; -9)$;
    (c) $\left(0; 2+\log_3 \frac{4}{17}\right), (2\log_3 7 - 3; 2 - \log_3 7)$;
    (d) $(0; 3-\log_2 11), \left(\dfrac{\log_2(3+\sqrt{8})-1}{3}; 2-\log_2(3+\sqrt{8})\right)$.
11. $a = \frac{4}{3}$.
12. (a) $(-\infty; \log_3 4)$;
    (b) $\left(-\infty; 4-2\sqrt{2}\right) \cup \left(4+2\sqrt{2}; +\infty\right)$;
    (c) $5; \frac{1}{125}$;
    (d) $x \in [3 - 6\log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$;
    (e) $\left(-\infty; \log_{32} \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$;
    (f) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right] \cup (1; +\infty)$.
13. (a) $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}$;
    (b) $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; -\sqrt{6}\right]$;
    (c) $x \in \left(0; 3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right] \cup \{1\} \cup \left[3^{\sqrt{\log_3 2}}; +\infty\right)$.
14. $\left(\dfrac{1+\log_4 3}{2}; \dfrac{1-\log_4 3}{2}\right)$.

Ответы:

1. (a) Нечётная;

   (b) Чётная.

2. (a) $\frac{3}{128}$ – наименьшее, 6 – наибольшее;

   (b) $\frac{31}{8}$ – наименьшее, 100 – наибольшее;

   (c) –1 – наименьшее, 195 – наибольшее.

3. (a) На $(-\infty; 1]$ функция возрастает, на $[1; +\infty)$ функция убывает;

   (b) Функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

4. При $a \leqslant 3$ решений нет; при $a > 3$ одно решение.

5. Ни одного; 3; 6; 4; 2.

6. (a) При $a < 0$ $x_1 = 3\log_5(-a)$, $x_2 = 2\log_5(-a)$; при $a = 0$ решений нет; при $a > 0$ $x = 2\log_5 a$;

   (b) При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ корней нет;
   при $a = -\frac{1}{5}$ $x = 1 - \log_2 5$; при $a = \frac{1}{3}$ $x = 1 - \log_2 3$; при $a = 0$ $x = 0$;
   при $a \in \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ $x_{1,2} = \dfrac{1 + a \pm \sqrt{(1-3a)(1+5a)}}{2}$.

7. (a) –2;3;

   (b) $-2; \frac{4}{3}; 3$;

   (c) $\log_4 3; \log_3 16$;

   (d) ± 2;

   (e) $\log_{\frac{5}{2}}(\sqrt{6} - 1)$.

8. $\frac{243}{4}, \frac{1}{9}$.

9. (a) $(1; \log_5 7)$;

   (b) $\left(-\frac{9}{2}; 3\right)$;

   (c) $(0; 7 - \log_2 71), (2\log_2 7 - 6; 4 - \log_2 7)$;

(d) $\left(\dfrac{3}{22};0\right), \left(\dfrac{1}{2}6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \dfrac{3}{2}; 6 - 6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$.

10. $a = \frac{2}{5}$.

11. (a) $(-\infty; \log_2 3)$;

(b) $\left(-\infty; 3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{3}; +\infty\right)$;

(c) $3; \frac{1}{9}$;

(d) $x \in (-4;-3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$;

(e) $\left(\log_3 \frac{12}{5}; 1\right]$;

(f) $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. Решите неравенство

(a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup 0 \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$;

(b) $x \in \left[1; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$;

(c) $x \in \left(0; 5^{-\sqrt{\log_5 3}}\right] \cup \{1\} \cup \left[5^{\sqrt{\log_5 3}}; +\infty\right)$.

13. $\left(\dfrac{1+2\log_4 3}{3}; \dfrac{2-\log_2 3}{4}\right)$.

Задачи для решения дома

1. Исследуйте функцию на чётность

   (a) $f(x) = 10^{2x} - 0{,}01^x$;

   (b) $f(x) = 2 \cdot 2^{3-|x|}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке:

   (a) $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^{2|x+3|-3}, [-2; 2]$;

   (b) $f(x) = \left|4 - 0{,}5^{|x|}\right|, [-3; 1]$;

   (c) $f(x) = 0{,}25^x - 4 \cdot 0{,}5^x + 3, [-4; -1]$.

3. Исследуйте функцию на монотонность:

   (a) $y = 2^{2-|x-1|}$;

   (b) $y = 0{,}6^{|x-2|-|x+1|-x}$.

4. Выясните, сколько решений имеет уравнение при всевозможных значениях параметра a: $5^{2x} + 0{,}2^{-2x} = a - 3$.

5. Постройте график функции $y = |2 - 2^{||x|-1|}| - 1$ и с его помощью выясните, сколько решений имеет уравнение $y = |2 - 2^{||x|-1|} - 2| - 1 = a$ при $a = -2, a = -1, a = 0, a = 1, a = 2$.

6. При каждом значении параметра a решите уравнение

   (a) $25^x + a^2(a-1)5^x - a^5 = 0$;

   (b) $4^x - (1+a) \cdot 2^x + 4a^2 = 0$.

7. Решите уравнение

   (a) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{7-x^2}{2}} = 27^{2x}$;

   (b) $8^{4(x^3+8)} = 16^{7(x^2+2x)}$;

   (c) $12^x - 4^{x+2} - 3^{x+1} + 48 = 0$;

(d) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4;$

(e) $\dfrac{3 \cdot 10^x - 25^x + 20}{10^x - 4^x + 4} = 5.$

8. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \dfrac{729}{x^4}.$

9. Решите систему уравнений

(a) $\begin{cases} 7 \cdot 2^x - 5^y = 7, \\ 2^x \cdot 5^y = 14; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3{,}5 \cdot 2^{y+1} = 146; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5^{1-y} - 3^{5-x} = 3^{2y-x+3}, \\ \sqrt{2y^2 + 6 - xy} = \sqrt{6-3y}. \end{cases}$

10. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

11. Решите неравенство

(a) $2^x - 1 < 6 \cdot 2^{-x};$

(b) $5^{2x - \frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x} \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24;$

(c) $x^4 + 3^{x+4} \geqslant x^4 \cdot 3^x + 81;$

(d) $5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geqslant 75;$

(e) $3^x \left(\sqrt{9^{1-x} - 1} + 1\right) < 3 \cdot |3^x - 1|;$

(f) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_9\left(\frac{1}{x^2} - 6 + 9x^2\right)} \geqslant \dfrac{1}{x}.$

12. Решите неравенство

(a) $\left(x^2 - x + 1\right)^{16x^3 - 6x} \leqslant \left(x^2 - x + 1\right)^{13x^2 + x^3}$;

(b) $\left(\dfrac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{\sqrt{x^2-1}-x} > 1$;

(c) $\left(\sqrt[10]{125}\right)^{\log^2_{\sqrt{5}} x} + 3 \geqslant x^{\log_5 x} + 3\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\log_5 x}$.

13. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2 \cdot 3^{3y-1} \leqslant 2, \\ x + 5y \geqslant 2 - \log_3 2. \end{cases}$$

Ответы:

1.

Логарифмическая функция, преобразование логарифмических выражений

Задачи для решения в классе

1. Найдите область определения функции:
   (a) $y = \log_2 (9 - x) + \log_3(x - 7)$;
   (b) $y = \log_2 \frac{x-2}{5-x}$.
2. Найдите область определения функции:
   (a) $y = \log_x (x^2 + 3x + 2)$;
   (b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 2x)}$.
3. Исследуйте на монотонность функцию:
   (a) $y = \log_5 (x + 3)$;
   (b) $y = \log_4 (1 - x)$.
4. Исследуйте на четность функцию:
   (a) $y = \log_2 \Big(|x| - 1\Big)$;
   (b) $y = \log_2 |x - 1|$.
5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции (если они существуют):
   (a) $y = \log_2 \Big(|x| + 4\Big)$;
   (b) $y = \log_{0,2} (4x^2 + 4x + 6)$.
6. Постройте график функции $y = \log_3 (x^2 + 6x + 9)$.
7. Постройте график функции $y = \log_2 \Big(\big|3 - 2|x|\big| - 3\Big)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции. Найдите наименьшее и наибольшее значения этой функции на отрезке $[5; 7]$.

8. Определите, какие значения может принимать a, если известно, что функция $y = \log_a (2x+1)$ убывает на всей области определения.

9. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \left|\log_3 (1-x) - 2\right|$, и с его помощью определите число корней уравнения $a = f(x)$ при указанных значениях параметра a:

   (a) $a = -3$;

   (b) $a = 0$;

   (c) $a = 2$;

   (d) $a = 5$.

10. Расставьте в порядке убывания числа $\log_5 4$, $\log_{0,2} 10$, $\log_{25} 2$.

11. Определите, какое из двух чисел больше (результат обоснуйте):

   (a) $2^{\log_3 5} - 0{,}1$ или $5^{\log_3 2}$;

   (b) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ или $3\log_8 26$;

   (c) $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$ или $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$.

12. Вычислите:

   (a) $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$;

   (b) $\frac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \frac{\log_2 560}{\log_{35} 2}$.

13. Известно, что $\beta = 10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma = 10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Найдите зависимость α от γ.

14. Докажите, что $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

15. Известно, что $\log_a b = 7$. Найдите $\log_b (a^2 b)$.

16. Зная, что $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$, найдите $\lg 56$.

17. Выразите $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$.

18. Упростите выражение:

(a) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$;

(b) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

19. Упростите выражение $\left((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{\frac{1}{2}} + 2\right)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$.

20. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}\left(x^2 - 3x + 2\right)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

21. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x - \frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

22. Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответы:

1. (a) $(7; 9)$;
   (b) $(2; 5)$.

2. (a) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$;
   (b) $[-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{2}{3}; 1]$.

3. (a) функция возрастает на всей области определения;
   (b) функция убывает на всей области определения.

4. (a) четная;
   (b) общего вида.

5. (a) 2 – наименьшее значение, наибольшее значение не существует;
   (b) наименьшее значение не существует, -1 – наибольшее значение.

7. функция убывает на $(-\infty; -3)$, возрастает на $(3; +\infty)$; 2 – наименьшее значение, 3 – наибольшее значение.

8. $0 < a < 1$.

9. (a) корней нет;
   (b) один корень;
   (c) два корня;
   (d) два корня.

10. $\log_5 4$; $\log_{25} 2$; $\log_{0,2} 10$.

11. (a) $2^{\log_3 5} - 0{,}1 < 5^{\log_3 2}$;
    (b) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} < 3\log_8 26$;
    (c) $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10} < 3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$.

12. (a) 2;
    (b) 3.

13. $\alpha = 10^{\frac{1}{1-\lg\gamma}}$.

15. $\frac{9}{7}$.

16. $a(b+3)$.

17. $\frac{2(ab+a+1)}{ab+3a+2}$.

18. (a) $a+b$;
    (b) $x+1$, ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

19. $-2(\log_b a + \log_a b)$, если $a > 1, 0 < b < 1$ или $0 < a < 1, b > 1$; 0, если $0 < a < 1, 0 < b < 1$ или $a > 1, b > 1$.

20. 3.

21. $\frac{7}{2}$; $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

22. 2.

Указания.

14. Сделайте у логарифма в знаменателе переход к основанию a.

Задачи для решения дома

1. Найдите область определения функции:

   (a) $y = x\log_2(x - x^2)$;

   (b) $y = \log_2\big(|x+3| - 4\big) + \log_{0,1}(1 - 4x)$.

2. Найдите область определения функции:

   (a) $y = \log_{-x}(x^2 + x - 2)$;

   (b) $y = \log_3\big(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - \frac{3x}{2})\big)$.

3. Исследуйте на монотонность функцию:

   (a) $y = \log_{0,2}(2x + 1)$;

   (b) $y = \log_{0,3}(1 - 4x)$.

4. Исследуйте на четность функцию:

   (a) $y = \log_{0,5}|x - 1| + \log_{0,5}|x + 1|$;

   (b) $y = \log_{\frac{1}{3}}|\frac{x+1}{x-1}|$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции (если они существуют):

   (a) $y = \log_{\frac{4}{3}}(x^2 - x + 1) - 4$;

   (b) $y = 2 - 3\log_2\big(|x + 5| + 8\big)$.

6. Постройте график функции $y = \log_{0,5}(x^2 - 4x + 4)$.

7. Постройте график функции $y = \log_4\big(8 - |3|x| - 8|\big)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции. Найдите наименьшее и наибольшее значения этой функции на отрезке $[\frac{1}{3}; 4]$.

8. Определите, какие значения может принимать a, если известно, что функция $y = \log_{2-a}(1 - x)$ убывает на всей области определения.

9. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \big|\log_{0,5}(2x - 6)\big| - 4$, и с его помощью определите число корней уравнения $a = f(x)$ при указанных значениях параметра a:

(a) $a = -6$;
(b) $a = -4$;
(c) $a = 0$;
(d) $a = 1$.

10. Расставьте в порядке убывания числа $\log_3 2$, $\log_{0,3} 3$, $\log_9 8$.

11. Определите, какое из двух чисел больше (результат обоснуйте):

(a) $2^{\log_7 3} + 0{,}1$ или $3^{\log_7 2}$;
(b) $2\log_3 4$ или $3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$;
(c) $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6}$ или $3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$.

12. Вычислите:

(a) $\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}$;
(b) $\frac{\log_3 42}{\log_{126} 3} - \frac{\log_3 378}{\log_{14} 3}$.

13. Известно, что $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ и $x \neq 1$. Найдите $\log_{abcd} x$.

14. Докажите, что $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

15. Известно, что $\log_b a = 6$. Найдите $\log_a (b^3 a)$.

16. Найдите $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

17. Выразите $\log_{140} 350$ через a и b, где $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$.

18. Упростите выражение:

(a) $\log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x (\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2}\log_4^2 x^4 + 2^{-3\log_{\frac{1}{2}} \log_2 x}$;
(b) $\frac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b (a^3 b^{-12})$.

19. Упростите выражение
$\left(6(\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b\right)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$ при $a > 1$.

20. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}\left(x^2-7x+12\right)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-3}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-4}$ равно сумме двух остальных.

21. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4}x$ равно произведению двух остальных.

22. Даны числа $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответы:

1. (a) $(0;1)$;
   (b) $(-\infty;-7)$.

2. (a) $(-\infty;-2)$;
   (b) $(-\frac{1}{2};0)\cup(\frac{3}{2};2)$.

3. (a) функция убывает на всей области определения;
   (b) функция возрастает на всей области определения.

4. (a) четная;
   (b) нечетная.

5. (a) -5 – наименьшее значение, наибольшее значение не существует;
   (b) наименьшее значение не существует, -7 – наибольшее значение.

7. функция возрастает на $(-5\frac{1}{3};-2\frac{1}{3}]$ и $(0;2\frac{1}{3}]$, убывает на $[-2\frac{1}{3};0)$ и $[2\frac{1}{3};5\frac{1}{3})$; 0 – наименьшее значение, $\frac{3}{2}$ – наибольшее значение.

8. $a<1$.

9. (a) корней нет;
   (b) один корень;
   (c) два корня;

(d) два корня.

10. $\log_9 8$; $\log_3 2$; $\log_{0,3} 3$.

11. (a) $3^{\log_7 2} < 2^{\log_7 3} + 0{,}1$;

    (b) $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$;

    (c) $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6} < 3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$.

12. (a) 2;

    (b) 2.

13. $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\gamma}$.

15. $\frac{3}{2}$.

16. $\frac{3(1-a)}{1+b}$.

17. $\frac{1+2a+ab}{1+a+2ab}$.

18. (a) $(\log_2 x + 1)^3$, ОДЗ: $x > 1$;

    (b) $\log_a b$.

19. -3, если $b \geqslant a^3$; $3 - 2\log_a b$, если $0 < b < a^3, b \neq 1$.

20. 5.

21. $\frac{9}{2}$; $2 + \sqrt{5}$.

22. 3.

Указания.

14. Сделайте переход к основанию a, умножьте числитель и знаменатель на $\frac{\log_a c}{\log_a b}$.

Логарифмические уравнения и неравенства, системы.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнение $\log_2(x+2) = 7 - \log_2(5x+6)$.
2. Решите уравнение $\log_3 x + \log_3(x+4) = \dfrac{1}{\log_5 3}$.
3. Решите уравнение $\log_2\left(x^2-2x-1\right) - \log_2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) = 1$.
4. Решите уравнение $\left(2x^2-5x+2\right)\left(\log_{2x}(18x)+1\right) = 0$.
5. Решите уравнение $\log_{5-x^2}\left(2x^2-8x-2\right) = 1 + \log_{5-x^2} 2$.
6. Решите уравнение $\log_{2^{x+1}+1}\left(3x^2+4x-3\right) = \log_{10-2^{2-x}}\left(3x^2+4x-3\right)$.
7. Решите уравнение $\log_{3^{x-1}}\left(3x^2-11x+19\right) + \log_{27^{x-1}}\left(x^3\right) = \dfrac{2}{x-1}$.
8. Решите уравнение $\left(\dfrac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)} = \dfrac{x^7}{8}$.
9. Решите неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) - 1 \leqslant 0$.
10. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.
11. Решите неравенство $\sqrt{7-\log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4$.
12. Решите неравенство
$$\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) - \log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right) \leqslant \log_4\left(x^2+5x+6\right).$$
13. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}}\left(\dfrac{\left(x^2-2\right)(2x-3)}{4}\right) \geqslant 1$.
14. Решите неравенство $\log_{6x+1}(25x) - 2\log_{25x}(6x+1) > 1$.

15. Решите неравенство
$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}(1+4x^2)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}(1-4x^2)+1\right)\cdot$$
$$\cdot\log_{1-16x^2}\left(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{5}{6}\right)\geqslant 1.$$

16. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2x+3y=16,\\ \log_2 x+\log_2 y=3.\end{cases}$$

17. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_x 25+2y=2,\\ -\left(\log_x 0{,}2\right)^3+y=1.\end{cases}$$

18. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_{1+x}\left(y^2-2y+1\right)+\log_{1-y}\left(x^2+2x+1\right)=4,\\ \log_{1+x}(2y+1)+\log_{1-y}(2x+1)=2.\end{cases}$$

19. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_2\left(x^2y+2xy^2\right)-\log_{1/2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4,\\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0.\end{cases}$$

20. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_2^2(x+y)+\log_{1/2}(x+y)\log_{1/2}(x-2y)=2\log_2^2(x-2y),\\ x^2-xy-2y^2=4.\end{cases}$$

21. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\left(\dfrac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy},\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0.\end{cases}$$

Ответы:

1. $\dfrac{2\sqrt{161}-8}{5}$
2. 1.
3. 4.
4. $2; \dfrac{1}{6}$.
5. -1.
6. $2; \dfrac{2}{3}$.
7. 9.
8. $2; \dfrac{729}{8}$.
9. $\left(4; 2+\sqrt{3}\right]$.
10. $(1;2] \cup [3;4)$.
11. $\left[-2^{\frac{7}{2}}; -2^{\frac{3}{8}}\right) \cup \left(2^{\frac{3}{8}}; 2^{\frac{7}{2}}\right]$.
12. $(-\infty; -3) \cup \left[7+\sqrt{87}; +\infty\right)$.
13. $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
14. $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{30}; \dfrac{1}{25}\right)$.
15. $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{1}{9}\right) \cup \left[-\dfrac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.
16. $(2;4), \left(6; \dfrac{4}{3}\right)$.
17. $(5;0), \left(\dfrac{1}{5}; 2\right)$.
18. (-2;1).
19. (2;-3), (-6;1)
20. (2;0); $\left(\dfrac{43}{4}; \dfrac{21}{4}\right)$.
21. (2;2), (9;3), $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Задачи для решения дома

1. Решите уравнение $\log_3(3x+6) = 4 - \log_3(5x-4)$.

2. Решите уравнение $\log_2(x-1) + \log_2 x = \dfrac{1}{\log_6 2}$.

3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+2x-1\right) - \log_{\sqrt{2}} x = 2$.

4. Решите уравнение $\left(x^2-7x+10\right)\left(\log_{\frac{x}{2}}(8x)+3\right) = 0$.

5. Решите уравнение $\log_{2x+2}\left(2x^2-8x+6\right) = 2$.

6. Решите уравнение
$\log_{6x-5}\left(6x^2-11x+5\right)\cdot\log_{x-1}\left(x^3-1\right) =$
$= \log_{6x-5}\left(6x^2-11x+5\right) + \log_{x-1}\left(x^3-1\right)$.

7. Решите уравнение $\log_{6^{x-2}}\left(x^2\right) + \log_{36^{x-2}}\left((x-5)^4\right) = \dfrac{2}{x-2}$.

8. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \dfrac{729}{x^4}$.

9. Решите неравенство $\log_5[(x+1)(x+3)] \leqslant 1$.

10. Решите неравенство $2 + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+3x\right) \geqslant 0$.

11. Решите неравенство $-3 + \log_2 x^6 < \sqrt{7+\log_2 x^2}$.

12. Решите неравенство
$\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{x^2}{2}+8x+33\right) \leqslant -\log_{1/4}\left(x^2+13x+42\right) + \log_4\left(\dfrac{x-1}{x+7}\right)$.

13. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}}\left(\dfrac{\left(x^2-3\right)(6x-12)}{25}\right) \geqslant 1$.

14. Решите неравенство
$\sqrt{\log_{x+10}(x^2-2x-8)} + \sqrt{\log_{x^2-2x-8x+10}(x+10)^2} \leqslant 1+\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство

$\log_{1+x^2}\left(1+27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}(1+x^2) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+27x^5\right)$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 y + \log_3 x = 3. \end{cases}$$

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ -2\left(\log_x 0{,}5\right)^3 + y = 8. \end{cases}$$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{3+x}(xy + x + 3y + 3) + 0{,}5\log_{1+y}\left(x^2 + 6x + 9\right) = 3, \\ \log_{3+x}(0{,}5 - y) + \log_{1+y}(3x + 8) = 1. \end{cases}$$

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2}{y} + x\right) + \log_{1/3}\left(\dfrac{y^2}{x} + y\right) = 2, \\ \log_2 |x + y| = 1. \end{cases}$$

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3^2(x + 2y) + \log_{1/3}(x + 2y)\log_{1/3}(x - y) = 2\log_3^2(x - y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1. $\dfrac{2\sqrt{46} - 3}{2}$

2. 3.

3. 1.

4. 1;5.

5. $\sqrt{17}-4$.

6. 3.

7. -1;3;6.

8. $\frac{1}{9}; \frac{243}{4}$.

9. $\left[-2-\sqrt{6};-3\right)\cup\left(-1;\sqrt{6}-2\right]$.

10. $[-4;-3)\cup(0;1]$.

11. $\left(-2;-2^{-\frac{7}{2}}\right]\cup\left[2^{-\frac{7}{2}};2\right)$.

12. $(-\infty;-7)\cup\left[3+\sqrt{87};+\infty\right)$.

13. $\left[\frac{7}{6};\sqrt{3}\right)\cup\left[\frac{17}{6};3\right)\cup(3;+\infty)$.

14. $\left[-\frac{54}{11};-3\right]\cup[6;+\infty)$.

15. $\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}};-\frac{1}{3}\right]\cup\left(-\sqrt{\frac{2}{27}};0\right)\cup\left(0;\sqrt{\frac{2}{27}}\right)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

16. (9;3), (1;27).

17. $(2;6), \left(\frac{1}{2};10\right)$.

18. $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

19. $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, (-3;1).

20. (2;0); $\left(\frac{11}{2};\frac{21}{4}\right)$.

21. (2;2), (2;4), $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Последовательности. Ограниченность и монотонность.

Теория

Определение 1. ***Расширенным множеством действительных*** *чисел называют множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ и его обозначение $\overline{\mathbb{R}}$.*

При этом элементы $-\infty, +\infty$ не содержатся в $\mathbb{R}$, для них не определены операции $+, -, *, /$, определены лишь отношения отношения порядка: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$ и, следовательно,
$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, -\infty < +\infty, -\infty \leqslant +\infty$.

Определение 2. *Число $M \in \mathbb{R}$ называют* ***конечной верхней гранью*** *множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется* ***ограниченным сверху****, если существует конечная верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$.*

Число $m \in \mathbb{R}$ называют ***конечной нижней гранью*** *множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant M$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется* ***ограниченным снизу****, если существует конечная нижняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant M$.*

Множество A называется ***ограниченным****, если A ограничено сверху и ограничено снизу.*

Определение 3. *Элемент расширенного множества действительных чисел $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называют* ***верхней гранью*** *множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$.*

Элемент расширенного множества действительных чисел $m \in \overline{\mathbb{R}}$ называют ***нижней гранью*** *множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant M$.*

Определение 4. *Элемент расширенного множества действительных чисел $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называют* ***точной верхней гранью*** *или* ***супремумом*** *множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $M = \sup A$), если*

1. *M является верхней гранью множества A;*

2. *не существует числа, меньшего, чем M, и являющегося верхней гранью множества A, то есть*

1. $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$;

2. $\neg(\exists M' \in \mathbb{R} : M' < M$ *и* $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M') \Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R} :$
   $M' < M\ \exists a \in A : a > M'$.

Элемент расширенного множества действительных чисел $m \in \overline{\mathbb{R}}$ называют ***точной нижней гранью*** *или* ***инфимумом*** *множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $M = \inf A$), если*

1. *M является нижней гранью множества A;*

2. *не существует числа, большего, чем M, и являющегося нижней гранью множества A.*

Теорема 1. *Для любого непустого множества из множества действительных чисел супремум(инфимум) существует и единственен. Причем, если если множество ограничено сверху(снизу), то его супремум(инфимум) – это число, а если множество неограничено сверху, то его супремум(инфимум) равен $+\infty(-\infty)$ (доказательство этой теоремы вам предоставят в университете).*

Монотонные последовательности.

Определение 5. *Говорят, что задана* ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$, *если любому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n.*

Элемент последовательности *– это пара $(n; a_n)$, где n –* ***номер*** *элемента последовательности, а a_n – значение элемента последовательности.*

Определение 6. *Последовательность $\{a_n\}$ называется* ***нестрого возрастающей****, если*

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leqslant a_{n+1};$$

$\{a_n\}$ – ***нестрого убывающая***, *если*

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \geqslant a_{n+1};$$

если в этих определениях нестрогие неравенства заменить на строгие, то получим определения ***строго возрастающей*** *и* ***строго убывающей*** *последовательностей;*

$\{a_n\}$ – ***монотонная***, *если она является нестрого возрастающей или нестрого убывающей.*

Задачи для решения в классе

1. Докажите, что множество A ограничено тогда и только тогда, когда $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow |a| \leqslant M$.

2. Докажите, что если $\sup A = +\infty$, то множество является неограниченным.

3. Приведите пример множества $A \subset \mathbb{R} : \sup A \neq \max A$ или $\max A$ не существует.

4. Докажите, что если существует $\max\limits_X f$, то $\max\limits_X f = \sup\limits_X f$. Здесь используются обозначения: $\sup\limits_X f = \sup Ef$, $\max\limits_X f = \max Ef$, где Ef – множество значений функции f на множестве X.

5. Найдите $\sup\limits_X f, \inf\limits_X f$, а также $\max\limits_X f, \min\limits_X f$, если последние существуют:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x$, $X = \mathbb{R}$;

   (b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $X = (-\infty, 0)$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$, $X = (0, +\infty)$;

   (d) $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+4x^2}}$, $X = \mathbb{R}$;

   (e) $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+5}$, $X = \mathbb{R}$;

   (f) $f(x) = 5\sin 2x + 12\cos 2x$, $X = \mathbb{R}$;

   (g) $f(x) = \sin^8 x + \cos^{10} x$, $X = \mathbb{R}$ (в этом пункте найдите только $\sup\limits_X f, \max\limits_X f$).

6. Найдите наибольший член последовательности:

   (a) $\left\{-2n - \dfrac{8}{n}\right\}$; (b) $\left\{\dfrac{2n}{n^2+9}\right\}$; (c) $\left\{\dfrac{7^n}{n!}\right\}$.

7. Докажите ограниченность последовательности $\{x_n\}$ и найдите $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если

(a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Докажите ограниченность последовательности:

(a) $\{\sqrt[n]{n}\}$;

(b) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$;

(c) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}, n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha, n \in \mathbb{N}$, где $\alpha \neq 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$.

9. Докажите неограниченность последовательности:

(a) $\{(-1)^n n\}$;

(b) $\left\{\dfrac{5^n}{n^2}\right\}$.

10. Докажите, что данная последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

(a) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}$;

(b) $\{n^3 - 8n\}$;

(c) $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\}$;

(d) $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$.

Ответы:

3. Например $A = (0; 1)$.

5. (a) $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X f = -4$, $\min\limits_X f = -4$;

   (b) $\sup\limits_X f = -2$, $\inf\limits_X f = -\infty$, $\max\limits_X f = -2$;

   (c) $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X f = 4$, $\min\limits_X f = 4$;

   (d) $\sup\limits_X f = \frac{1}{2}$, $\inf\limits_X f = 0$, $\min\limits_X f = 0$;

   (e) $\sup\limits_X f = \frac{1}{2}$, $\inf\limits_X f = -\frac{1}{2}$, $\max\limits_X f = \frac{1}{2}$, $\min\limits_X f = -\frac{1}{2}$;

   (f) $\sup\limits_X f = 13$, $\inf\limits_X f = -13$, $\max\limits_X f = 13$, $\min\limits_X f = -13$;

   (g) $\sup\limits_X f = 1$, $\max\limits_X f = 1$.

6. (a) -8; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $\frac{7^6}{6!}$.

7. (a) $\sup\{x_n\} = 1$, $\inf\{x_n\} = \frac{1}{2}$;

   (b) $\sup\{x_n\} = \frac{1}{2}$, $\inf\{x_n\} = \frac{1}{3}$.

Указания:

3. Например $A = (0; 1)$. $\forall a \in (0; 1) \hookrightarrow a \leqslant 1$ и $\forall M' \in \mathbb{R} : M' < 1$ $\exists a = \max\left(\frac{1}{2}; \frac{M'+1}{2}\right) \in (0; 1) : a > M'$. Поэтому $\sup A = 1$ и $\max A$ не существует.

5. (b) Используйте идею, что $x + \dfrac{1}{x} = -\left(\sqrt{-x} - \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right)^2 - 2$ при $x < 0$.

   (e) Используйте идею, что
   $$\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{2}{(x+1)+\frac{4}{x+1}} \text{ при } x \neq -1.$$

   (f) Используйте идею, что
   $$5\sin 2x + 12\cos 2x = 13\sin\left(2x + \arccos\frac{5}{13}\right).$$

(g) Используйте идею, что $\sin^8 x \leqslant \sin^2 x,\ \cos^{10} x \leqslant \cos^2 x$.

7. (a) Используйте идею, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$
$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

8. (a) Обозначьте $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n \geqslant 0$ и

$$n = (1+\alpha_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha_n^k \geqslant C_n^2 \alpha_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

при $n \geqslant 2$. Так как $n - 1 \geqslant n/2$ при $n \geqslant 2$, то $n \leqslant n^2\alpha_n^2$, откуда получаем $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 2/\sqrt{n}$ и $1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + 2/\sqrt{n}$.

(b) Используйте неравенство Бернулли:
$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (1+x)^2 \geqslant 1 + nx$.
Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geqslant 1$, то есть $\{x_n\}$ – ограничена снизу. Так как $\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$
$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1$, то $\{x_n\}$ убывает, поэтому последовательность ограничена сверху.

(c) Используйте идею, что $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ при $k \geqslant 2$.

(d)

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{7\alpha}{2} - \right.$$

$$\left. - \sin\frac{5\alpha}{2} + \ldots + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\alpha\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задачи для решения дома

1. Напишите в кванторах определение ограниченного множества.

2. Напишите в кванторах в положительной форме (то есть, без использования «не») условие, что множество $A \subset \mathbb{R}$ неограниченно сверху.

3. Напишите в кванторах в положительной форме (то есть, без использования «не») условие, что $m \neq \inf A$, где $A \subset \mathbb{R}$.

4. Докажите, что если существует $\min\limits_X f$, то $\min\limits_X f = \inf\limits_X f$.

5. Найдите $\sup\limits_X f, \inf\limits_X f$, а также $\max\limits_X f, \min\limits_X f$, если последние существуют:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x,\ X = [1, 4]$;

   (b) $f(x) = x^3 + \dfrac{64}{x^3},\ X = (0, +\infty)$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x},\ X = (-\infty; 0)$;

   (d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1},\ X = \mathbb{R}$;

   (e) $f(x) = \dfrac{x + 7}{x^2 + 14x + 55},\ X = \mathbb{R}$;

   (f) $f(x) = 3\sin \pi x - 4\cos \pi x,\ X = \mathbb{R}$;

   (g) $f(x) = |\sin x| + |\cos x|,\ X = \mathbb{R}$.

6. Выясните, является ли последовательность ограниченной:

   (a) $\{(-1)^n n\}$;

   (b) $\{n^2 - 2n\}$;

   (c) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$;

   (d) $\left\{\dfrac{8 - n(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}\right\}$;

   (e) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$;

   (f) $\left\{\dfrac{3^n}{n^2}\right\}$.

7. Докажите ограниченность последовательности $\{x_n\}$ и найдите $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если

(a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2+8k+3}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Приведите пример последовательности, которая является нестрого возрастающей и не является строго возрастающей.

9. Докажите, что данная последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

   (a) $\{n^3 - 10n^2\}$;
   (b) $\left\{\dfrac{n^3}{2n^2-7}\right\}$;
   (c) $\left\{\sqrt{n^2+n} - n\right\}$;
   (d) $\left\{\sqrt[3]{n^3-1} - n\right\}$;

10. Докажите, что последовательность не является монотонной

    (a) $\{(-1)^n\}$; (b) $\{\sin n\}$; (c) $\{n + (-1)^n\}$.

11. Сформулируйте с помощью символов $\exists, \forall$, утверждение:

    (a) последовательность $\{x_n\}$ не является возрастающей;
    (b) последовательность $\{x_n\}$ не является строго убывающей.

Ответы:

1. $\exists m \in \mathbb{R}$ и $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{X} \hookrightarrow m \leqslant x \leqslant M$.

2. $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{X} : x > M$.

3. $\exists x \in \mathbb{X} : x < m$ или $\exists m' > m : \forall x \in \mathbb{X} \hookrightarrow x \geqslant m'$.

5. (a) $\sup\limits_X f = 0$, $\inf\limits_X f = -4$, $\max\limits_X f = 0$, $\min\limits_X f = -4$;
   (b) $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X f = 16$, $\min\limits_X f = 16$;
   (c) $\sup\limits_X f = -4$, $\inf\limits_X f = -\infty$, $\max\limits_X f = -4$;

(d) $\sup\limits_X f = 2$, $\inf\limits_X f = 0$, $\min\limits_X f = 0$;

(e) $\sup\limits_X f = \frac{1}{6}$, $\inf\limits_X f = -\frac{1}{6}$, $\max\limits_X f = \frac{1}{6}$, $\min\limits_X f = -\frac{1}{6}$;

(f) $\sup\limits_X f = 5$, $\inf\limits_X f = -5$, $\max\limits_X f = 5$, $\min\limits_X f = -5$;

(g) $\sup\limits_X f = \sqrt{2}$, $\inf\limits_X f = 1$, $\max\limits_X f = \sqrt{2}$, $\min\limits_X f = 1$.

6. (a) нет; (c) да; (e) нет;
   (b) нет; (d) да; (f) нет.

7. (a) $\sup\{x_n\} = \frac{1}{6}$, $\inf\{x_n\} = \frac{1}{15}$;
   (b) $\sup\{x_n\} = 1$, $\inf\{x_n\} = \frac{1}{2}$.

11. (a) $\exists n \in \mathbb{N}:\ x_{n+1} < x_n$;
    (b) $\exists n \in \mathbb{N}:\ x_{n+1} \geqslant x_n$.

Пределы последовательностей.

Теория

Определение 7. *Пусть заданы числа* $a, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. *Интервал* $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ *называется* $\varepsilon-$***окрестностью*** *числа* a.

Определение 8. *Пусть задано число* $\varepsilon > 0$. $\varepsilon-$***окрестностями*** *бесконечностей называются соответственном множества*

$$U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty), U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon), U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty).$$

Определение 9. *Число* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется пределом последовательности* $\{a_n\}$ *(пишут* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *или* $a_n \to a$ *при* $n \rightharpoonup \infty$*), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Построим в кванторах формальное отрицание утверждения «последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $a \in \overline{\mathbb{R}}$»:

$\neg \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $\neg(\forall \varepsilon > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или
$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 : a_n \notin U_\varepsilon(a)$.

Теорема 2. *Числовая последовательность не может иметь более одного предела из* $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 10. *Если последовательность имеет предел* $+\infty, -\infty$ *или* ∞, *то она называется* ***бесконечно большой (ББП)***.

Определение 11. *Если последовательность имеет предел* $a \in \mathbb{R}$, *то она называется* ***сходящейся***. *Если последовательность не имеет предел или имеет бесконечный предел, то она называется* ***расходящейся***.

Теорема 3. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Определение 12. *Последовательность* $\{\alpha_n\}$ *называется* ***бесконечно малой (бмп)***, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *то есть*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Лемма 1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Лемма 2. *Если $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности.*

Лемма 3. *Если $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\{a_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.*

Лемма 4. *Если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.*

Теорема 4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой.*

Из лемм 1,2,3,4 и теоремы 4 следуют следующие три теоремы (свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями):

Теорема 5. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.*

Теорема 6. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*

Теорема 7. *Если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} (a \neq 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$.*

Теорема 8 (о двух милиционерах)**.** *Если $\exists n_0 \in \mathbb{N}:$ $\forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.*

Теорема 9 (Вейерштрасс)**.** *1) Если последовательность $\{a_n\}$ – возрастает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.*

2) Если последовательность $\{a_n\}$ – убывает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

При доказательстве теоремы 17 нужно принять факт существования $\sup X$ и $\inf X$ у любого множества $X \subset \mathbb{R}$. Из последней теоремы в частности следует, что у любой монотонной и ограниченной последовательность есть конечный предел (последовательность сходящаяся).

Задачи для решения в классе

1. Распишите в кванторах следующие утверждения и их отрицания (окрестность распишите через неравенства):

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

2. Докажите по определению, что

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(-1)^n = \infty$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} ((-1)^n + 1)n$ не существует;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2}$;

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$;

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ не существует.

3. Является ли обязательно число a пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

   (a) существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;

   (b) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа N и $n \geqslant N$, что $|x_n - a| < \varepsilon$.

4. Докажите:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.

5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

   (a) $\dfrac{6n^3 - 4n^2 + 13}{n^3 + 1}$;

   (b) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)$;

   (c) $\dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$;

   (d) $\dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}}$.

6. Исследуйте на сходимость последовательность и найдите её предел:

   (a) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; (b) $x_1 = \sqrt{6}, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$.

7. При помощи последовательности $\{x_n\}$ построены две другие последовательности: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, причем $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n = x_{2n}$ и $b_n = x_{2n-1}$. Оказалось, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся тогда и только тогда, когда $a = b$.

8. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, которые имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, причем $a < b$. Докажите, что $\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N \hookrightarrow a_n < b_n$.

9. Докажите, что последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится, используя результат предыдущей задачи.

10. Про последовательность a_n известно, что $a_1 = \frac{3}{2}$ и $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.

Ответы.

1. (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n - 4| < \varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n - 4| \geqslant \varepsilon$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow x_n > \varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow x_n \leqslant \varepsilon$;

   (c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n| > \varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n| \leqslant \varepsilon$.

3. (a) да;

   (b) нет. В качестве контрпримера можно взять $x_n = (-1)^n$ и $a = 1$.

5. (a) 6; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) 1; (d) $+\infty$.

6. (a) e; (b) 3.

10. да, $n = 100$.

Указания:

2. (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = [\varepsilon] + 1 : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n| = n > \varepsilon$.

3. (b) В качестве контрпримера можно взять $x_n = (-1)^n$ и $a = 1$.

4. (b) При $a = 1$ последовательность стационарна и её предел равен 1.

   Пусть $a > 1$. Обозначим $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n > 0$ и $a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant C_n^1 \alpha_n = n\alpha_n$, $0 < \alpha_n \leqslant a/n$, для всех n. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \alpha_n) = 1$.

   Пусть $a \in (0; 1)$. Обозначим $a = 1/b$, тогда $b > 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \dfrac{1}{1} = 1$ по доказанному выше.

(c) Пусть $\exists k \in \mathbb{N} : a \in (k-1; k]$, тогда при $n > k+1$

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n-1}}_{B} \cdot \frac{a}{n} < A \cdot \frac{a}{n},$$

где A - некоторое фиксированное положительное число, $B \in (0; 1)$.

6. (a) В задаче №8 «Последовательности. Ограниченность и монотонность (классные задачи)» доказана ограниченность и монотонность последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, поэтому эта последовательность сходящаяся и имеет конечный предел, называемый в будущем числом e.

   Применяя теоремы о свойствах пределов, связанных с арифметическими действиями, получите
   $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} / \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to e$ при $n \to \infty$.

   (b) Заметьте, что если $0 < x < 3$, то $\sqrt{6+x} \in (0; 3)$. Отсюда по индукции заключите, что $0 < x_n < 3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 6 + x_n - x_n^2 = -(x_n - 3)(x_n + 2) > 0$ при $x_n \in (0; 3)$, значит последовательность $\{x_n\}$ строго возрастает. Тогда по теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности $\{x_n\}$ сходится. Обозначьте её предел через A. Переходя в реккурентном равенстве к пределу, получите $A = \sqrt{6+A} \Leftrightarrow A = 3$.

Задачи для решения дома

1. Распишите в кванторах следующие утверждения и их отрицания (окрестность распишите через неравенства):

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -7$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

2. Докажите по определению, что

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n-1}{3n+1} = 2$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = -\infty$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\pi n)$ не существует;

3. Верно ли утверждение, что последовательность является бесконечно большой тогда и только тогда, когда она является неограниченной?

4. Докажите:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $|q| > 1$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

   (a) $\dfrac{21n^4 - 9n^2 + n}{3n^4 + 7n^2}$;

   (b) $\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n^2+4} - n\right)}$;

   (c) $\dfrac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}$;

   (d) $\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}}{2n + 3 - \sqrt{n+1}}$.

6. Исследуйте на сходимость последовательность и найдите ее предел:

   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$;

   (b) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0, n \in \mathbb{N}$.

7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Докажите, что для такой последовательности выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m, n \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

.

8. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, которые имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.
   (a) Докажите, что если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N \hookrightarrow a_n < b_n$, то $a \leqslant b$.
   (b) Верно ли, что если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N \hookrightarrow a_n < b_n$, то $a < b$?

9. Последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$ и $b_{n+1} \leqslant b_n$. Докажите, что существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Ответы.

1. (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n + 7| < \varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n + 7| \geqslant \varepsilon$;
   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow |x_n - 1| \geqslant \varepsilon$;
   (c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow x_n < -\varepsilon$;
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \hookrightarrow x_n \geqslant -\varepsilon$.

3. Нет.

5. (a) 7; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0; (d) 0.

6. (a) 2; (b) $\sqrt{a}$.

8. (b) Нет.

Указания:

3. В качестве контрпримера можно рассмотреть последовательность $x_n = ((-1)^n + 1)\, n$.

8. (a) Воспользуйтесь результатом задачи №8, решенной в классе.

   (b) В качестве контрпримера можно рассмотреть последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = \frac{2}{n}$.

9. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

Предел функции.

Теория.

Здесь выписана необходимая теория для решения задач. Доказательства всех теорем кроме теорем 14 и 15 включены в ниже представленных задачах.

Определение 13. *Пусть **задана функция** $f : X \to Y$, т.е. любому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $f(x) \in Y$. Тогда множество X называют **областью определения** функции f и обозначают Df, а множество $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ – ее **множеством значений** и обозначают Ef.*

Следующие четыре определения уже были введены в темах «Последовательности» и «Предел последовательности», которые можно пропустить, если не хватает школьных часов.

Определение 14. ***Расширенным множеством действительных** чисел называют множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ и его обозначение $\overline{\mathbb{R}}$.*

При этом элементы $-\infty, +\infty$ не содержатся в $\mathbb{R}$, для них не определены операции $+, -, *, /$, определены лишь отношения отношения порядка: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$ и, следовательно,

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, -\infty < +\infty, -\infty \leqslant +\infty.$$

Определение 15. *Пусть заданы числа $a, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Интервал $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ называется $\varepsilon-$**окрестностью** числа a.*

Определение 16. *Пусть задано число $\varepsilon > 0$. $\varepsilon-$**окрестностями** бесконечностей называются соответственно множества*

$$U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty), U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon), U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty).$$

Определение 17. *Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \rightharpoonup \infty$), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Определение 18. *Пусть задано* $\delta > 0$. ***Проколотой*** δ***-окрестностью*** *элемента* $x \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ *называется множество* $\overset{\circ}{U}_\delta (x) = U_\delta(x) \backslash \{x\}$.

В частности, $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) =$
$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}, \overset{\circ}{U}_\delta (\pm\infty) = U_\delta(\pm\infty), \overset{\circ}{U}_\delta (\infty) = U_\delta(\infty)$.

Далее представлены два определения понятия *«Предел функции в точке»*. В одной из задач мы докажем эквивалентность этих определений.

Определение 19 (определение предела по Коши.)**.** *Пусть задана функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *и заданы* $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, *причем* $\exists \delta_0 > 0 : \overset{\circ}{U}_{\delta_0} (x_0) \subset X$. *Тогда пишут*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{при } x \to x_0, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 20 (определение предела по Гейне.)**.** *Пусть задана функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *и заданы* $A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, *причем* $\exists \delta_0 > 0 : \overset{\circ}{U}_{\delta_0} (x_0) \subset X$. *Тогда пишут*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0, \text{ если}$$

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0;\ x_n \neq x_0 \hookrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Теорема 10. *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Теорема 11 (теорема о пределе зажатой функции)**.** *Если в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняются неравенства* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, *и если* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема 12 (теорема о пределе суммы и произведения)**.**

$$\text{Если } \lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}, \text{ то}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB.$$

Теорема 13 (теорема о пределе частного)**.**

$$\text{Если } \lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \text{ то}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Определение 21 (определение предела слева.). *Пусть функция f определена на интервале (a,x_0). Тогда пишут*

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$, *если*
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\in(0;x_0-a):\forall x\in(x_0-\delta;x_0)\hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$.

Определение 22 (определение предела справа.). *Пусть функция f определена на интервале $(x_0;a)$. Тогда пишут*

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$, *если*
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\in(0;a-x_0):\forall x\in(x_0;x_0+\delta)\hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$.

Определение 23. *Пусть функция f определена в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда f называется* ***непрерывной в точке*** *x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.*

Определение 24. *Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$. Тогда функция f называется* ***непрерывной на отрезке*** *$[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.*

Теорема 14 (непрерывность сложной функции в точке). *(БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА) Пусть функция y определена в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Пусть функция f определена в некоторой $U_{\beta_0}(y_0)$ и непрерывна в точке $y_0=y(x_0)$. Тогда сложная функция $\varphi(x)=f(y(x))$ определена в некоторой $U_{\delta_1}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.*

Теорема 15 (о замене переменных при предельном переходе). *(БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА) Пусть заданы функции*

$y:\overset{\circ}{U}_{\delta_0}\to\mathbb{R}$ *и* $f:\overset{\circ}{U}_{\beta_0}(y_0)\to\mathbb{R}$, *пусть*

$\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=y_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$ *и пусть f непрерывна в точке y_0, тогда $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f((y(x))=A$.*

Теорема 16. *Функции $\sin x,\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна во всех точках $x\in\mathbb{R}$, кроме точек $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.*

Теорема 17 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Определение 25. *Пусть функция f определена в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Тогда*

1. *если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но в точке x_0 функция f не определена, либо $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то точка x_0 называется* ***точкой устранимого разрыва****;*
2. *если $\exists\ f(x \pm 0) \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 –* ***точка разрыва первого рода****;*
3. *если какой-либо из пределов $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен, то x_0 –* ***точка разрыва второго рода****.*

Задачи для решения в классе

1. Пусть задано числовое множество M. Запишите с помощью кванторов утверждения A и C и их отрицания:

   (a) $A \equiv \{$все элементы x множества M удовлетворяют условию $x > 0\}$;

   (b) $C \equiv \{$у каждого элемента x множества M существует окрестность, любая точка которой принадлежит множеству M $\}$.

2. Используя логические символы, запишите утверждения:

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -7$;

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 6-0} f(x) = \infty$.

3. Используя логические символы, запишите утверждения:

   (a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) \neq 9$;

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -3$;

   (c) $\lim\limits_{x\to -8-0} f(x) \neq +\infty$.

4. Докажите, используя определение предела функции, что

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$;

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует.

5. Докажите свойства, связанные с пределами функций:

   (a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0; x_n \neq x_0 \hookrightarrow$
   $\hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ *(предел функции по Гейне)* .

   (b) Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняются неравенства $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, и если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *(теорема о пределе зажатой функции)*.

(c) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = AB$ *(теорема о пределе суммы и произведения).*

6. Приведите примеры разрывной функций (с устранимым разрывом, разрывом первого рода, разрывом второго рода) на $\mathbb{R}$.

7. Вычислите пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(18x^3+7x-2)^2}{(3x-4)^6}$;

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2-1\right)$;

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2})$;

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+7}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+7}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

8. Вычислите пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{4x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}-\sqrt{4x^2}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

9. Докажите, что для любого $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ верно
$$\frac{1}{|\operatorname{tg} x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|}.$$

10. Вычислите пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, $\beta \neq 0$;

(c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} \dfrac{(1+\operatorname{tg} x)}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

11. Пусть $x_0, y_0, A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$. Верно ли, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(y(x)) = A$?

12. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \sqrt{a^2x^2+2x-3} - \sqrt{2x^2-x+1}$ имеет хотя бы одну горизонтальную асимптоту? Запишите уравнения асимптот при найденных значениях параметра.

13. Постройте эскизы графиков функций:

(a) $y = \dfrac{2-9x^2}{1-9x^2}$; (b) $y = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$; (c) $y = \dfrac{x^3-x^2+2}{x^2-1}$.

Ответы:

1. (a) $\forall x \in M \hookrightarrow x > 0$;
$\exists x \in M : x \leqslant 0$;

(b) $\forall x \in M\ \exists U_\delta(x) : \forall y \in U_\delta(x) \hookrightarrow y \in M$;
$\exists x \in M : \forall U_\delta(x)\ \exists y \in U_\delta(x) : y \notin M$.

2. (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(4) \hookrightarrow |f(x)+7| < \varepsilon$;

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x > \delta \hookrightarrow |f(x)-5| < \varepsilon$;

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (6-\delta, 6) \hookrightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

3. (a) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \dot{U}_\delta(-2)\ |f(x)-9| \geqslant \varepsilon$;

(b) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x > \delta : |f(x)+3| \geqslant \varepsilon$;

(c) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in (-8-\delta, -8) : f(x) \leqslant \varepsilon$.

7. (a) 1,5; (b) $1\frac{1}{3}$; (c) 1; (d) ∞; (e) 2; (f) 3; (g) $\frac{4}{9}$; (h) 2; (i) $-2{,}25$; (j) 2; (k) -2.

8. (a) 0,25; (b) 0; (c) 0,25; (d) 3.

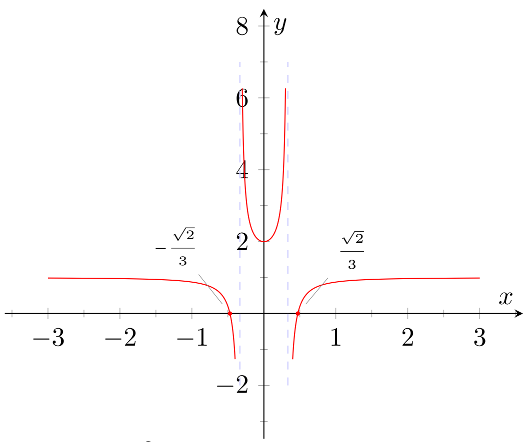
10. (a) 1; (b) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; (c) -1; (d) $-\sqrt{2}$.

11. Неверно. Например, $y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}, f(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \neq 0, \\ 1 & \text{если } y = 0. \end{cases}$.
Тогда $A = 0$, но $f(y(x)) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = 1 \neq A$.

12. $a = \pm\sqrt{2}$, $y = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, $x \to -\infty$; $y = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, $x \to +\infty$.

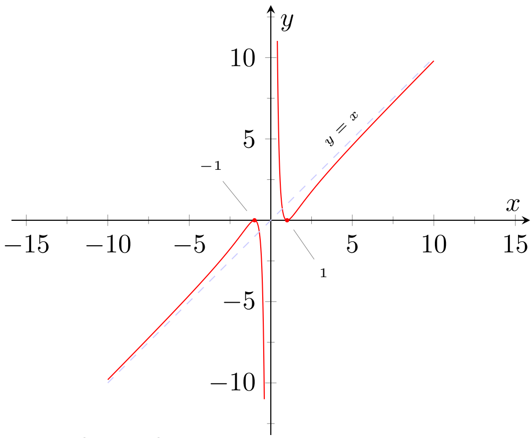
$$y = \frac{2 - 9x^2}{1 - 9x^2};$$

13. (a)



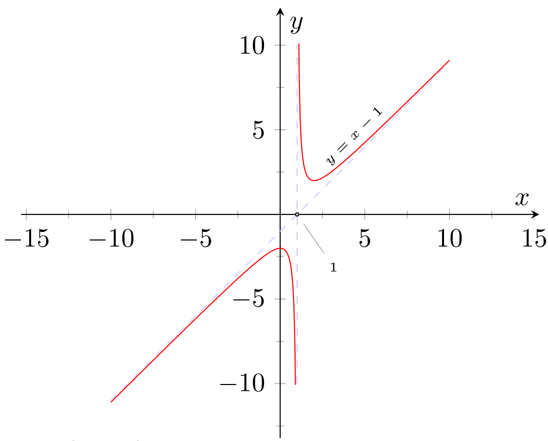
$$y = \frac{2 - 9x^2}{1 - 9x^2};$$

$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3};$$

(b) 

$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3};$$

$$y = \frac{x^3-x^2+2}{x^2-1}$$

(c) 

$$y = \frac{x^3-x^2+2}{x^2-1}.$$

Задачи для решения дома

1. Пусть задано числовое множество M. Запишите с помощью кванторов утверждения B и D и их отрицания:

   (a) $B \equiv \{$существует число $a > 0$ такое, что все элементы множества M удовлетворяют условию $|x| \leqslant a\}$;

   (b) $D \equiv \{$множество M содержит элемент x_0, в некоторой проколотой окрестности которого нет других элементов M $\}$.

2. Используя логические символы, запишите утверждения:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; (c) $\lim\limits_{x\to 5+0} f(x) = +\infty$.

3. Используя логические символы, запишите утверждения:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 4$;

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq +\infty$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \neq \infty$.

4. Докажите, что

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{\pi}{x}$ не существует.

5. Докажите свойства, связанные с пределами функций:

   (a) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$ *(теорема о пределе частного).*

   (b) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ *(теорема о пределе частного).*

   (c) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, а функция $g(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причем $|g(x)| < M \in \mathbb{R}^+$ для всех x из этой проколотой окрестности, то $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x)g(x)\Big) = 0$

6. Вычислить пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-3}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-3}$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-3}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$;

(h) $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x)$;

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+6}$;

(j) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+6}$.

7. Вычислить пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{x-3}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}}{3-\sqrt{4+x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$.

8. Вычислить пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{2x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(3x-3)}{x^2-2x+1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 8x}{2x^2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{x^2+\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi^2}{16}}{1+\sin 2x}$.

9. Приведите примеры нечетных функций, которые имеют в точке $x_0=0$

(a) устранимый разрыв;

(b) разрыв первого рода;

(c) разрыв второго рода ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$);

(d) разрыв второго рода ($\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует).

10. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x + 5} - \sqrt{a^2x^2 + x + 1}$$

имеет хотя бы одну горизонтальную асимптоту? Запишите уравнения асимптот при найденных значениях параметра.

11. Постройте эскизы графиков функций:

(a) $y = \dfrac{(x+2)^3}{x^3}$;

(b) $y = \dfrac{(x+2)^3}{x^2}$;

(c) $y = \dfrac{3x - x^2}{(x+2)^2}$.

Ответы:

1. (a) $\exists a > 0 : \forall x \in M\ |x| < a$;
   $\forall a > 0\ \exists x \in M\ |x| \geqslant a$;

   (b) $\exists x_0 \in M : \exists \dot{U}_\delta(x_0) : \dot{U}_\delta(x_0) \cap M = \varnothing$.

2. (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x| > \delta \hookrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x < -\delta \hookrightarrow |f(x)| > \varepsilon$;

   (c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (5, 5 + \delta) \hookrightarrow f(x) > \varepsilon$.

3. (a) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \dot{U}_\delta(\infty) : |f(x) - 4| \geqslant \varepsilon$;

   (b) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x < -\delta : f(x) \leqslant \varepsilon$;

   (c) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in (1, 1 + \delta) : |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

6. (a) 4; (b) 3; (c) 2; (d) ∞; (e) $1\frac{1}{3}$; (f) 0,75; (g) $3\frac{1}{16}$; (h) 3; (i) 0,5; (j) $-0{,}5$.

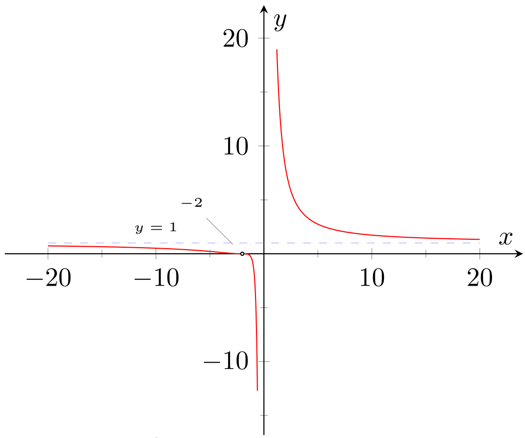
7. (a) $-1{,}5$; (b) ∞; (c) 0,5; (d) $-0{,}5$; (e) предел не существует; (f) $2\frac{1}{3}$.

8. (a) 0,5; (b) 1; (c) 4,5; (d) 12; (e) 0,5.

10. $a = \pm\sqrt{3}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x \to -\infty$; $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x \to +\infty$.

$$y = \frac{(x+2)^3}{x^3};$$

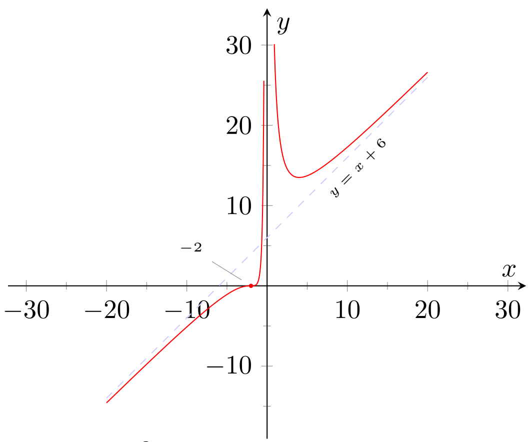
11. (a)



$$y = \frac{(x+2)^3}{x^3};$$

$$y = \frac{(x+2)^3}{x^2};$$

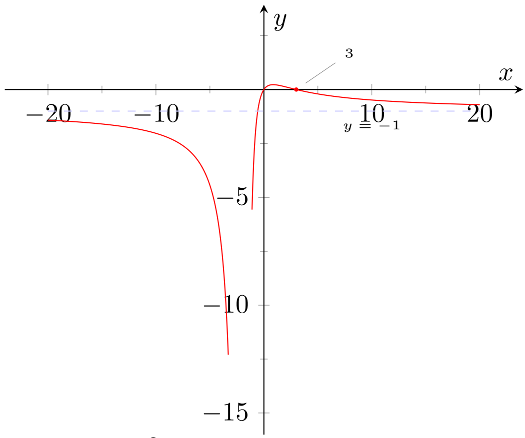
(b)



$$y = \frac{(x+2)^3}{x^2};$$

$$y = \frac{3x - x^2}{(x+2)^2}$$

(c)



$$y = \frac{3x - x^2}{(x+2)^2}.$$

Производная функции.

Определение 26. *Пусть функция f определена в $U_\delta(x_0)$. Производной функции f в точке x_0 называется*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$$

и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}$.

Теорема 18 (геометрический смысл производной)**.** *Существование невертикальной касательной к графику функции f в точке x_0 эквивалентно существованию конечной производной функции f в точке x_0. Уравнение касательной имеет вид*

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Теорема 19 (связь непрерывности и существования производной)**.** *(БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА) Функция имеет производную в точке x_0, является непрерывной в этой точке. Обратное неверно.*

Теорема 20 (производная сложной функции)**.** *(БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА) Пусть функция $y(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z(y)$ имеет производную в точке $y_0=y(x_0)$. Тогда сложная функция $z=f(x)=z(y(x))$ имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0)=z'(y_0)\cdot y'(x_0)$, что записывают в форме $z'_x=z'_y y'_x$.*

Теорема 21 (арифметические свойства производной)**.** *Если функции f и g имеют производную в точке x_0, то*

1. $\exists(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;
2. $\exists(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;
3. *Если дополнительно* $g(x)\neq 0$, *то* $\exists\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Теорема 22 (производные элементарных функций)**.**

1. $C' = 0 \ (C = const)$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, x \in \mathbb{R}$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0$;
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$;
   $(x^n)' = n x^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$;
5. $(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
9. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
10. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Задачи для решения в классе

1. Докажите свойства, связанные с производной:

   (a) $(f+g)' = f' + g'$;

   (b) $(fg)' = f'g + fg'$;

   (c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

2. Используя *следствие из второго замечательного предела* $\lim\limits_{x\to 0}(1+cx)^{\frac{1}{x}} = e^c$, а также свойства натурального логарифма, докажите, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. Найдите производные следующих функций:

   (a) $x^n, n \in \mathbb{R}$;

   (b) $\sin x$;

   (c) $\operatorname{tg} x$;

   (d) $\arcsin x$;

   (e) $\operatorname{arctg} x$;

   (f) x^x.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке Δ, если:

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x, \Delta = [0, 10]$;

   (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, \Delta = [0, 2]$;

   (c) $f(x) = x - 2\ln x, \Delta = [\frac{3}{2}, e]$;

   (d) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x, \Delta = [0, \frac{3\pi}{2}]$.

5. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ ($f(x)$ дифференцируема в точке x_0).

6. Запишите уравнения касательной к параболе $y = x^2 - 2x$ в точках ее пересечения с осью Ox.

7. Запишите уравнение той касательной к параболе $y = 1 - x^2 + x$, которая:

   (a) образует с осью Ox угол, равный $\frac{3\pi}{4}$;

   (b) параллельна прямой $y = 5x - 3$.

8. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

   (a) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

   (b) $f(x) = 3^x + 3^{-2x}$, $x_0 = 1$.

9. Найдите угол между касательными, проведенными из точки $(0; 2)$ к параболе $y = -3x^2$.

10. На параболе $y = x^2 - 4x + 2$ найдите такие точки, что проведенные в них касательные к параболе проходят через точку $(4; 1)$. Найдите уравнения этих касательных.

11. Запишите уравнение той касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 3$, которая перпендикулярна прямой $y = -\frac{x}{2} + 1$.

12. Чему равна абсцисса точки, лежащей на прямой $y(x) = -4x + 4$, из которой к параболе $f(x) = 5x^2 - 5x - 5$ проведены две перпендикулярные друг другу касательные?

13. Через точки с абсциссами 1 и 3, принадлежащими параболе $y = x^2$, проведена прямая l. Запишите уравнение прямой l и уравнение той касательной к параболе, которая параллельна l.

14. Параболы Π и Γ являются графиками функций $y = kx^2$, $y = kx^2 + b$ $(k, b > 0)$ соответственно. Докажите, что любая хорда параболы Π, касающаяся параболы Γ, делится этой точкой касания на два равных отрезка.

15. Найдите размеры полого цилиндрического сосуда (радиус r и высота h) с фиксированной толщиной стенок, изготовление которого наименее затратно, если его объем $V = 27\pi$ см^3.

16. На координатной плоскости даны точки $B(3; 1)$ и $C(5; 1)$. Рассматриваются трапеции, для которых отрезок BC является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = (x - 1)^2$, выделяемой условием $0 \leqslant x \leqslant 2$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

17. Постройте графики функций:

(a) $y = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$; (b) $y = \dfrac{3x-x^2}{(x+2)^2}$; (c) $y = \dfrac{27x^2}{(x-1)^3}$.

18. Постройте графики функций:

(a) $y = \sqrt{x^2+4x+4}$;

(b) $y = \sqrt{x^2+4x+3}$;

(c) $y = \sqrt{x^2+4x+5}$.

19. Вычислите сумму ряда $1 + \dfrac{2}{e} + \dfrac{3}{e^2} + \dfrac{4}{e^3} + \ldots + \dfrac{n+1}{e^n} + \ldots$

Ответы:

3. (a) nx^{n-1}; (b) $\cos x$; (c) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; (d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (e) $\dfrac{1}{1+x^2}$; (f) $x^x(\ln x+1)$.

4. (a) $f(0)=0,\ f(4)=80$; (b) $f(2)=-13,\ f(0)=3$; (c) $f(2)=2-2\ln 2,\ f(e)=e-2$; (d) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

6. $x=0: y=-2x$; $x=2: y=2x-4$.

7. (a) $y=-x+2$; (b) $y=5x+5$.

8. (a) $y=x-1$; (b) $y=\dfrac{25\ln 3}{9}x+3\dfrac{1}{9}-\dfrac{25\ln 3}{9}$.

9. $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$.

10. $(3,-1)$, $(5,7)$. Уравнения касательных – $y=2x-7$ и $y=6x-23$ соответственно.

11. $y=2x-1$.

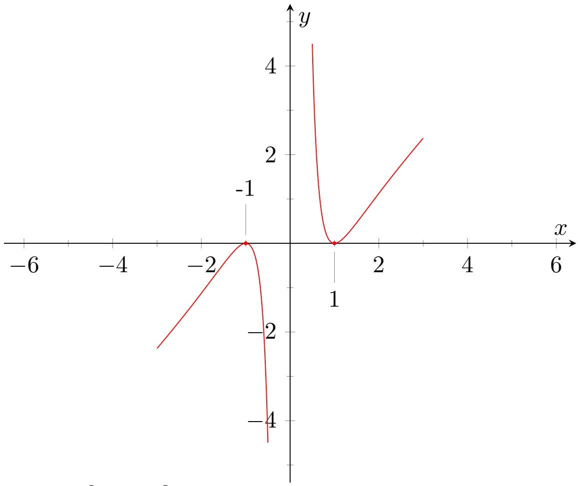
12. $\dfrac{103}{40}$.

13. Уравнение прямой l: $y=4x-3$. Уравнение касательной: $y=4x-4$.

15. $r=3$ см, $h=3$ см.

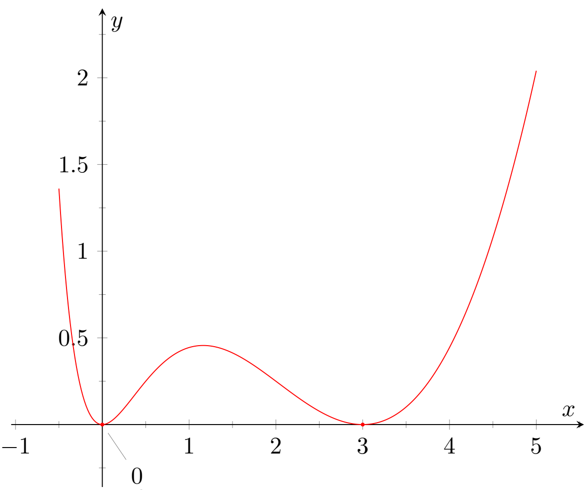
16. $S=1\dfrac{5}{27}$.

$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3}$$

17. (a) 

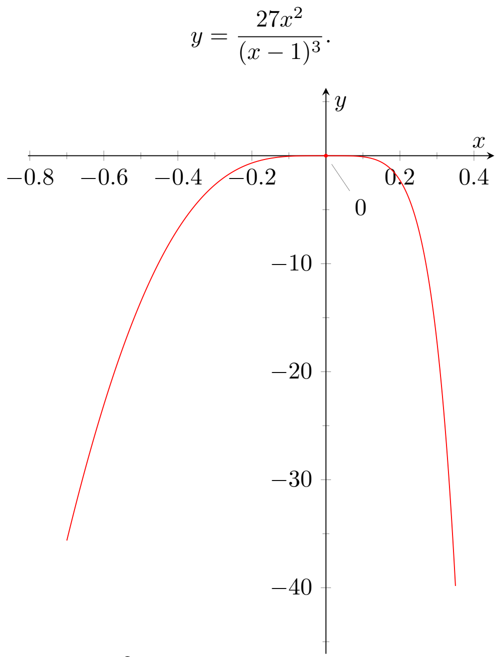
$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x^3};$$

$$y = \frac{3x-x^2}{(x+2)^2}$$

(b) 

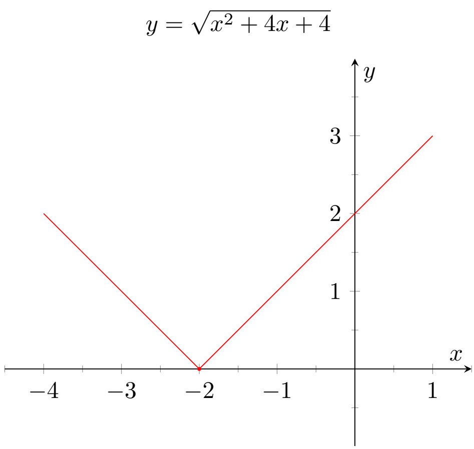
$$y = \frac{3x-x^2}{(x+2)^2};$$

(c)



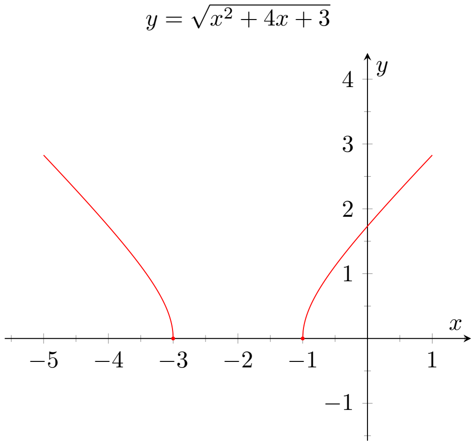
$$y = \frac{27x^2}{(x-1)^3}$$

18. (a)



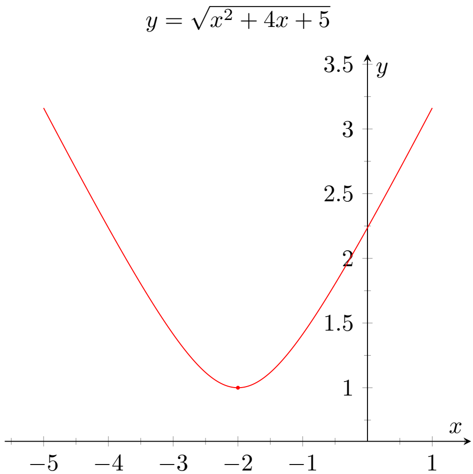
$$y = \sqrt{x^2+4x+4};$$

(b)



$y = \sqrt{x^2+4x+3}$;

(c)



$y = \sqrt{x^2+4x+5}$;

19. $\dfrac{e^2}{(e-1)^2}$.

Указания:

19. Используйте идею, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$ при $|x| < 1$.

Задачи для решения дома

1. Найдите производные следующих функций:

   (a) $\dfrac{1}{x^3}$; (b) $\cos x$; (c) $\operatorname{ctg} x$; (d) $\arccos x$; (e) $\operatorname{arcctg} x$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке Δ, если:

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 10$, $\Delta = [0, 10]$;

   (b) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 4$, $\Delta = [2, 5]$;

   (c) $f(x) = 3\ln x - x^3$, $\Delta = \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$;

   (d) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$, $\Delta = \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

3. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ ($f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$).

4. Запишите уравнение касательной к параболе $y = -x^2 + 3x + 1$ в точке ее пересечения с осью Oy.

5. Запишите уравнение той касательной к параболе $y = x^2 + 4 - 3x$, которая:

   (a) образует с осью Ox угол, равный $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3}$;

   (b) перпендикулярна прямой $y = \dfrac{1}{5}x + 4$.

6. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

   (a) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 1$; (b) $f(x) = x^x$, $x_0 = 1$.

7. К параболе $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ проведены касательные из точки A на оси ординат. Найдите координаты этой точки, если касательные взаимно перпендикулярны.

8. К параболе $y = x^2 \ln 2 + bx + c$ проведена касательная в точке с абсциссой 2. Известно, что эта касательная проходит через точку $(1, 3)$. Найдите уравнение параболы, если парабола пересекает ось ординат в точке $(0, 1)$.

9. Запишите уравнение той касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 3$, которая параллельна прямой $y = 4x + \pi$.

10. К параболе $y = x^2 - 2x + 1$ проведена касательная в точке с абсциссой 2. Эта касательная пересекает ось ординат в точке A. Найдите уравнение второй касательной к параболе, проходящей через точку A.

11. Дана парабола $\Pi : y = 2x^2$. Касательные к параболе Π, проведенные через точки K_1 и K_2, принадлежащие Π, пересекают ось абсцисс соответственно в точках P_1 и P_2. Прямые, перпендикулярные этим касательным, и проходящие соответственно через точки P_1 и P_2, пересекаются в точке Q. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник QP_1P_2, если расстояние между проекциями точек K_1 и K_2 на ось абсцисс равно 6?

12. График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найдите a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

13. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

14. Рассматриваются всевозможные правильные четырехугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a

    (a) Найдите наибольший возможный объем рассматриваемых пирамид.

(b) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

15. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найдите треугольник с наибольшим периметром. В ответ напишите углы искомого треугольника.

16. Постройте графики функций:

(a) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$;

(b) $y = \dfrac{(x+2)^3}{x^2}$;

(c) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$;

(d) $y = \dfrac{(x+5)^3}{x^2}$.

17. Постройте графики функций:

(a) $y = \sqrt{x^2+6x+9}$;

(b) $y = \sqrt{x^2+6x+7}$;

(c) $y = \sqrt{x^2+6x+12}$.

18. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ при $|x| < 1$.

Ответы:

1. (a) $-3\dfrac{1}{x^4}$;
   (b) $-\sin x$;
   (c) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
   (d) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
   (e) $-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. (a) $f(0) = -10,\ f(10) = 810$;
   (b) $f(5) = -99,\ f(2) = 0$;
   (c) $f(e) = 3 - e^3,\ f(1) = -1$;
   (d) $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2\dfrac{1}{2},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

3. $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

4. $y = 3x + 1$.

5. (a) $y = 3x - 5$; (b) $y = -5x + 3$.

6. (a) $y = x - 1$; (b) $y = x$.

7. $(0, \dfrac{1}{2})$.

8. $y = \ln 2x^2 + 2x + 1$.

9. $y = 4x - 6$.

10. $y = -6x - 3$.

11. $\dfrac{3}{16}$.

12. $a = -4, b = 5, c = -2$.

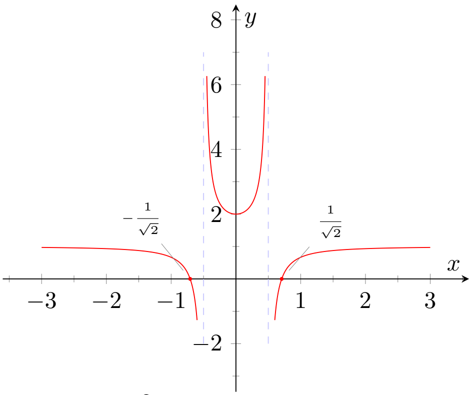
13. $A = -7,\ A = 0$.

14. (a) $V_{max} = \dfrac{8\sqrt{3}}{27}a^3$; (b) $\pi - \arccos\dfrac{2}{3}$.

15. $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$.

16. (a)

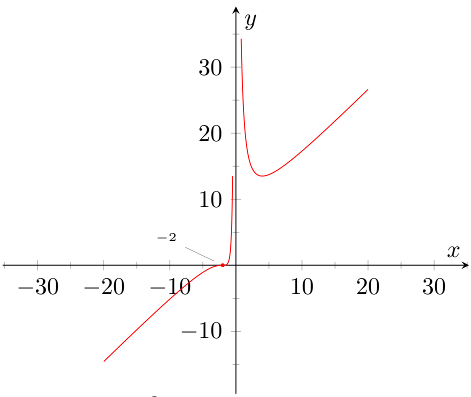
$$y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$



$$y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2};$$

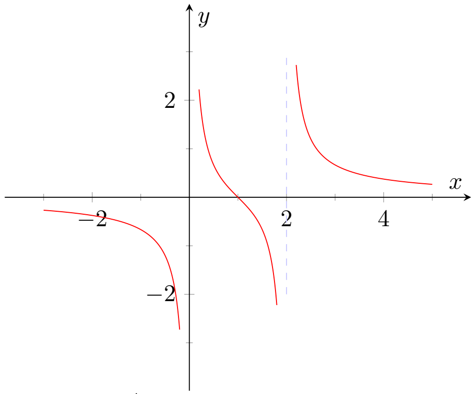
(b)

$$y = \frac{(x+2)^3}{x^2}$$



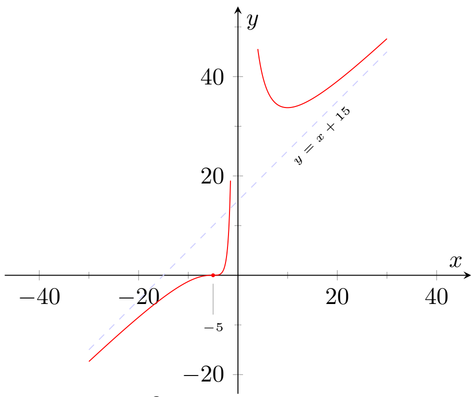
$$y = \frac{(x+2)^3}{x^2};$$

$$y = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

(c) 

$$y = \frac{x-1}{x^2-2x};$$

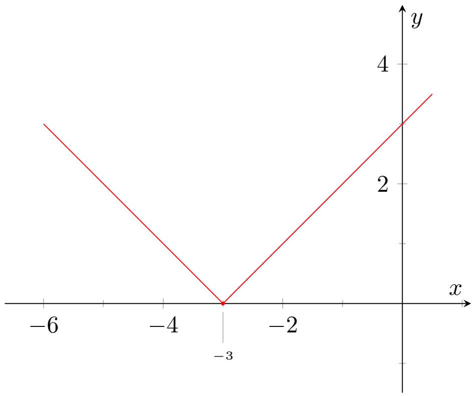
$$y = \frac{(x+5)^3}{x^2}$$

(d) 

$$y = \frac{(x+5)^3}{x^2}.$$

$y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$;

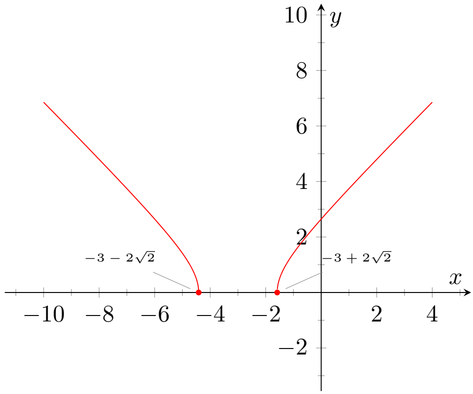
17. (a)



$y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$;

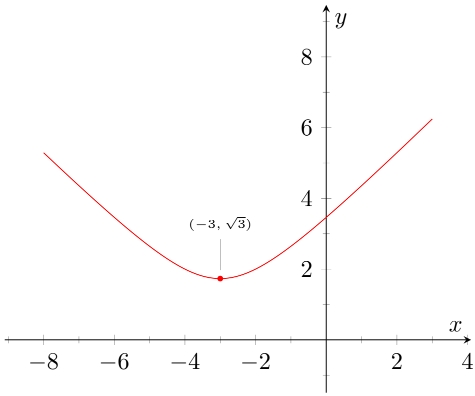
$y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}$;

(b)



$y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}$;

$y = \sqrt{x^2+6x+12}$

(c) 

$y = \sqrt{x^2+6x+12}$.

18. $\dfrac{x(x+1)}{1-x^3}$.

Указания:

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\left(x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)' = x\left(x\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'\right)'$ при $|x|<1$.

Комплексные числа.

Задачи для решения в классе

1. Докажите равенства

   (a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;

   (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

   (c) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$;

   (d) $\overline{|z|} = |\overline{z}|$;

   (e) $\overline{\overline{z}} = z$.

2. Докажите, что для произвольных комплексных чисел z и w выполняется равенство $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$. Какой геометрический смысл оно имеет?

3. Пусть z_1 и z_2 – фиксированные точки комплексной плоскости. Дайте геометрическое описание множеств всех точек z, удовлетворяющих соотношению: $\arg \dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

4. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найдите точку четвертой вершины.

5. Упростите:

   (a) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$,

   (b) $\dfrac{13+12i}{6i-8} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$

   (c) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

6. Запишите комплексное число в алгебраической форме $\left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

7. Запишите комплексное число в тригонометрической форме:

   (a) $-\sqrt{3} + i$,

   (b) $1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\sin\dfrac{10\pi}{9}$,

   (c) $\sin\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$,

   (d) $\left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$,

   (e) $(\sqrt{3} - i)^{100}$.

8. Запишите комплексное число z в алгебраической и в тригонометрической формах: $z = \dfrac{i\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

9. Представьте в тригонометрической и показательной форме число $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

10. Вычислите

    (a) $\sqrt{3-4i}$,

    (b) $\sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$,

    (c) $\sqrt{24+70i}$.

11. Решите уравнения:

    (a) $\overline{z} = z^3$,

    (b) $z^4 + 1 = 0$,

    (c) $z^4 + 4 = 0$,

    (d) $z^2 + 3|z| = 0$,

    (e) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

12. Среди всех комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z+3-\sqrt{3}i| \leqslant \sqrt{3}$ найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-i)\overline{z} = (1+i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1 \end{cases}$$

14. Решите систему уравнений $\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4, \\ |z+1+i| = |z-1-i|. \end{cases}$

15. Найдите множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

(a) $|z+1|=1$,

(b) $|1+z|<|1-z|$,

(c) $|z|+|z-3-4i|=5$,

(d) $|z-1-i|=2|z+1-i|$,

(e) $|z-i|+|z+i|<4$,

(f) $0<\arg\dfrac{i-z}{z+i}<\dfrac{\pi}{2}$.

16. Выясните, какая линия на плоскости задается уравнением $\mathrm{Re}\dfrac{z-a}{z+a}=0, \quad a\in\mathbb{R},\ a>0$?

17. Найдите $\max|3i-4-z|$ при $|z|\leqslant 2$.

18. z_1 и z_2 – решения уравнения $z^2-e^{ia}(i+2e^{ia})z+2ie^{3ia}=0$ с действительным параметром a. Найдите максимальное значение $|z_1-z_2|$.

19. z_1 и z_2 – решения уравнения $e^{ia}z^2-(i+3e^{3ia})z+3ie^{2ia}=0$ с действительным параметром a. Найдите минимальное значение $|z_1-z_2|$.

20. z_1, z_2 и z_3 – решения уравнения $z^3-e^{ia}(4+ibe^{ia})z^2+e^{2ia}(3+4ibe^{ia})z-3ibe^{4ia}=0$ с действительными параметрами a и b. Найдите минимальное значение $|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|$.

21. Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$, где $x\neq 2\pi n (n\in\mathbb{Z})$.

22. Пусть $z_1,\ \ldots,\ z_n$ – отличные от нуля комплексные числа, лежащие в полуплоскости $\alpha<\arg z<\alpha+\pi$.
Докажите, что $z_1+\ldots+z_n\neq 0$.

23. Докажите, что для любых $z_1\in\mathbb{C}$, $z_2\in\mathbb{C}$ справедливо равенство:

$$|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1).$$

24. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB. Докажите, что расстояние CD выражается формулой

$$CD^2=R^2+AC^2+BC^2-AB^2,$$

где R – радиус описанной окружности.

25. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

26. Точки A и B симметричны относительно центра некоторой окружности. Докажите, что для любой точки M этой окружности значение суммы $MA^2 + MB^2$ постоянно.

27. Докажите, что если диагонали вписанного в окружность четырехугольника перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до любой стороны четырехугольника равно половине длины соответствующей противоположной стороны.

28. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

29. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон и относительно их середин, лежат на описанной около треугольника окружности.

Ответы:

1. Доказывается по определению.

2. Тождество параллелограмма.

3. Прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, без отрезка соединяющего точки z_1 и z_2.

4. $z_1 + z_2 - z_3$ или $z_2 + z_3 - z_1$ или $z_3 + z_1 - z_2$.

5. (a) 0,
   (b) $-1{,}36 + 0{,}46i$,
   (c) $\dfrac{44-5i}{318}$.

6. 1.

7. (a) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$,
   (b) $2\cos\dfrac{4\pi}{0}\left(\cos\dfrac{5\pi}{9} + i\sin\dfrac{5\pi}{9}\right)$
   (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,
   (d) $32\cos^5\dfrac{\pi}{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$,
   (e) $2^{100}\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

8. $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

9. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. (a) $\{2-i, -2+i\}$,
    (b) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}\right\}$,
    (c) $\{7+5i, -7-5i\}$.

11. (a) $z \in \{0, \pm 1, \pm i\}$,
    (b) $z \in \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}$,
    (c) $z \in \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$,

(d) $z \in \{0, \pm 3i\}$,

(e) $z = 0$.

12. $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

13. $z \in \{5-5i, -5+5i, \sqrt{26}(1-i), \sqrt{26}(i-1)\}$.

14. $z \in \{1-i, i-1\}$.

15. (a) Окружность с центром в точке $z_0 = -1$ и радиусом 1,

(b) полуплоскость $\mathrm{Re} z < 0$,

(c) отрезок, соединяющий точки 0 и $3+4i$,

(d) окружность с центром в точке $z_0 = -\dfrac{5}{3} + i$ и радиусом $\dfrac{4}{3}$,

(e) внутренность эллипса с фокусами в точках $\pm i$ и большой полуосью равной 4,

(f) правая половина круга с центром в точке $z_0 = 0$ и радиусом 1

16. Окружность с центром в точке $z_0 = 0$ и радиусом a.

17. 7.

18. 3.

19. 2.

20. 4.

21. $\dfrac{\sin nx + \sin x - \sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

Задачи для решения дома

1. Дайте геометрическую интерпретацию неравенств:
   (a) $|z+w| \leqslant |z|+|w|$;
   (b) $|z-w| \geqslant ||z|-|w||$;
   (c) $|z-1| \leqslant |\arg z|$, при $|z|=1$.

2. Пусть z_1 и z_2 – фиксированные точки комплексной плоскости. Дайте геометрическое описание множеств всех точек z, удовлетворяющих соотношению: $\arg \dfrac{z_1-z}{z-z_2}=0$.

3. На комплексной плоскости даны точки $z_1=6+8i, z_2=4-3i$. Найдите комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

4. Упростите:
   (a) $2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$,
   (b) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$.

5. Запишите комплексное число в алгебраической форме $\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}i^5}{4}\right)^5$.

6. Запишите комплексное число в тригонометрической форме:
   (a) $1+i$,
   (b) $\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}$,
   (c) $2+\sqrt{3}+i$,
   (d) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$,
   (e) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$,
   (f) $\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$.

7. Запишите комплексное число z в алгебраической и в тригонометрической формах: $z=\dfrac{2}{\cos(4\pi/3)-i\sin(4\pi/3)}$.

8. Вычислите:

(a) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$,
(b) $\sqrt{-7-24i}$,
(c) $\sqrt{12-5i}$.

9. Решите уравнения:

(a) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$,
(b) $z^6 + 64 = 0$,
(c) $z^8 = 1 + i$,
(d) $z^2 + 2|z| = 1$,
(e) $z^2 + |z|^2 = 0$,
(f) $z^6 = -i$.

10. Среди всех комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z+1-i| = 1$ найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z+10i| \end{cases}$$

12. Решите систему уравнений $|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|$.

13. Найдите множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

(a) $|z-i| < |z+i|$,
(b) $|z+2i-1| \leqslant 2$,
(c) $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$,
(d) $\sin|z| > 0$,
(e) $|z|^2 + 3z + 3\overline{z} = 0$.

14. Найдите $\min|3+2i-z|$ при $|z| \leqslant 1$.

15. z_1 и z_2 – решения уравнения $z^2 + e^{ia}(i - 3e^{2ia})z - 3e^{4ia} = 0$ с действительным параметром a.
Найдите максимальное значение $|z_1 - z_2|$.

16. z_1 и z_2 – решения уравнения $e^{ia}z^2 + (i - 2e^{4ia})z - ie^{3ia} = 0$ с действительным параметром a.
Найдите минимальное значение $|z_1 - z_2|$.

17. z_1, z_2 и z_3 – решения уравнения

$$z^3 - e^{ia}(5 + ibe^{2ia})z^2 + e^{2ia}(4 + 5ibe^{2ia})z - 4ibe^{5ia} = 0$$

с действительными параметрами a и b.
Найдите минимальное значение $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$.

18. Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$, где $x \neq 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.

19. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – отличные от нуля комплексные числа, лежащие в полуплоскости $\alpha < \arg z < \alpha + \pi$.
Докажите, что $\dfrac{1}{z_1} + \ldots + \dfrac{1}{z_n} \neq 0$.

20. Докажите, что для любых $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ справедливо равенство:

$$|z_1\overline{z_2} - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1).$$

21. Точка M – середина дуги AB окружности. Докажите, что для произвольной точки N этой окружности имеет место равенство $|AM^2 - MN^2| = AN \cdot BN$.

22. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.

23. Докажите, что диагонали вписанного в окружность четырехугольника перпендикулярны, тогда и только тогда, когда сумма квадратов его противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности.

24. Докажите, что отрезок произвольной касательной к окружности, заключенный между двумя параллельными касательными к ней, виден из центра окружности под прямым углом.

Ответы:

1. (a) – неравенство треугольника;
   (b) – неравенство треугольника;
   (c) – длина дуги не превосходит длины хорды, которую стягивает.

2. Интервал между точками z_1 и z_2.

3. $\lambda(7+i)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (a) $i-\sqrt{3}$, (b) 0.

5. $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{64}$.

6. (a) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, (d) $2\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$,
   (b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$, (e) $\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$,
   (c) $4\cos\dfrac{\pi}{12}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$, (f) $8\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

7. $-1-i\sqrt{3}$ или $2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

8. (a) $\left\{\dfrac{\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, (b) $\{3-4i, -3+4i\}$, (c) $\{2+3i, -2-3i\}$.

9. (a) $z=1-i$,
   (b) $z\in\left\{2e^{\frac{(1+2n)\pi i}{6}} \;:\; n\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\}$,
   (c) $z\in\left\{\sqrt[16]{2}e^{\frac{(1+8n)\pi i}{32}} \;:\; n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\right\}$,
   (d) $z\in\{i, -1\pm\sqrt{2}\}$,
   (e) $z\in\{Ci \;:\; C\in\mathbb{R}\}$,
   (f) $z\in\left\{e^{\frac{(4n-1)\pi i}{12}} \;:\; n\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\}$.

10. i.

11. $z \in \left\{-\dfrac{3}{2} - 2i, -\dfrac{3}{2} - \dfrac{17}{4}i\right\}$.

12. $z = \dfrac{7+5i}{6}$.

13. (a) Полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$,

    (b) круг с центром в точке $z_0 = 1 - 2i$ и радиусом 2,

    (c) эллипс с фокусами в точках ± 2 и большой полуосью равной $\sqrt{26}$,

    (d) множество точек для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаемое отбрасыванием из точек круга радиуса $\pi + 2\pi n$ с центром в нуле точек круга радиуса $2\pi n$ с центром в нуле,

    (e) окружность с центром в точке $z_0 = -3$ и радиусом 3.

14. $\sqrt{13} - 1$.

15. 4.

16. 1.

17. 6.

18. $\dfrac{\cos nx + \cos x - 1 - \cos(n+1)x}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Интеграл.

Задачи для решения в классе.

Вычислите интегралы:

1. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}.$
3. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(1-x)^{12}}.$
4. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$
6. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}dx.$
9. $\displaystyle\int x\cdot 2^x dx.$
10. $\displaystyle\int x \operatorname{sh} x dx.$
11. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx.$
12. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx.$
13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\, dx.$
14. $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx, (a^2+b^2\neq 0).$
15. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx.$
16. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx.$
17. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{2x^2-3x-2}.$
18. $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx.$
19. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+1}dx.$
20. $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x\, dx.$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$
22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4\cos x}.$

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x\sin x$, $y=0, x=\dfrac{\pi}{4}$.

24. Две прямые, пересекающиеся в точке B, касаются параболы в точках A и C. Докажите, что площадь треугольника ABC, ограниченного дугой AC параболы и отрезками AB и BC, равна $\frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot \angle ABC$.

25. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и нормалью к ней, проведенной через точку параболы с абсциссой $x = 1$.

26. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x^3}\sqrt[4]{x^2+1}, y = 0, x = \sqrt{2}$.

27. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{R^2 - x^2}, y = 0$. Используя полученный результат, найдите объём шара радиуса R.

28. Найдите длину дуги кривой $y = e^x, x \in [0; \ln 7]$.

29. Найдите площадь поверхности, образованной вращением оси Ox дуги кривой $y = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

30. Найдите площадь поверхности, образованной вращением оси Oy дуги кривой $y = x^2, y \in [0; H]$. Используя полученный результат, найдите площадь поверхности параболоида $z = x^2 + y^2, z \in [0; H]$.

31. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \sqrt{\arccos(\varphi/\pi)}, \varphi \in [0; \pi]$. Здесь r, φ – полярные координаты, связанные с координатами x, y уравнениями: $x = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$, где $r > 0, \varphi \in [0; 2\pi)$.

32. Найдите длину кривой $r = a\sin\varphi$, где r, φ – полярные координаты.

33. Найдите длину дуги кривой $x = 4t^3, y = 3t^4, t \in [0, 1]$.

34. Решите уравнения:

(a) $yy'\cos x = (1-y)\sin x$;   (b) $x(1-y^2)y' = y(1+y^2)$.

35. Найдите решение уравнения $x(1+y)y' = y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

36. Конденсатор с ёмкостью C и зарядом q_0 подключили к резистору с сопротивлением R, найдите зависимость заряда на конденсаторе от времени.

Ответы:

1. $-x - \operatorname{ctg} x + C.$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C.$
3. $\dfrac{1-11x}{110(x-1)^{11}} + C.$
4. $\dfrac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{3/2} + C.$
5. $\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right) + C = \ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$
6. $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C.$
7. $\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C.$
8. $e^{\operatorname{tg} x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$
9. $\dfrac{x\cdot 2^x}{\ln 2} - \dfrac{2^x}{\ln^2 2} + C.$
10. $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$
11. $x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$
12. $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$
13. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\arcsin x + C.$
14. $\dfrac{e^{ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)}{a^2+b^2} + C.$
15. $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) + C.$
16. $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$

17. $\dfrac{2}{5}\ln|x-2|+\dfrac{1}{10}\ln|2x+1|+C.$

18. $\ln\left(x^2+6x+13\right)+\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+3}{2}\right)+C.$

19. $x-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-$

$\ln(x+1)^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

20. $\dfrac{1}{7}\cos^7 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+C.$

21. $\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C.$

22. $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{arctg}(x/2)\right)+C.$

23. $1/2.$

25. $125/48.$

26. $\dfrac{2}{15}\left(1+6\sqrt{3}\right).$

27. $\dfrac{4\pi R^3}{3}.$

28. $4\sqrt{2}+\ln\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}.$

29. $\dfrac{\pi(2+\pi)}{8}.$

30. $\dfrac{\pi\left((4H+1)^{3/2}-1\right)}{6}.$

31. $\pi/2.$

32. $a\sin\varphi.$

33. $\dfrac{9}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

34. (a) $(y-1)e^y = C\cos x$;

(b) $x\left(y^2+1\right) = Cy$.

35. $\ln\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 1$.

36. $q = q_0 e^{-\dfrac{t}{CR}}$.

Указания:

1. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{2}{\sqrt{31}}\int \frac{d\left(\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)}{\left(\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)^2+1}.$

3. Введите обозначение $t = 1-x$.

4. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int\left(x^3+1\right)^{1/2}\frac{1}{3}\,d\left(x^3+1\right).$

5. Введите обозначение $t = e^x$, тогда $x = \ln t, dx = \dfrac{dt}{t}$ и
$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int\frac{2}{t-\dfrac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t} = \int\frac{d(t-1)}{t-1} - \int\frac{d(t+1)}{t+1}.$$
Или
$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int\frac{1\cdot dx}{2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}} = \int\frac{\left(\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}\right)dx}{2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}} =$$
$$= \int\frac{d\left(\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}} - \int\frac{d\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}}.$$

6. $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x}dx = \int\ln^2 x\,d\left(\ln x\right).$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\ dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\,(\sin x)}{1-\sin^2 x} =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(\sin x+1)}{\sin x+1} - \int \frac{d(\sin x-1)}{\sin x-1}\right).$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}dx = \int \left(e^{\operatorname{tg} x}+\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) d\,(\operatorname{tg} x)\,.$

9. Введите обозначения $u = x, dv = 2^x\ dx$, тогда $du = dx, v = \dfrac{2^x}{\ln 2}$ и
$\displaystyle\int x\cdot 2^x dx = \int x\ d\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = \int u\ dv = uv - \int v\ du =$
$\displaystyle= x\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx.$

10. $\displaystyle\int x\operatorname{sh} x\ dx = \int x\ d(\operatorname{ch} x) = x\operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x\ dx.$

11. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\ dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\ d(\operatorname{arctg} x) = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2}.$

12. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ \ dx\ =\ x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int x\ \ d\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\ =\ x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\ -$
$\displaystyle\int \frac{(x+1-1)d\left(\sqrt{x}\right)}{1+x} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \left(1-\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\right) d\left(\sqrt{x}\right).$

13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\ dx = \int \arcsin x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\ d\left(\left(1-x^2\right)^{3/2}\right) =$
$\displaystyle-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\arcsin x + \frac{1}{3}\int \left(1-x^2\right)^{3/2}\ d\,(\arcsin x)\,.$

Или введите обозначение $t = \arcsin x$, тогда $x = \sin t, dx = \cos t\ dt$ и $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\ dx = \int \sin t\cdot\cos t\cdot t\cdot\cos t\ dt =$
$\displaystyle= -\int t\cos^2 t\ d\,(\cos t) = -\frac{1}{3}\int t\ d\left(\cos^3 t\right) = -\frac{t\cos^3 t}{3}+\frac{1}{3}\int \cos^3 t\ dt =$
$\displaystyle= -\frac{t\cos^3 t}{3} + \frac{1}{3}\int \left(1-\sin^2 t\right) d\,(\sin t)\,.$

14. $$I=\int e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{1}{a}\int\sin(bx)d\left(e^{ax}\right)=$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\;dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-$$
$$-\frac{b}{a^2}\int\cos(bx)\;d\left(e^{ax}\right)=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)-$$
$$-\frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\sin(bx)\;dx}_{I}+C.$$

Или $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx=\operatorname{Im}\left(\int e^{ax}\cdot e^{ibx}dx\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right).$

15. $$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int x\;d\left(\sqrt{1+x^2}\right)=$$
$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{\left(x^2+1-1\right)dx}{\sqrt{1+x^2}}=x\sqrt{1+x^2}-I+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Или введите обозначение $x=\operatorname{sh}t$, тогда $dx=\operatorname{ch}t\;dt$ и $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}dx=\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}\operatorname{ch}t\;dt=\int\operatorname{ch}^2t\;dt=$
$$=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2t+1)\,dt=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{t}{2}+C.$$

16. $$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int x\;d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=x\sqrt{1-x^2}+$$
$$+\int\frac{\left(x^2-1+1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x+C.$$

Или введите обозначение $t=\arcsin x$, тогда $x=\sin t, dx=\cos t\;dt$ и $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2t}\cos t\;dt=\int\cos^2t\;dt=$
$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C.$$

17. $$\int\frac{x\;dx}{2x^2-3x-2}=\int\frac{x\;dx}{(2x+1)(x-2)}=$$
$$=\int\left(\frac{1}{10\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{2}{5(x-2)}\right)dx.$$

18. $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{d\left(x^2+6x+13\right)}{x^2+6x+13} + \int \frac{5\,dx}{(x+3)^2+2}.$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+1}dx = \int \left(1 - \frac{3x^2-2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)dx =$
$\displaystyle= \int \left(1 - \frac{2}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right)dx.$

20-21. Если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ ($R(u; v)$ – рациональная функция) обладает одним из свойств:

(a) $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
(b) $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
(c) $R(-\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;

то для вычисления интеграла удобнее использовать соответственно подстановки:

(a) $x = \arccos t$;
(b) $x = \arcsin t$;
(c) $x = \operatorname{arctg} t$ соответственно.

22. Интегралы вида $\displaystyle\int R(\sin x; \cos x)dx$, где $R(u; v)$ – рациональная функция переменных u и v, всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки
$t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi; \pi)$.

Эта подстановка преобразует интеграл к виду
$\displaystyle\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$

23. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x\, dx.$

26. Вычислите $\displaystyle\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{1+x^2}\, dx.$

27. Вычислите $\displaystyle\pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx.$

28. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\ln 7} \sqrt{1+\left((e^x)'\right)^2}\,dx = \int_0^{\ln 7} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$

29. Вычислите $\displaystyle 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1-2x^2}}{2}\sqrt{1+\left(\left(\frac{\sqrt{1-2x^2}}{2}\right)'\right)^2}\,dx =$

$\displaystyle = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-2x^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{1-2x^2}}\,dx.$

30. Вычислите $\displaystyle 2\pi \int_0^H \sqrt{z}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2}\,dz.$

31. Вычислите $\displaystyle \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \arccos(\varphi/\pi)\,d\varphi.$

32. Вычислите

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(a\sin\varphi)^2+\left((a\sin\varphi)'\right)^2}\,d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

33. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\left((4t^3)'\right)^2+\left((3t^4)'\right)^2}\,dt = 12\int_0^1 \sqrt{t^4+t^6}\,dt.$

36. Найдите решение уравнения $R\dot{q}+q/C=0$, удовлетворяющее начальному условию $q(0)=q_0$. Здесь $\dot{q}=\dfrac{dq}{dt}$.

Задачи для решения дома.

Вычислите интегралы:

1. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx.$
2. $\int \frac{dx}{7x^2 + 5}.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}.$
4. $\int \frac{x\,dx}{(1 - x^2)^2}.$
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$
7. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}.$
8. $\int \sin^6 x \cdot \cos x\, dx.$
9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$
10. $\int x \cdot e^{-x} dx.$
11. $\int x \cos x\, dx.$
12. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$
13. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
14. $\int e^{ax} \cos(bx) dx, (a^2 + b^2 \neq 0).$
15. $\int \sqrt{x^2 - 1} dx.$
16. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx.$
17. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 10} dx.$
18. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 3x - 5}{(2x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$
19. $\int \cos^3 x \cdot \sin^8 x\, dx.$
20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$
21. $\int \frac{dx}{4 + \cos x}.$

22. Прямая касается параболы в точке A, хорда BC параболы параллельна этой прямой. Докажите, что площадь параболического сегмента, ограниченного хордой BC и дугой BAC параболы, равна $4/3$ площади треугольника ABC.

23. Найдите наименьшую площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и нормалью к ней.

24. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = 1/(1+x^2), y = 0, x = 0, x = 1$.

25. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, x = 0, y = H$. Используя полученный результат, найдите объём множества

$$\left\{(x; y; z): \ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant H\right\}$$

26. Найдите длину дуги кривой $y = \ln\left(x^2 - 1\right), x \in [2; 5]$.

27. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = \cos x, x \in [0; \pi]$.

28. Найдите площадь поверхности, образованной вращением оси Ox кривой $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Используя полученный результат, найдите площадь поверхности сферы радиуса R.

29. Найдите площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой $x = 2\sin t, y = 2\cos^2 t$ вокруг оси $Oy, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

30. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sin 2\varphi$, где r, φ – полярные координаты.

31. Найдите длину дуги кривой $r = a\,(1 - \cos\varphi)$, где r, φ – полярные координаты.

32. Найдите длину дуги кривой, заданной параметрически $x = 2\cos^2 t$, $y = 2\sin t, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

33. Решите уравнения:

    (a) $\left(x^2 - 1\right) y dx = x(x^2+1)dy$; (b) $x(y+1)dy = \left(1 - y^2\right) dx$.

34. Найдите решение уравнения $3x(x+1)y' = (x+2)y$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

35. Конденсатор с ёмкостью C и зарядом q_0 подключили к резистору с сопротивлением R, найдите тепло, выделившееся на резисторе за время τ.

Ответы:

1. $-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2} - \dfrac{5^{-x}}{\ln 5} + C.$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right) + C.$
3. $2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) + C.$
4. $\dfrac{1}{2-2x^2} + C.$
5. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$
6. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C.$
7. $\ln(\ln(\ln x)) + C.$
8. $\dfrac{\sin^7 x}{7} + C.$
9. $-\dfrac{\ln\left(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right)}{\sqrt{2}} + C.$
10. $-e^x(x+1) + C.$
11. $x\sin x + \cos x + C.$
12. $\dfrac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - x\right) + C.$
13. $-\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C.$
14. $\dfrac{e^{ax}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right)}{a^2+b^2} + C.$
15. $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)\right) + C.$
16. $x - 3\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C.$
17. $x + \ln\left(x^2-6x+10\right)^3 + 8\operatorname{arctg}(x-3) + C.$

18. $x+\dfrac{3}{2}\ln(x^2+x+2)-\dfrac{3}{2}\ln|2x+1|-\dfrac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+C.$

19. $\dfrac{1}{9}\sin^9 x-\dfrac{1}{11}\sin^{11} x+C.$

20. $-\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{3\cos^3 x}+\dfrac{5}{3}\operatorname{tg} x+C.$

21. $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\operatorname{tg}(x/2)\right)+C.$

23. $16\pi^2/3.$

24. $\dfrac{\pi(2+\pi)}{8}.$

25. $\pi H^2/2.$

26. $3+\ln 2.$

27. $2\pi\big(\sqrt{2}+\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\big).$

28. $4\pi R^2.$

29. $\dfrac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi.$

30. $\dfrac{\pi a^2}{8}.$

31. $8a.$

32. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$

33. (a) $y^2=C(x^2-1)^2e^{x^2}, x=0;$

(b) $x(y-1)=c, y=-1.$

34. $2x^2+(x+1)y^3=0.$

35. $Q=\dfrac{q_0^2}{2C}\left(1-e^{-\dfrac{2\tau}{CR}}\right).$

Указания:

9. Введите обозначение $t = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$, тогда $\cos x = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{2}}$ и
$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{-d(\cos x)}{\sqrt{2\cos^x - 1}} = \int \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t^2+1\right)^{-1/2} \cdot 2t}{t} dt =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

24. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 x\, d\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right).$

27. Вычислите $\displaystyle 2\pi \int_0^\pi |\cos x| \sqrt{1 + \left((\cos x)'\right)^2}\, dx.$

Геометрические идеи в задачах с параметром. Часть 2.

Задачи для решения в классе

1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases}|x-2|+|x+2|-4y=0,\\ x^2+y^2-2ay+2a=1\end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}(x-3a-4)^2+(y-3)^2=1,\\ (x-4a-3)^2+(y+a-2)^2=9\end{cases}$$
имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}(x-1-4a)^2+(y-1-3a)^2=9a^2,\\ (x-5)^2+(y-3)^2=4\end{cases}$$
имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-4-xy+2x)\sqrt{x+1}}{\sqrt{5-x}}=0,\\ x+y-a=0\end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}4x-4y-8=|x^2+y^2-4|,\\ y=a(x-2)\end{cases}$$
имеет более двух решений.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y^2 - 3x + 2 = |x^2 - 3x + 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x^2 - 4| + 6x - x^2 = |y^2 - 4| + 6y - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 12x + y^2 + 12y + 27 = |x^2 + y^2 - 9|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+2x-6) = |x-3|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay - ax + 3)(y - x + 2a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно шесть различных решений.

11. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - x| + |y + x| = a, \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-x+2|+|y+x+2| \leqslant a, \\ (x^2-xy+3y^2)(y^2-25) \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

13. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3|x-2a|+2|y-a|=6, \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

14. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+2|y|+|2y-3x|=12, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

15. Найдите все значения параметра a, $-\pi < a < \pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (9x^2+9y^2-1)(24y+9x^2+32)=0, \\ x\sin a - y\cos a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

16. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+(2a-2)x+a^2-2a-3=0, \\ \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+17 \leqslant 6(|x|+|y|), \\ x^2+y^2+4y=a^2-4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(2x^2-5xy+4y^2)(7-|x+y|)\leqslant 0,\\ x(x-6)+y(y+4)=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений системы

$$\begin{cases}x^2+x+(y-a)^2\leqslant 11,\\ x+y^2+a\leqslant 0\end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $(1;0)$ и $(1;1)$.

20. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется число b, такое что система

$$\begin{cases}x=|y+a|+\dfrac{4}{a},\\ x^2+y^2+24+b(2y+b)=10x\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x+1|-a|x-3|=4$$

имеет более двух решений.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства

$$x^2+|x+a-3|+5\leqslant 5x+a$$

принадлежит отрезку $[1;2]$.

23. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$3a+\sqrt{-3-4x-x^2}=ax+1.$$

24. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$4|x+a|-|7a-1|-13|x+1| = x+1-3|x-a|$$

имеет ровно два различных решения.

25. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству

$$5|x-2|+3|x+a| \leqslant \sqrt{4-y^2}+7.$$

26. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x-3| = \dfrac{5}{x+2}$ имеет ровно два корня на промежутке $[0;+\infty)$.

Ответы:

1. $a = 5 + 2\sqrt{5}$.
2. $a \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{7}\}$.
3. $a \in \left\{1; \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$.
4. $a \in (-4; 1] \cup \{6\} \cup [7; 8)$.
5. $a \in (1; 2)$.
6. $a \in (3 - \sqrt{10}; 0]$.
7. $a \in [3; 4)$.
8. $a \in (6 - 3\sqrt{2}; 3]$.
9. $a \in \left(-\dfrac{21}{4}; -\dfrac{3}{4}\right) \setminus \{-3\}$.
10. $a \in \left(1; \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\right)$.
11. $a \in \{2; 6\}$.
12. $a \in [4; 6)$.
13. $a \in \left\{0; \dfrac{1}{4}; 4\right\}$.
14. $a \in \left\{\dfrac{9}{2}; \dfrac{117}{4}; 4\right\}$.
15. $a \in \left(-\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\arccos\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\arccos\dfrac{2}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
16. $a \in [-1; 3) \cup (3; 7]$.
17. $a \in [-\sqrt{34} - 1; -\sqrt{34} + 1] \cup [-\sqrt{10} - 1; -\sqrt{10} + 1] \cup [\sqrt{10} - 1; \sqrt{10} + 1] \cup [\sqrt{34} - 1; \sqrt{34} + 1]$.
18. $a \in \{0; 5\}$.
19. $a = -2$.
20. (a,b) $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$
21. $a \in \{-1; 1\}$.
22. $a \in [0; +\infty)$
23. $a \in \{0\} \cup \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{4}\right]$.
24. $a \in (-1; 1)$.
25. $a \in [-5; 1]$.
26. $a \in \left\{\dfrac{4}{5}\right\} \cup \left(\dfrac{5}{6}; +\infty\right)$.

Задачи для решения дома

1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} |x-1|+|x+1|-2y=0, \\ x^2+y^2-2ay+2a=1 \end{cases}$$
имеет ровно три различных решения.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} (x+1-2a)^2+(y-1+5a)^2=4a^2, \\ (x+2)^2+(y-6)^2=1 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \leqslant 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2 \leqslant 8y-10x+4a-40 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-7y+4x+12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0, \\ x+y+a=0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$
имеет более двух решений.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ y - x = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x^2 - 1| + 2x - x^2 = |y^2 - 1| + 2y - y^2, \\ x + y + a = 0 \end{cases}$$

имеет более двух решений.

9. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ y - x = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2)(y + 2x - 4) = |x - 2|^3, \\ y = x - a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

11. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - x - 3| + |y + x + 3| \leqslant a, \\ (2x^2 + 3xy + 2y^2)(49 - x^2) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. Найдите все значения параметра a, $-\pi < a < \pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 4)(y^2 - 4x + 28) = 0, \\ y \sin a + x \cos a = 2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

13. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 2|x| + |y| + |4y - 3x| = 10, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

14. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leqslant 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

15. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений системы
$$\begin{cases} (x - a)^2 + x + y^2 \leqslant 3, \\ x + y^2 - a \leqslant 0 \end{cases}$$
содержит отрезок с концами в точках $(1; 0)$ и $(1; 1)$.

16. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется число b, такое что система
$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{a} - |y + a|, \\ x^2 + y^2 + 96 + b(2y + b) + 20x = 0 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{y^2} - 2a\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right) + a^2 - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2a(x + y) = 0 \end{cases}$$
не имеет решений.

18. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение
$$|x + 3| - a|x - 1| = 4$$
имеет более двух решений.

19. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$ax + 2a + 3 = \sqrt{-7 + 8x - x^2}.$$

20. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$y = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$$

меньше 1.

22. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству

$$4|x + 3| + 3|x - a| \leqslant \sqrt{16 - y^2} + 2.$$

23. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a|x - 4| = \dfrac{5}{x + 1}$ имеет ровно два корня на промежутке $[0; +\infty)$.

Ответы:

1. $a = 2 + \sqrt{2}$.
2. $a \in \left\{-1; \dfrac{-29 \pm 6\sqrt{6}}{25}\right\}$.
3. $a \in \left\{-\dfrac{11}{3}; 3\right\}$.
4. $a \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right] \cup \{1\}$.
5. $a \in (-\infty; -11] \cup \{-5\} \cup [3; +\infty)$
6. $a \in (1; 2)$.
7. $a \in [0; \sqrt{10} - 1)$.
8. $a \in (-2; -1]$.
9. $a \in (10 - 5\sqrt{2}; 5]$.
10. $a \in \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{17}{4}\right) \setminus \{2\}$.
11. $a \in [6; 8)$.
12. $a \in \left(-\pi + \arccos\dfrac{1}{4}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi - \arccos\dfrac{1}{4}\right)$.
13. $a \in \left\{2; \dfrac{2500}{121}\right\}$.
14. $a \in [-6; -\sqrt{13} - 1] \cup [\sqrt{13} - 1; 6]$.
15. $a = 2$.
16. $a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup [0; +\infty)$.
17. $a = 0$.
18. $a \in \{-1; 1\}$.
19. $a \in \left[-1; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.
20. $a \in \left[\dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{9 + 3\sqrt{5}}{2}\right]$.
21. $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \cup (3 + \sqrt{7}; +\infty)$.
22. $a \in [-5; -1]$.
23. $a \in \left\{\dfrac{4}{5}\right\} \cup \left(\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.

Системы трёх уравнений.

Задачи для решения в классе

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ z - y = 1, \\ (x-1)^3 + (y-2)^3 + (z-3)^3 = 3. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3, \\ \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 3, \\ \\ \dfrac{1}{xyz} = 1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \\ 2x + 3y + z = 0, \\ \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 3, \\ \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} = 3, \\ \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4zx^2 - yz^2 + 2xy^2 = 3xyz, \\ zy^2 + 2xz^2 - 4yx^2 = 3xyz, \\ 2xy - 2xz + yz = 3. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3xz + 1 = 4x + 3z, \\ 4xy - 3xz = 4y - 3z + 9, \\ xy - zy = x + 3 - 2z. \end{cases} .$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - x^2 = 0, \\ 10x - 3y - 3z + xz = 0, \\ 16x - y + z - xy = 0. \end{cases} .$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 + z^3 + 2xyz + 22 = 0, \\ 2x^3 - 2y^3 - z^3 + xyz + 2 = 0, \\ y^3 - x^3 - z^3 + xyz - 13 = 0. \end{cases} .$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2x - 4y - 3z, \\ y^2 - z^2 = -x + 3y + 4z, \\ z^2 - x^2 = 3x - y - 5z. \end{cases}.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 = yz - 2x, \\ 2y^2 = -xz + 2y, \\ 2z^2 = -xy + 2z. \end{cases}.$$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x - y)^2 = 4 + z^2, \\ (z - y)^2 = 2 + 4x^2, \\ (z + 2x)^2 = 3 + y^2. \end{cases}.$$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 5, \\ (y + z)(y^2 + z^2) = 13, \\ (z - x)(z^2 + x^2) = 40. \end{cases}.$$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2yz + \frac{3}{x} + 3 = 0, \\ xy + \frac{4}{z} - 2 = 0, \\ xz + \frac{2}{y} + 2 = 0. \end{cases}.$$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8zx^2 - 2xy^2 + 4yz^2 = 6xyz, \\ 4yx^2 + 2zy^2 - 8xz^2 = 6xyz, \\ 2xy + 4xz - 2yz = 3. \end{cases}.$$

Ответы:

1. $(2;3;4)$.

2. $(1;1;1)$.

3. $(0;0;0)$, $(2;-1;-1)$.

4. $(1;1;1)$.

5. $\left(\frac{1}{2};2;1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-2;-1\right)$, $(1;1;-1)$, $(-1;11;1)$, $\left(\frac{1}{2};-1;-2\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1;2\right)$.

6. $\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{2};3;2\right)$.

7. $(0;0;0)$, $(1;6;-4)$, $(4;12;-4)$.

8. $(-\sqrt[3]{32};-3;\sqrt[3]{16})$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{16}{3}};-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};-\sqrt[3]{\frac{32}{3}}\right)$.

9. $(0;0;0)$, $(1;2;-1)$, $\left(\frac{\sqrt{37}-17}{6};-\frac{1+\sqrt{37}}{3};-\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{37}+17}{3};\frac{17+\sqrt{37}}{6};\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$.

10. $(0;0;0)$, $(0;0;1)$, $(-2;2;2)$, $(-1;0;0)$, $(0;1;0)$, $\left(-\frac{6}{7};\frac{6}{7};-\frac{2}{7}\right)$, $\left(\frac{2}{7};\frac{6}{7};\frac{6}{7}\right)$, $\left(-\frac{6}{7};-\frac{2}{7};\frac{6}{7}\right)$.

11. $\left(\frac{7}{12};-1;\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{12};1;-\frac{5}{6}\right)$.

12. $(-1;-2;3)$.

13. $(3;2;1)$.

14. $\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-1;-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};-1;-1\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};1;1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};2;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Задачи для решения дома

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3}{xy} + \dfrac{15}{yz} = 2, \\[2ex] \dfrac{15}{yz} + \dfrac{5}{zx} = 2, \\[2ex] \dfrac{5}{zx} + \dfrac{3}{xy} = 2. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\[2ex] yz + zx = 9, \\[2ex] zx + xy = 5. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} = 3, \\[2ex] \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{z+x} = 1, \\[2ex] \sqrt[3]{z+x} + \sqrt[3]{x+y} = 0. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\[2ex] 2x + 3y + z = 1, \\[2ex] x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8zx^2+4yz^2-2xy^2=6xyz, \\ 2zy^2-8xz^2+4yx^2=6xyz, \\ 2xy+4xz-2yz=3. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6xz+2=2z-3x, \\ xy+zy=2(z-x+1), \\ zy-6xz=3x+3-y. \end{cases} \qquad .$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y-5z-2yz=0, \\ x-5y-z-2z^2=0, \\ x+9y-3z+2xz=0. \end{cases} \qquad .$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ -x^3 + y^3 + 2z^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4x - 2y + 3z, \\ y^2 - z^2 = -x + 3y + 5z, \\ z^2 - x^2 = 3x - y - 4z. \end{cases}.$$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 = yz + x, \\ 2y^2 = xz + y, \\ 2z^2 = xy + z. \end{cases}.$$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 3y)^2 = 2 + z^2, \\ (z + 3y)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2. \end{cases}.$$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = -15, \\ (y-z)(y^2+z^2) = 13, \\ (x-z)(z^2+x^2) = 20. \end{cases}.$$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} yz + \frac{2}{x} + 2 = 0, \\ 2xy + \frac{3}{z} + 3 = 0, \\ xz + \frac{4}{y} - 2 = 0. \end{cases}.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} zx^2 - 4xy^2 + 2yz^2 = 3xyz, \\ 2yx^2 + 4zy^2 - xz^2 = 3xyz, \\ 2xy + xz - 2yz = 3. \end{cases}.$$

Ответы:

1. $(1;3;5)\,,(-1;-3;-5)\,.$

2. $(1;2;3)\,,(-1;-2;-3)\,.$

3. $(-4;5;3)\,.$

4. $(-1;0;3)\,,\ (3;-2;1)\,.$

5. $(5;4;5)\,.$

6. $\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-1;-1;-\dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2};-1;-1\right),\ \left(-\dfrac{1}{2};1;1\right),\ \left(\dfrac{1}{2};2;-\dfrac{1}{2}\right),$ $\left(-\dfrac{1}{2};2;\dfrac{1}{2}\right).$

7. $\left(\dfrac{5}{6};4;-\dfrac{3}{2}\right),\left(2;-3;-\dfrac{4}{5}\right).$

8. $(0;0;0)\,,\ \left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};-1\right),\ \left(4-\dfrac{5}{6};-\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{2}\right).$

9. $(-\sqrt[3]{9};-\sqrt[3]{3};-2)\,,\ \left(-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}};\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}};-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right).$

10. $(0;0;0),\ (-2;1;-1)\,,\ \left(-\dfrac{1+\sqrt{37}}{3};\dfrac{17-\sqrt{37}}{6};-\dfrac{1+\sqrt{37}}{6}\right),$ $\left(\dfrac{\sqrt{37}-1}{3};\dfrac{17+\sqrt{37}}{6};\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}\right).$

11. $(0;0;0),\ \left(\dfrac{1}{2};0;0\right),\ \left(0;\dfrac{1}{2};0\right),\ \left(0;0;\dfrac{1}{2}\right),\ (1;1;1),\ \left(-\dfrac{1}{7};\dfrac{3}{7};\dfrac{3}{7}\right),$ $\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{1}{7};\dfrac{3}{7}\right),\ \left(\dfrac{3}{7};\dfrac{3}{7};-\dfrac{1}{7}\right).$

12. $\left(-1;\dfrac{5}{18};\dfrac{7}{6}\right),\left(1;-\dfrac{5}{18};-\dfrac{7}{6}\right).$

13. $(-1;-2;-3).$

14. $(2; -1; 3)$.

15. $\left(2; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}; -1\right)$, $\left(1; -\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(-1; \frac{1}{2}; -2\right)$, $(1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$.

Логический перебор в задачах с параметром.

Задачи для решения в классе.

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение
$(x+1)a^2 - 3xa + 2x - 1 = 0$.

2. Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства $4xa^2 - (17x+4)a + 4x + 1 \geqslant 0$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $|x + 2a - 1| \geqslant |3x + 4a + 1|$ будет является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|3x - 5a - 3| \leqslant 7 - 5a - x$ имеет единственное решение.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет больше двух решений система уравнений
$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30, \\ 8x - 5y = 3. \end{cases}$$

6. Числа x и y являются решениями системы уравнений
$$\begin{cases} ax + y = a + 1, \\ x + 4ay = 3, \end{cases}$$
где a – параметр. Какое наибольшее значение принимает выражение $x^2 - 6y^2$? При каком a это происходит?

7. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 4a, \\ \frac{2}{x} - \frac{6}{y} = 3 + 4a. \end{cases}$$

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:
$$(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3 \cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x + 1} = 0.$$

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2 + 3x - 9a + 18 = 0$ и $x^2 + 6x - 13a + 25 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

10. Найдите все значения a и b, при которых уравнения
$$x(x^2 - 4x - 2) = a$$
и
$$x(x^2 + x - 7) = b$$
имеют два общих корня. В ответ укажите $a + b$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - (a - 4)x - 4a} < 0$ является ровно один интервал.

12. При каждом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{3}{x - a} > a$.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $(x - 3a + 4)\sqrt{x + a + 2} \leqslant 0$ является отрезок числовой прямой, длина которого равна $|a|$.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2 - (a^2 + 8)x + 8a)\sqrt{x + 3} = 0$ имеет ровно два различных корня.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $10\cos 2x = (a^2 + 13a + 20)\sin x + 10$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно 4 корня.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ни одно из чисел -3 и 1 не является корнем уравнения
$$(x^2 + 2x - 3)\sqrt{6^{x^2+2x-3} + a^2 - 14a + 44}.$$

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$(6^x - 6)((0{,}25)^{-x} - 64)((0{,}5)^{-x} - 4 \cdot 8^a)(3^x - 27^a) \leqslant 0$$

имеет ровно два решения. Укажите эти решения для каждого из найденных значений параметра.

18. Найдите все a, при которых уравнение $\log_3(x+\sqrt{5-a})+\log_{\frac{1}{3}}(a-2-x)=\log_9 4$ имеет решение.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_3 x^2 \leqslant \log_3(4x+5)$ является решением неравенства $16x^2 \leqslant 25a^4$.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения
$$\sin 3x + 2(|a|-2)\sin^2 x = a\sin x$$
и
$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$$
имеют одно и то же множество корней.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(|x+1|+|x-a|)^2 - 2(|x+1|+|x-a|) + 4a(1-a) = 0$$
имеет ровно два корня.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-a^2\right| = |x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$ имеет ровно два различных корня.

Ответы:

1. $x \in \mathbb{R}$ при $a = 1$; решений нет при $a = 2$; $x = \dfrac{a+1}{2-a}$ при $a \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$.

2. $x \in \left[\dfrac{1}{a-4}; = \infty\right)$ при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \cup (4;+\infty)$; $x \in \mathbb{R}$ при $a = \dfrac{1}{4}$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a-4}\right]$ при $a \in \left(\dfrac{1}{4}; 4\right)$; решений нет при $a = 4$.

3. $a \in \{0;4\}$.

4. $a = \dfrac{9}{10}$.

5. $-\dfrac{5}{2}$.

6. Глобальный максимум равен 27 при $a = \dfrac{1}{2}, x+2y = 3$. Локальный максимум равен 3 при $a = 0, x = \dfrac{2a+3}{2a+1}, y = \dfrac{1}{2a+1}$.

7. $a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{8}; \dfrac{3}{4}\right\}$.

8. $a \in (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [4;+\infty)$.

9. $a \in \left\{\dfrac{37}{16}; 4\right\}$.

10. $a + b = -5$.

11. $a \in (-4;-3) \cup (-3;+\infty)$.

12. $x \in \left(-\infty; a + \dfrac{3}{a}\right) \cup (a;+\infty)$ при $a < 0$; $x \in (0;+\infty)$ при $a = 0$; $x \in \left(a; a + \dfrac{3}{a}\right)$ при $a > 0$.

13. $a = \dfrac{2}{3}$.

14. $a \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{8}{3}; 0\right] \cup \{\pm 2\sqrt{2}\}$.

15. $a \in \{-13; -8; -5; 0\}$.

16. $a \in (5; 9)$.

17. $x \in \{1; 3\}$ при $a = \frac{1}{3}$.

18. $a \in \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}); 5\right]$.

19. $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

20. $a \in [0; 1) \cup \{3; 4\} \cup (5; +\infty)$.

21. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

22. $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; -1] \cup (0; +\infty)$.

Указания:

3. Используйте идею, что $|a| \geqslant |b| \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) \geqslant 0$.

4. Используйте идею, что $|a| \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant b$ и $a \geqslant -b$.

9. Используйте идею, что разность этих уравнений имеет тот же самый общий корень с данными двумя уравнениями.

10. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни первого уравнения, x_1, x_2, x_4 – корни второго уравнения (x_1, x_2 – корни этих двух уравнений). Тогда уравнения можно записать в виде $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ и $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) = 0$. Разность этих уравнений имеет вид $(x - x_1)(x - x_2)(x_4 - x_3) = 0$.
Это уравнение имеет два корня x_1 и x_2 – общие с данными уравнениями.
Также можно заметить, что многочлен $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ делится без остатка на многочлен второй степени

$(x-x_1)(x-x_2)(x_4-x_3)$, или x^3-4x^2-2x-a делится без остатка на многочлен

$$((x^3-4x^2-2x-a)-(x^3+x^2-7x-b))=-5x^2+5x-a+b.$$

Значит, в равенстве

$$\frac{x^3-4x^2-2x-a}{-5x^2+5x-a+b}=-\frac{x}{5}+\frac{3}{5}+\frac{\left(-5-\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}\right)x-\left(\dfrac{2}{5}a+\dfrac{3}{5}b\right)}{-5x^2+5x-a+b}$$

числитель последней дроби должен быть равен нулю при любом x. Последнее возможно при условиях:

$$\begin{cases}-5-\frac{a}{5}+\frac{b}{5}=0,\\ \frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-10=0,\\ 2a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-15,\\ b=10.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $a=-15$ и $b=10$ многочлен $-5x^2+5x-a+b=-5x^2+5x+25$ имеет два действительных корня (общие корни данных уравнений), то есть найденные a и b искомые их сумма равна -5.

16. Введите новый параметр $b=a^2-14a+44$.

Задачи для решения дома.

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $(x+1)a^2+2xa-3x-1=0$.

2. Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства $5xa^2-(26x+1)a+5x+5\leqslant 0$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|2x+a-1|\geqslant|4x+3a+1|$ будет иметь единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $|3x-4a-1|>5-4a-x$ будет вся числовая прямая.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет больше двух решений система уравнений
$$\begin{cases}(9a^2-49a)x+36y=9a^2-58a+44,\\ 9y-5x=5.\end{cases}$$

6. Числа x и y являются решениями системы уравнений
$$\begin{cases}-x+ay=2a,\\ ax-y=3a-5,\end{cases}$$
где a – параметр. Какое наименьшее значение принимает выражение x^2+y^2? При каком a это происходит?

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:
$$\begin{cases}12\cos^2 x+11\cos^2 y+33a=31,\\ 33\cos^2 x+4\cos^2 y+151=198a.\end{cases}$$

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:
$$6\log_7\sin x+a\log_7\sin x=a^2+5a+4.$$

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2 - x - 5a + 8 = 0$ и $x^2 + x - 8a + 12 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

10. Найдите все значения a и b, при которых уравнения $x(x^2 - 3x - 2) = a$ и $x(x^2 + 4x - 9) = b$ имеют два общих корня. В ответ укажите $a + b$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $((a-1)x^2+3x)^2-2((a-1)x^2+3x)+1-a^2 = 0$ имеет ровно два корня.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{x^2 - (a-3)x - 3a}{x^2 - (a-5)x - 5a} < 0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

13. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{15}{ax + 2a} > 1$$

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $(x - 2a)\sqrt{x - 5a + 12} = 0$ имеет единственный корень.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(x - 2a + 1)\sqrt{x - 3a} \leqslant 0$ имеет единственное решение.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3\sin x - a - 1)(3\sin x + 2a - 1) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно 2 корня.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число $\dfrac{5\pi}{4}$ не является корнем уравнения

$$\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)(x - 10\pi)\sqrt{a^2 + 7a + 11 + \cos\frac{4x}{5}} = 0,$$

а число 10π является корнем этого уравнения.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(7^x - 49)\big((0{,}5)^{-x} - 8\big)\big((0{,}2)^{-x} - 125^a\big)(3^x - 3 \cdot 27^a) \leqslant 0$$

имеет ровно два решения. Укажите эти решения для каждого из найденных значений параметра.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_5(ax^2 - (a-2)x + 7) + \log_{0,2}(7x^2 - (a-2)x + a) = 0$$

имеет более двух корней.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$4\cos^2 x + |a-4|(1 + \cos 2x) = a\cos x + \cos 3x$$

и

$$2\cos x \cos 2x = \cos 3x + \cos 2x + 1$$

имеют одно и то же множество корней.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - a^2| + 8 = |x + a| + 8|x - a|$ имеет ровно три различных корня.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4x-1}\,\ln\left(x^2 - 2x + 2 - a^2\right) = 0$ имеет ровно один корень на $[0; 1]$.

Ответы:

1. $x \in \mathbb{R}$ при $a = 1$; решений нет при $a = -3$; $x = -\dfrac{a+1}{a+3}$ при $a \in \mathbb{R}\backslash\{1; -3\}$.

2. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{5a-1}\right]$ при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right) \cup (5; +\infty)$; $x \in \mathbb{R}$ при $a = 5$; $x \in \left[\dfrac{1}{5a-1}; +\infty\right)$ при $a \in \left(\dfrac{1}{5}; 5\right)$; решений нет при $a = \dfrac{1}{5}$.

3. $a = -3$.

4. $a > \dfrac{7}{8}$.

5. $a = \dfrac{4}{9}$.

6. Глобальный минимум равен 2 при $a = 1, y - x = 2$. Локальный минимум равен $\dfrac{25}{2}$ при $a = 0, x = \dfrac{3a}{a+1}, y = \dfrac{2a+5}{a+1}$.

7. $a \in \left[\dfrac{17}{22}; \dfrac{9}{11}\right]$.

8. $a \in (-\infty; -6) \cup [-4; -1]$.

9. $a \in \left\{\dfrac{14}{9}; 4\right\}$.

10. $a + b = 12$.

11. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \{0; 1\} \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

12. $a \in (-5; -3)$.

13. $x \in \left(-2 + \dfrac{15}{a}; -2\right)$ при $a < 0$; решений нет при $a = 0$; $x \in \left(-2; -2 + \dfrac{15}{a}\right)$ при $a > 0$.

14. $a \in [4; +\infty)$.

15. $a \geqslant 1$.

16. $a \in (-4; -1) \cup \{0; 2\}$.

17. $a \in (-5; -4) \cup [-3; -2)$.

18. $x \in \{2; 3\}$ при $a = \dfrac{2}{3}$.

19. $a = 7$.

20. $a \in \{4\} \cup (5; +\infty)$.

21. $a \in \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\dfrac{7}{2}; \pm\dfrac{9}{2}\right\}$.

22. $a \in \left(-\dfrac{5}{4}; -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$.

Указания:

4. Используйте идею, что $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ или $a < -b$.

16. Введите обозначение $t = 3\sin x, t \in [-3; 3]$ (не взаимно однозначное отображение). Далее нарисуйте множество точек, заданное данным уравнением, в плоскости Ota.

Квадратный трёхчлен в задачах с параметром. Часть 2.

Задачи для решения в классе.

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{a(x+1)^2}{x}+(a-1)^2=0$ имеет корни, и решите это уравнение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2(a-2)x+3=0$ имеет единственный корень.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$ выполнено при любом значении x.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2-2ax+a-2=0$ имеет два различных положительных корня.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2-(a+1)x+2a^2-5a-3=0$ имеет два корня разных знаков.

6. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2. Найдите p и q, если числа x_1+1 и x_2+1 – корни уравнения $x^2-p^2x+pq=0$.

7. Чему равна абсцисса точки, лежащей на прямой $y(x)=-4x+4$, из которой к параболе $f(x)=5x^2-5x-5$ проведены две перпендикулярные друг другу касательные?

8. Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arcsin\big((a-1)x-1-(a-1)x^2\big)+\arcsin x=0$.

9. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+4}=a+1$ имеет хотя бы один корень.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x - (3a-1)\cdot 2^x + 2a^2 + a - 6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{14}^2 x - (18a+5)\log_{14} x + 81a^2 + 45a + 6 = 0$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 105.

12. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x^2 - ax + 2x - 2a)\sqrt{5-x} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 5?

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$ имеет ровно один корень из отрезка $[0;1]$.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-a)x^2 - (a-2)x - a - 6 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше 1, а другой – меньше 1.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-1)x^2 - 2(a+1)x - 2a - 1 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше -2.

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - (2a-5)x + a - 7 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 3.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+6)x^2 + 2(a-6)x - 2a + 6 = 0$ имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 2.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - (a-5)x + a^2 - 4a - 5 < 0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(-4;0)$.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4(a-3)x^2 - 2(2a+1)x + a > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2;2]$.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+4)x^2+4(a+1)x+2a+2=0$ имеет хотя бы один корень, больший -2.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых каждый корень уравнения $(a-3)x^2-2(a+1)x+a=0$ больше -1.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{2ax+a(1-2a)}{2a^2+2ax-1}<0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-2;2]$.

23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg^2(3x^2+6x+4)+(5a^2-a+4)\lg(3x^2+6x+4)-a-2=0$ имеет хотя бы один корень.

24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $49^x+(2a^2-a+6)\cdot 7^x+2a^2+a-6=0$ имеет единственный корень.

25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^4+(a-2)x^3+2x^2+(a-2)x+2=0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=a$ имеет не менее трёх различных отрицательных корней.

27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $a(\cos^2 x-3)^2+2a+11\sin^2 x<44$.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $1+\log_5(x^2+1)>\log_5(ax^2+4x+a)$.

29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x-2a}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-a}=1$ имеет ровно один корень.

30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a+5}=x-2a+4$ имеет хотя бы один корень, и

укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет ровно два корня.

32. Решите уравнение $x+\sqrt{a^2-x^2+2x-1}=2$.

33. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{\lg ax}{\lg(x+1)}=2$ имеет единственное решение.

34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\leqslant 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\geqslant 0\end{cases}$$
имеет единственное решение.

Ответы:

1. Корней нет при $a = 0$; $x = -1$ при $a = 1$; $x = 1$ при $a = -1$; $x \in \left\{-a; -\dfrac{1}{a}\right\}$ при $a \in \mathbb{R}\backslash\{0; \pm 1\}$.
2. $a = 5$.
3. $a \in [1; +\infty)$.
4. $a \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)$.
5. $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup (0; 3)$.
6. $p = -2, q = -1$ или $p = 1, q \leqslant \dfrac{1}{4}$.
7. $\dfrac{103}{40}$.
8. $x \in \left\{\dfrac{1}{a-1}; 1\right\}$ при $a \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$; $x = 1$ при $a \in (0; 2]$.
9. $a \in \left[-\dfrac{13}{7}; 1\right)$.
10. $a = 5$.
11. $a = -\dfrac{1}{9}$.
12. $a \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$.
13. $a \in (-\infty; 0) \cup \left[3 - \sqrt{5}; 1\right]$.
14. $a \in (-1; 0) \cup (1; 4)$.
15. $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{6}\right)$.
16. $a \in \left(\dfrac{13}{7}; \dfrac{17}{5}\right)$.
17. $a \in (-1; 0) \cup (2; 27)$.
18. $a \in [-1; 3]$.
19. $a \in \left(-\dfrac{1}{16}; \dfrac{44}{25}\right]$.
20. $a \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
21. $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \cup \{3\}$.
22. $a \in \left(-\infty; \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.
23. $a \in [-2; +\infty)$.
24. $a \in \left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$.
25. $a > 5$.
26. $a \in \left(-1; \dfrac{9}{16}\right)$.
27. $a < 3$.
28. $a \in (2; 3]$.
29. $a \in \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}; -2; 1\right\}$.

30. $x = 2a - 3 + \sqrt{3a-2}$
при $a \in (1; +\infty)$;
$x = 2a - 3 \pm \sqrt{3a-2}$
при $a \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$.

31. $a \in (2; 4)$.

32. $x = \dfrac{3 - \sqrt{2a^2-1}}{2}$
при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{2a^2-1}}{2}$
при $a \in \left[-1; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$;
при прочих a корней нет.

33. $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

34. $a \in \left\{-\dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{3}\right\}$.

Указания:

22. Используйте идею, что

$$\frac{2ax + a(1-2a)}{2a^2 + 2ax - 1} < 0 \Leftrightarrow (2ax + a(1-2a))(2a^2 + 2ax - 1) < 0.$$

23. Введите обозначение

$$t = \lg(3x^2 + 6x + 4) = \lg\big(3(x+1)^2 + 1\big) \geqslant \lg 1 = 0.$$

После этого задача сводится к поиску параметра a, при каждом из которых квадратное уравнение $t^2 + (5a^2 - a + 4)t - a - 2 = 0$ имеет хотя бы один неотрицательный корень.

25. Перепишите уравнение в виде

$$2(x^4+1) + (a-2)(x^3+x) + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (a-2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Введите обозначение $t = x + \dfrac{1}{x}$.
Нарисуйте эскиз графика функции $t(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
После этого задача сводится к поиску параметра a, при каждом из которых квадратное уравнение $2(t^2-2) + (a-2)t + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень, меньший -2.

34. Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Случай 1. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0. \end{cases}$$

Случай 2. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Задачи для решения дома.

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2+(3a+1)x+2a^2-2}{x^2-3x-4}=0$ имеет только один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+3)x^2-2(a+3)x-5=0$ имеет единственный корень.

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $(a^2-4)x^2+2(a+2)x-1<0$ выполнено при любом значении x.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-6x+a^2-4a+12=0$ принимает наибольшее возможное значение.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+2(a^2+7a+3)x+9=0$ имеет два различных положительных корня.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-a-2)x^2-x+a^2+a-2=0$ имеет два корня разных знаков.

7. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2-ax+a=0$. При каком a выражение $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее значение?

8. Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arccos(ax^2-(a+1)x+2)+\arccos(-x)=\pi$.

9. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{(2a+1)x^2-2(a+5)x+18a+9}{x^2-5x+9}=3a$ имеет хотя бы один корень.

10. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $a=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+11}{3\operatorname{tg} x-1}$ имеет хотя бы одно решение.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\log_3^2 x-(a-2)\log_3 x-2\geqslant 0$ имеет единственное решение.

12. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $36^x - (8a-1)\cdot 6^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

13. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых один из корней уравнения $16^x - \left(4^{a+3} + 16^{a+1}\right)\cdot 4^x + 4^{3a+5} = 0$ больше другого в три раза.

14. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $9^x - (a+2)3^{x-\frac{1}{x}} + 2a\cdot 3^{-\frac{2}{x}} = 0$ имеет ровно два корня.

15. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x-5)\sqrt{ax+2x-x^2-2a} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 6?

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(5x-2)\sqrt{x^2-2x+2a-a^2} = 0$ имеет ровно один корень из интервала $(0;1)$.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-a-6)x^2-2ax+a^2-9=0$ имеет два различных корня, один из которых больше -1, а другой – меньше -1.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2+2(a-1)x-2a+1=0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 2.

19. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+(a+2)x+1-a=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 4.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-3)x^2-2(a+3)x-2a-3=0$ имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(-2;1)$.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4x^2+2(a-2)x+a^2+2a-8<0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(0;2)$.

22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a-4)x^2-2(2a-1)x+4a-4>0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0{,}5;0{,}5]$.

23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-4)x^2-6(a-2)x+7a-10=0$ имеет хотя бы один корень, меньший 3.

24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-4)x^2-6(a-2)x+7a-10=0$ имеет имеет на отрезке $[-1;1]$ хотя бы один корень.

25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{6ax-a(2-a)}{a^2-6ax-8}>0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-3;3]$.

26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3^2(7x^2+1)+(3a^2-a+3)\cdot\log_3(7x^2+1)+4a^2-a^4=0$ имеет хотя бы один корень.

27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $36^x-2(a+1)\cdot 6^x+a^2+2a-8=0$ имеет единственный корень.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x(x-1)}{x-2}+\dfrac{a(x-2)}{x^2-x}=1$ имеет хотя бы один корень.

29. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство
$$a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2.$$

30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x-(a-1)\cdot 3^x-a+4\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{6x-x^2}=x+a$ имеет хотя бы один корень.

33. Решите неравенство $25^{|x|}-2\cdot 5^{|x|}+a\geqslant 1$.

34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{2x}(1-ax)=\dfrac{1}{2}$ имеет единственное решение.

35. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x+9a)=x$ имеет два различных корня.

Ответы:

1. $a \in \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$.
2. $a = -8$.
3. $a \in [-2; 0)$.
4. $a = 2$.
5. $a \in (-6; -1)$.
6. $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.
7. $a = 0$.
8. $x \in \left\{\frac{2}{a}; 1\right\}$ при $a \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; $x = 1$ при $a \in (-2; 2]$.
9. $a \in \left(-\infty; \frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{16}{19}; +\infty\right)$.
10. $a \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{22}{9}; +\infty\right)$.
11. $a = -2$.
12. $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.
13. $a \in \left\{-7; -\frac{3}{5}\right\}$.
14. $a \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (9; +\infty)$.
15. $a \in (-\infty; -4] \cup [8; 11]$.
16. $a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right)$.
17. $a \in (-3; -2) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right)$.
18. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right)$.
19. $a \in \left(1; \frac{9}{5}\right)$.
20. $a \in (-4; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
21. $a \in [-4; 0]$.
22. $a \in \left(\frac{15}{16}; \frac{24}{25}\right]$.
23. $a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.
24. $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \left[15 + 4\sqrt{17}; +\infty\right)$.
25. $a \in (-\infty; -9 - \sqrt{89}) \cup (20; +\infty)$.
26. $a \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$.
27. $a \in (-4; 2]$.
28. $a \leqslant 65\sqrt{2} - 92$.
29. $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
30. $a \geqslant 3$.
31. $a \in [0; \frac{2}{5}] \cup \left\{-\frac{1}{10}\right\}$.
32. $a \in \left[-6; 3(\sqrt{2} - 1)\right]$.

33. $x \in \mathbb{R}$ при $a \geqslant 2$; $x \in \left(-\infty; -\log_5\left(1+\sqrt{2-a}\right)\right] \cup \left[\log_5\left(1+\sqrt{2-a}\right); +\infty\right)$ при $a < 2$.

34. $a \in \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup (0; +\infty)$.

35. $a \in \left(0; \dfrac{1}{36}\right)$.

Разные задачи.

Задачи для решения в классе

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2+1} = \cos x$.
2. Решите уравнение $1 + \cos^2 x = \log_2(x^2+4)$.
3. Решите уравнение $x = \ln x + 1$.
4. Решите уравнение $x^3 + 2x + \sqrt[5]{x-4} = 32$.
5. Решите уравнение $\sqrt[7]{x-7} + \sqrt{x-4} = 11 - \dfrac{x^3}{64}$.
6. Решите уравнение $3\sqrt[5]{6{,}2x - 5{,}2} + 4\log_5(4x+1) - 14 = 0$.
7. Решите уравнение $||x = 8| - 12| + ||3x-4| + 16| = 7x + 24$.
8. Решите уравнение $4\sqrt{6-5x} + |3x-2| = 4x + |3\sqrt{6-5x} - 2|$.
9. Решите уравнение $\cos^{18} x - (5\cos x + 4)^9 + \cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0$.
10. Решите уравнение $27x^6 - (8+2x)^3 + 6x^2 - 16 = 4x$.
11. Решите уравнение
$\sin(x^2+4x+6) - \sin(2x^2+12x+22) = 3x^2 + 24x + 48$.
12. Решите уравнение $(2x+1)(1+\sqrt{4x^2+4x+8}) + x(1+\sqrt{x^2+7}) = 0$.
13. Решите уравнение $x + \sqrt{x^2-9} = \dfrac{2(x+3)}{(x-3)^2}$.
14. Решите уравнение $x^3 - 4\sqrt[3]{4x-3} + 3 = 0$.
15. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2 + \sqrt{y + x^2 - 2}} = y, \\ \sqrt{y^2 - 3 + \sqrt{x + y^2 - 3}} = x. \end{cases}$$
16. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

17. Решите уравнение $|2x - \sqrt{1 - 4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.

18. Решите уравнение $x + \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$.

19. Решите уравнение $5|x-3| + 3|x+2| = 2\sqrt{49 - y^2} + 1$.

20. Решите уравнение

$$\log_{4\sqrt{x+4y}} \left(4^{\sqrt{x+4y}} + \sqrt{\frac{y\sqrt{x}}{2} + 1} \right) = 3^{-\sqrt{x-4y-4\sqrt{x}}}.$$

21. Решите уравнение

$$\log_{|\cos x| + |\sin x|} \left(4 - 2\cos y - \sin\frac{9x}{2} \right) = \log_{4^y + 3^{-y}} \left(\left| \sin\frac{3y}{4} \cos 6x \right| \right).$$

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x + 6 = 8y, \\ y^3 + y + 6 = 8z, \\ z^3 + z + 6 = 8x. \end{cases}$$

23. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $x(\sqrt{1-9x^2} + 3\sqrt{4-x^2}) = a$ имеет хотя бы один корень.

24. Найдите наибольшее значение выражения

$$z = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{3 + 2y - 2y^2}.$$

25. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{19}, \\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+9} + \sqrt{z^2+25} = 10. \end{cases}$$

26. Найдите наибольшее возможное значение выражения $3x + 2y + 2z + 3t$, где x, y, z, t удовлетворяют соотношениям $x^2 + y^2 = 16, z^2 + t^2 = 25, xt + yz \geqslant 20$.

27. Найдите наибольшее возможное значение выражения $2x+y-z$, где x, y, z удовлетворяют соотношению $x^2+3y^2+z^2=2$.

28. Решите уравнение $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$.

29. Найдите наименьшее значение выражения $(x-y)^2+(z-u)^2$, если

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2+(u-2)^2=1.$$

30. Пусть $f(x)=|4-4|x||-2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x))=x$?

31. Функция $f(x)$ определена для всех x и удовлетворяет равенству $2f(x)+f(1-x)=x^2$. Найдите $f(x)$.

32. Функция $f(x)$ определена для всех x, кроме 1, и удовлетворяет равенству $(x-1)f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x+f(x)$. Найдите $f(x)$.

33. Функция $f(x)$ определена для всех x и удовлетворяет равенству $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$. Найдите $f(x)$.

Ответы:

1. $x = 0$.
2. $x = 0$.
3. $x = 1$.
4. $x = 3$.
5. $x = 8$.
6. $x = 6$.
7. $x = 0$.
8. $x = 1$.
9. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
10. $x = -\dfrac{4}{3}, x = 2$.
11. $x = -4$.
12. $x = -\dfrac{1}{3}$.
13. $x = 8 \pm \sqrt{13}$.
14. $x = 1,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.
15. $\left(\dfrac{22}{9}, \dfrac{23}{9}\right)$.
16. $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
    $x = \cos\dfrac{5\pi}{8}$,
    $x = \cos\dfrac{\pi}{8}$.
17. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ x = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{11\pi}{12}$.
18. $x = -\dfrac{3}{4}$.
19. $(3, 0)$.
20. $\left(\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
21. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ y = \pi + 12\pi m$
    или $y = 5\pi + 12\pi m,\ k, m \in \mathbb{Z}$.
22. $(1,1,1);\ (2,2,2);\ (-3,-3,-3)$.
23. 2.
24. 2.
25. $\left(\dfrac{\sqrt{19}}{9}, \dfrac{\sqrt{19}}{3}, \dfrac{5\sqrt{19}}{9}\right)$.
26. $9\sqrt{13}$.
27. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.
28. $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$.
29. $12 - 4\sqrt{5}$.
30. 16.
31. $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$.
32. $f(x) = 2x + 1$.
33. $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

Задачи для решения дома

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2+4x+13} = 2 - \sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Решите уравнение $3 + 2\sin^2 x = \log_3(27 - x^2)$.

3. Решите уравнение $e^x = x + 1$.

4. Решите уравнение $x^5 + 3x + \sqrt[3]{x-3} = 37$.

5. Решите уравнение $\sqrt[5]{x-5} + \sqrt{x-2} = 9 - \dfrac{x^3}{36}$.

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 2\log_2(3x-1) - 8 = 0$.

7. Решите уравнение $\big||x-6| + 9\big| + \big|3|x+1| - 12\big| = 5x + 24$.

8. Решите уравнение $5\sqrt{12-x} + |4x-3| = 5x + |4\sqrt{12-x} - 3|$.

9. Решите уравнение $\cos^{14} x + (2 - 3\cos x)^7 + \cos^2 x + 2 = 3\cos x$.

10. Решите уравнение $x^7 + (x+1)^7 + \ldots + (x+2020)^7 = 0$.

11. Решите уравнение
$$(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0.$$

12. Решите уравнение $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{(x-1)^2}{2(x+1)}$.

13. Решите уравнение $x^3 - 5\sqrt[3]{5x-4} + 4 = 0$.

14. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3 + \sqrt{y + x^2 - 3}} = y, \\ \sqrt{y^2 - 5 + \sqrt{x + y^2 - 5}} = x. \end{cases}$$

15. Решите уравнение $\sqrt{8x^3 - 6x} = 1$.

16. Решите уравнение $|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$.

17. Решите уравнение $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}$.

18. Решите уравнение $9|x-1| + 4|x+4| = 3\sqrt{25-y^2} + 5$.

19. Решите уравнение

$$\log_{5^{\sqrt{2x+y}}}\left(5^{\sqrt{2x+y}} - \sqrt{-2x\sqrt{y}-1}\right) = 4^{\sqrt{y-2x-2\sqrt{y}}}.$$

20. Решите уравнение

$$\log_{|\cos\frac{4x}{3}|+|\sin\frac{4x}{3}|}\left(6-\cos\frac{4y}{3} - 4\sin 6x\right) = \log_{6^y+4^{-y}}\left(|\sin y\cos 8x|\right).$$

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3y + 2 = 0, \\ y^3 - 3z + 2 = 0, \\ z^3 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

22. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $x(6\sqrt{64-49x^2} + 7\sqrt{25-36x^2}) = a$ имеет хотя бы один корень.

23. Найдите наибольшее значение выражения

$$z = y\sqrt{36-x^2} + x\sqrt{77+4y-2y^2}$$

24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = \sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} = 7. \end{cases}$$

25. Найдите наибольшее возможное значение выражения $2x + 3y + 3z + 2t$, где x, y, z, t удовлетворяют соотношениям $x^2 + y^2 = 9$, $z^2 + t^2 = 49$, $xt + yz \geqslant 21$.

26. Решите уравнение $\sqrt{2^{x^2+2x+4}+1} = -\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + 2$.

27. Решите уравнение $x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ при положительном x.

28. Функция $f(x)$ определена для всех x, кроме 0, и удовлетворяет равенству $f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$. Найдите $f(x)$.

29. Функция $f(x)$ определена для всех x, кроме 0 и 1, и удовлетворяет равенству $f(x) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = x$. Найдите $f(x)$.

Ответы:

1. $x = -2$.
2. $x = 0$.
3. $x = 0$.
4. $x = 2$.
5. $x = 6$.
6. $x = 3$.
7. $x = 0$.
8. $x = 3$.
9. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. $x = -1010$.
11. $x = -\dfrac{1}{5}$.
12. $x = \pm\sqrt{5}$.
13. $x = 1$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.
14. $\left(\dfrac{59}{15}, \dfrac{61}{15}\right)$.
15. $x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$,
    $x = \cos\dfrac{5\pi}{9}$,
    $x = \cos\dfrac{\pi}{9}$.
16. $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \cos\dfrac{\pi}{12}$.
17. $x = \dfrac{4}{3}$.
18. (1,0).
19. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.
20. $x = \dfrac{7\pi}{4} + 3\pi k$
    или $x = \dfrac{11\pi}{4} + 3\pi k$,
    $y = \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$.
21. $(1, 1, 1)$; $(-2, -2, -2)$.
22. 40.
23. 54.
24. $\left(\dfrac{\sqrt{13}}{6}, \dfrac{\sqrt{13}}{3}, \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.
25. $10\sqrt{13}$.
26. $x = -1$.
27. $x = \dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{2}$.
28. $f(x) = -\dfrac{2}{3x} - \dfrac{x}{3}$.
29. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x}\right)$.

Экономические задачи. Вклады, кредиты.

Задачи для решения в классе

1. Спустя год после того, как некоторая сумма была внесена на банковский счет, вклад за счет процентов увеличился на 20 160 рублей. Добавив еще 79 840 рублей, вкладчик оставил свои средства в банке еще на один год. По истечении этого периода общая сумма на банковском счете стала равна 628 160 рублей. Какой процент годовых выплачивает банк, если первоначальный взнос должен быть не менее 5 000 рублей?

2. Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% — в проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

3. 31 мая 2017 года Петр Иванович открыл вклад в банке под 15% годовых. Каждый год, начиная с 2018 года, 31 мая после начисления процентов Петр Иванович добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу, сделанному в 2017 году. Чему был равен первоначальный взнос, если 31 мая 2020 года перед добавлением очередной суммы Петр Иванович обнаружил на счету 63 894 рубля?

4. Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой 8% годовых, а второй — 10% годовых. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка. Через два года второй банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 10 до r процентов. Ещё через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства. Оказалось, что второй банк принес ему больший доход, чем первый. Найдите наименьшее целое r, при котором это возможно.

5. Вкладчик положил две одинаковые суммы под r% годовых в банки А и Б. Через год условия по вкладу в банке А изменились, и он понизил годовую ставку до 10% годовых, в то время как банк Б оставил годовую ставку на прежнем уровне. Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке Б через 3 года будет по крайней мере на 20% больше, чем вклад в банке А.

6. Вклад планируется открыть на четыре года под 10% годовых. Первоначальная сумма составляет целое число миллионов рублей. Вначале третьего и четвёртого годов вклад будет ежегодно пополняться на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначальной суммы, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн. рублей.

7. Вклад в размере 20 млн. рублей планируется открыть на четыре года под 10% годовых. В начале третьего и четвёртого годов вклад будет ежегодно пополняться на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наибольший возможный размер такой суммы, при котором за четыре года банк начислит на вклад меньше 17 млн. рублей.

8. По вкладу А банком предусмотрены 10% годовых каждый год, а по вкладу Б — 8% в первый год и одинаковое целое число r процентов во второй и в третий годы. Найдите наименьшее значение r, при котором за три года хранения вклад Б окажется выгоднее вклада А при одинаковых суммах первоначальных взносов.

9. Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых. Однако через год оба брата сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег и на сколько рублей?

10. Ваня сделал вклад в банке на 3 года под проценты, начисляемые раз в год. У Вани есть возможность в первый год (после начисления процентов) снять со счета 20% от имеющейся там суммы, а во второй (также после начисления процентов) — доложить на счёт 20% от имеющейся там суммы. Или произвести эти действия в

противоположном порядке. Определите, какой из порядков действий спустя 3 года принесет Ване большую выгоду, и сколько процентов составит эта выгода?

11. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 550 000 рублей. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

    Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит должен быть полностью погашен двумя равными платежами к июлю 2028 г.?

12. В июле 2019 года был взят кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
    - в июле 2020, 2021 и 2022 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;
    - в 2023 и 2024 годах выплачивается по 625 тыс. рублей;
    - к июлю 2024 долг погашается полностью.

    Найдите общую сумму выплат за пять лет.

13. а) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 1,8 млн. рублей?

б) В декабре 2021 года планируется взять кредит в банке на S млн. рублей, где S – целое число, на четыре года. Условия его возврата таковы:

- каждый июнь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с июля по ноябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в декабре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024	2025
Долг (в млн. рублей)	S	0,7S	0,4S	0,2S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн. рублей.

14. В сентябре 2021 года планируется взять кредит в банке на S тыс. рублей, где S – натуральное число, на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый февраль долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с марта по август каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в сентябре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024
Долг (в млн. рублей)	S	0,9S	0,4S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

15. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн рублей.

16. В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024
Долг (в млн. рублей)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн. рублей.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
    - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

    На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что переплата составит 10,5 млн. рублей?

18. В декабре 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

    - каждый июнь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с июля по ноябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

    Если ежегодно выплачивать по 75 000 руб., то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 123 000 руб., то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

19. В июле 2016 года в банке был взят кредит на некоторую сумму. Условия возврата кредита таковы:

    - в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;
    - с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

    Какую сумму взяли в кредит, если известно, что он был выплачен тремя равными платежами, а переплата составила 65 500 рублей?

20. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
    - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    - к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

    Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1 604 000 рублей?

21. 15 января в банке был взят кредит в 700 тыс. руб. на (n + 1) месяц. Условия его возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
    - 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    - за n + 1 месяц долг должен быть погашен полностью.

    Найдите n, если банку всего было выплачено 755 тыс. руб., а долг на 15-е число n-го месяца составлял 300 тыс. руб.

22. 15 января планируется взять кредит в размере 900 тыс. рублей в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15-е число каждого с 1-го по 10-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тыс. рублей;
- за 11 месяцев долг должен быть погашен полностью.

Найдите r, если переплата по кредиту будет равна 121 тыс. рублей.

23. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на (n + 1) месяц.Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тыс. рублей;
- к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тыс. рублей.

Ответы:

1. 12.
2. 10 и 20.
3. 16 000 рублей.
4. 5.
5. 21.
6. 7 млн. рублей.
7. 24 млн. рублей.
8. 12.
9. У Саши, на 1155 рублей.
10. Никакой.
    В обоих случаях результат будет одинаковым.
11. 720 000 рублей.
12. 1 925 000 рублей.
13. а) 10 лет. б) 21 млн. рублей.
14. 400 тыс. рублей.
15. 6.
16. 13 млн. рублей.
17. 5 лет.
18. 25.
19. 122 000 рублей.
20. 1 100 000 рублей.
21. 10.
22. 2.
23. 3.

Задачи для решения дома

1. В банк сроком на два года был сделан вклад в размере 1 600 000 рублей. При этом клиент рассчитал, что если он в конце каждого года будет снимать со своего вклада 592 000 рублей, то в начале третьего года его вклад составит 752 000 рублей. Какой процент годовых по вкладу установлен в данном банке?

2. Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 70% — в проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а проект Y — от 22% до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определить, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль возможные уровни процентной ставки по вкладам от суммарных вложений в проекты X и Y.

3. 30 июня 2016 года Мария Андреевна открыла вклад в банке под 25% годовых. Каждый год, начиная с 2017 года, 30 июня после начисления процентов Мария Андреевна добавляла к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу, сделанному в 2017 году. Чему был равен первоначальный взнос, если 30 июня 2020 года перед добавлением очередной суммы Мария Андреевна обнаружила на счету 369 000 рублей?

4. Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой 11%, а второй — 10%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка. Через два года первый банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 11 до r процентов. Ещё через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства. Оказалось, что второй банк принес ему меньший доход, чем первый. Найдите наименьшее целое r, при котором это возможно.

5. Вкладчик положил две одинаковые суммы под r% годовых в банки А и Б. Через год условия по вкладу в банке Б изменились, и он понизил годовую ставку до 8% годовых, в то время как банк

А оставил годовую ставку на прежнем уровне. Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке А через 3 года будет по крайней мере на 20% больше, чем вклад в банке Б.

6. Вклад планируется открыть на четыре года под 10% годовых. Первоначальная сумма составляет целое число миллионов рублей. В начале третьего и четвёртого годов вклад будет ежегодно пополняться на 3 млн. рублей. Найдите наименьший размер первоначальной суммы вклада, при котором за четыре года банк начислит на вклад больше 5 млн. рублей.

7. Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года под 10% годовых. В начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад стал бы не меньше 15 млн. рублей.

8. По вкладу А банком предусмотрены 10% годовых каждый год, а по вкладу Б — 7% в первый год и одинаковое целое число r процентов во второй и в третий годы. Найдите наименьшее значение r, при котором за три года хранения вклад Б окажется выгоднее вклада А при одинаковых суммах первоначальных взносов.

9. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2013 года в банке счёт, на который он ежегодно кладет 10 000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2019 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 22 000 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

10. Клиент вложил некоторую сумму под 10% годовых. Известно, что в конце первого года (после начисления процентов) он снял со своего счета 10% от имеющейся на тот момент суммы, а в конце второго года (также после начисления процентов) он доложил на счет 10% от имеющейся суммы. Определите, в конце третьего

года (после начисления процентов) увеличилась или уменьшилась сумма на счете по сравнению с первоначальным вкладом и на сколько процентов.

11. В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на 419 375 рублей. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

    Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит должен быть полностью погашен четырьмя равными платежами?

12. В июле 2019 года был взят кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
    - в июле 2020, 2021 и 2022 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;
    - в 2023 и 2024 годах выплачивается по 360 тыс. рублей;
    - к июлю 2024 долг погашается полностью.

    Найдите общую сумму выплат за пять лет.

13. В декабре 2021 года планируется взять кредит в банке на S млн. рублей, где S – целое число, на три года. Условия его возврата таковы:

    - каждый июнь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с июля по ноябрь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в декабре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024
Долг (в млн. рублей)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн. рублей.

14. В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на S тыс. рублей, где S – натуральное число, на три года. Условия его возврата таковы:

    - каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
    - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
    - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2023	2024	2025	2026
Долг (в млн. рублей)	S	0,7S	0,4S	0

    Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

15. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
    - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,25 млн рублей.

16. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что переплата составит 27 млн. рублей?

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 000 рублей?

18. В декабре 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый июнь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с июля по ноябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 77 760 руб., то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 131 760 руб., то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

19. В июле 2016 года был взят кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

    - в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
    - с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

    Какую сумму взяли в кредит, если известно, что он был выплачен тремя равными платежами, а переплата составила 156 060 рублей?

20. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
    - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    - к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

    Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 000 рублей?

21. 15 января в банке был взят кредит в 600 тыс. руб. на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
    - 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    - за $n + 1$ месяц долг должен быть погашен полностью.

    Найдите n, если банку после полного погашения кредита было выплачено 852 тыс. руб., а долг на 15-е число n-го месяца составлял 200 тыс. руб.

22. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

    - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
    - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    - 15-го числа 20-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
    - к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

    Найдите r, если известно, что переплата по кредиту составит 441 тыс. рублей.

23. 15 декабря планируется взят кредит в банке на 1200 тыс. рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 80 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 400 тыс. рублей;
- к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тыс. рублей.

Ответы:

1. 12.
2. 5 и 20.
3. 51 200 рублей.
4. 9.
5. 17.
6. 9 млн.рублей.
7. 3 млн рублей.
8. 12.
9. В 2024 г.
10. Увеличилась на 31,769%.
11. 648 000 рублей.
12. 1 050 000 рублей.
13. 11 млн. рублей.
14. 200 тыс. рублей.
15. 9.
16. 8 лет.
17. 5 лет.
18. 20.
19. 239 400 рублей.
20. 700 000 рублей.
21. 20.
22. 3.
23. 1.

Применение свойств функций при решений задач и параметром.

Задачи для решения в классе

1. Найдите все значения параметра a, при которых все корни уравнения
$$3\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+4\log_5(4x+1)+5a=0$$
принадлежат отрезку $[1;6]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых множество значений функции
$$y=\frac{x^2-2x-2a}{x^2+6}$$
содержит ровно одно целое число.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2+(a-1)^2=|x+a-1|+|x-a+1|$$
имеет единственное решение.

4. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства
$$\frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}\geqslant 1$$
состоит из одной точки.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$|(x+1)^2-2^{-1-a}|+|x+1|+(1+x)^2+2^{a+1}=4^a+0{,}25$$
имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$$\big||x+2a|-3a\big|+\big||3x-a|+4a\big|\leqslant 7x+24$$
выполняется для всех $x\in[0;7]$.

7. Найдите все значения a, при которых неравенство
$$\log_a\left(\frac{3+2x^4}{1+x^4}\right)+\log_a\left(\frac{5+4x^4}{1+x^4}\right)>1$$
выполняется для всех действительных значений x.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$27x^6+(4a-2x)^3+6x^2+8a=4x$$
не имеет корней.

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\sin(x^2+4x+4+a)-\sin(2x^2+12x+18+2a)=3x^2+24x+42+3a$$
не имеет решений.

10. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$$\big||x^2-6x+5|-x^2+6x-13\big|<a-a^2-(x-2)^2+2x-4$$
имеет единственное целое решение.

11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$|x-a^2+a+2|+|x-a^2+3a-1|=2a-3$$
имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4;19)$.

12. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}\sqrt{|y+3|}=1-\sqrt{5|x|},\\ 16a-9-6y=25x^2+y^2\end{cases}$$
имеет четыре решения.

13. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}x^2+y^2-4(x+y)\sin a+8\sin^2 a=2\sin a-1,\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin a+4\sin^2 a\end{cases}$$
имеет четыре решения.

14. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ((1-a)\ln(1-xy)+1)(x+y+a\sin^2 z)=0, \\ z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$\left|x+\frac{a^2}{x}+1\right|+\left|x+\frac{a^2}{x}-1\right|=2$$

имеет хотя бы один корень.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)\operatorname{tg}^2 x-\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}+a=0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$.

17. При каких значениях параметра a неравенство

$$2^{|9a+6x|+x^2-9}\leqslant\sqrt{\frac{9-x^2+a^2}{|9a+6x|+a^2}}$$

имеет максимальное количество целых решений?

Ответы:

1. $a \in \left[-\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}\right]$.
2. $a \in \left(-\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
3. $a \in \{-1; 3\}$.
4. $a = 4$.
5. $a = 1$.
6. $a \in [-3; 4]$.
7. $a \in (1; 8]$.
8. $a \in \left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$.
9. $a \in (2; +\infty)$.
10. $a \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
11. $a \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \cup [6; +\infty)$.
12. $a \in \left\{\frac{1}{128}; \frac{1}{16}\right\}$.
13. $a \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.
14. $a = 1$.
15. $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
16. $a \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
17. $a \in \left[-1; -\frac{7}{9}\right] \cup \left[-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}; 1\right] \setminus \{0\}$.

Задачи для решения дома

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение уравнения
$$4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$
принадлежит отрезку $[1;3]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\sqrt{2^{x^2+4x+7}+1}=-a^2+8a-13$$
имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$
имеет единственное решение.

4. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства
$$\frac{a+x^2+4\log_3(a^2-2a+9)}{5\sqrt{18x^4+7x^2}+a+4+\log_3^2(a^2-2a+9)}\geqslant 1$$
состоит из одной точки.

5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$$|3\sin x+a^2-22|+|7\sin x+a+12|\leqslant 11\sin x+|a^2+a-20|+11$$
выполнено для всех действительных x.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sin^{14}x+(a-3\sin x)^7+\sin^2x+a=3\sin x$$
имеет хотя бы одно решение.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(1+\sin x)^4 - 4\sin x = 7 - a - a^2$$
не имеет решений.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(4x-x^2)^2 - 32\sqrt{4x-x^2} = a^2 - 14a$$
имеет хотя бы один корень.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$
имеет единственное решение

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
имеет единственное решение.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} 2|xy - 3y - 4x + 12| = a^2 + 2a - z - 30, \\ 3a^2 - a - z - 32 = 0, \\ z - x^2 - y^2 + 6x + 8y = 0 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из уравнение
$$2\sin x + \cos x = a$$
имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответы:

1. $a \in \left[-\dfrac{17}{2}; -\dfrac{7}{2}\right]$.
2. $a = 4$.
3. $a \in \{3; 7\}$.
4. $a = 2$.
5. $a \in \{-5\} \cup [5; +\infty)$.
6. $a \in [-4; 2]$.
7. $a \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.
8. $a \in [0; 6] \cup [8; 14]$.
9. $a = 2$.
10. $a = \dfrac{4}{3}$.
11. $a = 1{,}8$.
12. $a \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{\sqrt{5}\}$.

Экономические задачи. Оптимальный выбор.

Задачи для решения в классе

1. В прямоугольной комнате площадью 42 кв.м требуется установить плинтусы по всему периметру. Стоимость 1 м плинтуса составляет 280 рублей. При каких целых линейных размерах комнаты затраты на покупку плинтуса будут наименьшими?

2. В двух городах суммарно более 39 кинотеатров. Если число кинотеатров в городе A уменьшить на три, то оно всё равно будет более чем в 4 раза превосходить число кинотеатров в городе B. При этом утроенное число кинотеатров города A меньше удвоенного числа кинотеатров города B по крайней мере на 85. Сколько кинотеатров в городе A?

3. Неопытный повар готовит одну порцию салата 20 минут, одну порцию горячего – 30 минут. Опытный повар тратит на одну порцию салата и на одну порцию горячего одинаковое количество времени – по 15 минут. Сколько наборов из одного салата и одного горячего смогут максимально произвести вместе 3 опытных и 2 неопытных повара за 3 часа?

4. Отец, мать, дочь и сын приехали на дачу. Им предстоит собрать ягоды в саду и натаскать песка для обустройства участка. Пробыть на даче они могут ровно 4 дня. Отец собирает в день 48 стаканов ягод, мать – 31,5 стакана, дочь - 25 стаканов, сын 42 стакана. Отец за день может принести 60 ведер песка, мать – 42 ведра, дочь - 36 ведер, сын – 54 ведра. Для участка необходимо принести 300 ведер песка. Как семье распределить работу, чтобы при этом собрать наибольшее возможное количество ягод? Сколько стаканов ягод при этом будет собрано?

5. Правительство решило закрыть убыточные шахты и построить новые фабрики и заводы. В результате закрытия одной шахты увольняется 180 человек, при этом на консервацию шахты и выплату пособий увольняемым тратится 52 миллиона рублей. Строительство одного нового завода с персоналом 170 человек стоит

43 млн рублей, а одной фабрики с персоналом 110 человек — 20 млн рублей. Чему равно максимально возможное увеличение суммарного числа новых рабочих мест, если известно, что сумма всех затрат правительства составила ровно 714 млн рублей?

6. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. рублей (т.е. к концу первого года они стоят 1 тыс. рублей, к концу второго — 4 тыс. рублей и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

7. В начале 2020 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

8. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия от цены p (тыс. рублей) задаётся формулой $q = 450 - 3p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. рублей) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наименьшую цену, при которой месячная выручка *r(p)* составит не менее 10800 тыс.рублей

9. Компания изготавливает и продает некоторую продукцию. Если одна единица продукции стоит 2000 рублей, то реализуется 1000 штук изделий. При снижении средней цены единицы продукции на 50 рублей объемы реализации возрастают на 50 штук. При какой цене фирма получит максимальный доход, и каково его значение?

10. Спрос и предложение описываются линейными функциями от цены за единицу товара p. При $p = 7$ избыточное предложение равно 6, т.е. 6 предложенных единиц товара не находят спроса, а

при $p = 2$ избыточный спрос равен 9, т.е. не удовлетворен спрос на 9 единиц товара. Определить равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение равны друг другу.

11. Шахты A и B соединены прямолинейной дорогой длиной 60 км. Выясните, на каком расстоянии от шахты A нужно построить завод по переработке руды, чтобы для её перевозки количество тонно-километров было наименьшим, если

    (a) на шахте А добывается 150 т руды в сутки, а на шахте В – 100 т руды;

    (b) на шахтах добывается равное количество руды.

12. Согласно бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей в конце первого и второго года, а также **целое** число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года, как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

13. Строительство нового завода стоит 220 млн рублей. Затраты на производство q тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5q^2 + q + 7$ млн рублей в год. Предполагается, что в первый год работы завода цена продукции p будет равна 9 тыс. рублей за единицу, а каждый следующий год будет увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода, если фирма максимизирует прибыль (разность между доходами и расходами), т.е. выпускает всегда столько продукции, чтобы прибыль была наибольшей. Считаем, что вся произведенная продукция находит спрос.

14. Зависимость объема q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены p (в рублей за шт.) выражается формулой $q = 15000 - p$,

где $1000 \leqslant p \leqslant 15000$. Затраты на производство q единиц товара составляют $3000q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей и увеличить прибыль, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

15. В городе N располагается единственный театр, зрительный зал которого способен вместить 400 человек. Изначально спрос на театральные представления описывался уравнением $q = 900 - p$, где q – количество проданных билетов, а p – цена билета. В условиях пандемии театру разрешили работать только при заполненности зала не более чем на 50%. Кроме того, в связи с пандемией спрос жителей на театральные представления снизился до $q = 360 - p$. Выясните, на сколько процентов следует снизить цену на билет в условиях пандемии, считая, что театр в любой ситуации максимизирует выручку.

16. Остров населён представителями двух племён, живущих охотой и собирательством. Племена потребляют мясо $(x : x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0)$ и плоды $(y : y \in \mathbf{R}, y \geqslant 0)$. Количества добываемых плодов и мяса связаны для этих племен уравнениями $y_1 = 4 - x_1^2$ и $y_2 = 2 - \dfrac{x_2^2}{8}$.

    (a) Какое максимальное количество плодов может быть собрано обоими племенами суммарно, если известно, что они вместе добыли 3 единицы мяса?

    (b) Какое максимальное количество плодов может быть собрано обоими племенами суммарно, если известно, что они вместе добыли 5 единиц мяса?

17. Функция издержек фирмы в условных денежных единицах в зависимости от количества выпускаемого товара q описывается зависимостью:

$$TC(q) = \begin{cases} 0{,}2q^2 + 10q + 20, q \leqslant 8, \\ 0{,}2q^2 + 100, q > 8. \end{cases}$$

Издержки, не зависящие от выпуска продукции (постоянные издержки), равны $TC(0)$. Считаем, что фирма всегда максимизирует прибыль, т.е. производит столько продукции, чтобы прибыль была максимальной, и что по рыночной цене вся продукция фирмы имеет сбыт. Выясните размер минимальной рыночной цены за единицу продукции в у.е., при котором фирма бы не несла убытков от выпуска продукции.

18. Максимизирующая прибыль авиакомпания обладает монопольным правом на авиаперевозки в определенном направлении и имеет дело с потенциальными потребителями двух типов: бизнесменами и туристами. В рамках маркетингового исследования авиакомпания установила, что бизнесменов среди ее потенциальных клиентов столько же, сколько и туристов, и что бизнесмены будут пользоваться ее услугами, если билет стоит не более 700 условных денежных единиц, а туристы – если билет стоит не более 300 у.е. Предположим, что издержки перевозки одного пассажира не зависят от количества пассажиров и равны 100 у.е. Пусть авиакомпания обладает совокупной информацией о категориях клиентов и их численности, но не имеет возможности предоставить различный уровень услуг клиентам из разных категорий и потому вынуждена назначить единую цену на билет. Какую цену за авиабилет установят?

19. Две фирмы, производящие один и тот же товар, решили объединиться. Известно, что до слияния функция издержек фирмы 1 на производство q_1 у.е. объёма продукции задавалась соотношением $TC_1(q_1) = q_1^2$, а аналогичные издержки фирмы 2 имели вид
$$TC_2(q_2) = \begin{cases} 0, q_2 = 0, \\ 6q_2 + 49, q > 0. \end{cases}$$
Выясните, при каком объёме выпуска $Q = q_1 + q_2$ объединенной компании будет выгоднее задействовать заводы обеих фирм по сравнению с заводом одной только фирмы 1.

20. Фирма A является единственным потребителем сырья определённого вида. Известно, что цена единицы продукции, производимой фирмой A, равна 2, а количество произведенного товара в

зависимости от количества использованного сырья z выражается формулой $F(z) = 12z - 0{,}5z^2$. Фирма B является единственным поставщиком сырья для фирмы А, и совокупные издержки фирмы В на его производство в количестве z единиц выражаются формулой $T(z) = z^2$. Информация о функциях $F(z)$ и $T(z)$ известна обеим фирмам, каждая из которых стремится максимизировать свою прибыль.

(a) Предположим, что фирма A выбирает цену единицы сырья, а затем фирма B, принимая эту цену как данную, решает, какое количество сырья она готова произвести и продать фирме A. Найдите цену сырья, максимизирующую прибыль фирмы А, и количество сырья, которое при этой цене продаст фирма B;

(b) Предположим теперь, что фирма B назначает цену сырья, а фирма A, принимая эту цену как данную, решает, сколько сырья она купит у фирмы B. Найдите цену, максимизирующую в этих условиях прибыль фирмы B, и количество сырья, которое приобретёт фирма A;

(c) Если фирмы объединятся, то как будет прибыль объединенной компании соотноситься с суммарной прибылью фирм в схемах (a) и (b)?

21. В стране ТУТ население умеет производить лишь два товара: x и y. Запас труда экономики, измеряемый человеко-часах, равен 75. Технология производства товара x задаётся функцией $q_x = (l_x/10)^2$, где l_x — количество человеко-часов, затраченных на производство товара, а q_x — объем его выпуска. Аналогично, технология производства товара y задаётся функцией $q_y = l_y$. Население страны потребляет оба товара в пропорции один к одному и при этом стремится максимизировать потребление подобных наборов, т.е. всегда потребляет все произведенные наборы. Известно также, что страна ТУТ не поддерживает торговые связи с другими государствами и не имеет возможности сбыть товары, не нашедшие спроса внутри страны.

22. Компания «Progressive stools» владеет тремя заводами по производству современных инновационных табуреток. Для каждого

из заводов в таблице приведена зависимость месячных издержек от количества q произведенных на нем за этот месяц табуреток:

Номер завода	Функция затрат
1	$TC_1(q_1) = 3q_1^2 - q_1 + 1432$
2	$TC_2(q_2) = 3q_2^2 + q_2 + 456$
3	$TC_3(q_3) = 3q_3^2 + 3q_3 + 123$

Даже если на каком-то заводе ничего не производится (т.е. $q = 0$), фирма несет фиксированные издержки, связанные с этим заводом. Выведите «общую» для фирмы функцию $TC(Q)$, которая показывает минимально возможные издержки фирмы на производство в общей сложности Q единиц продукции в месяц. При этом имейте в виду, что количество даже самых инновационных табуреток может выражаться только целым числом.

Ответы:

1. 6м x 7м.
2. 33.
3. 17.
4. 369.
5. 2530.
6. В конце 9-го года.
7. В начале 2024 года.
8. 30 тыс. рублей
9. 1500 рублей,
   2 250 000 рублей.
10. 8.
11. (a) На шахте A;
    (b) Где угодно.
12. 4 и 2 млн рублей.
13. За 5 лет.
14. 12,5%
15. На 64%.
16. (a) 5.
    (b) 3.
17. 8.
18. 700 у.е.
19. При $Q > 10$.

20. (a) 8 и 4.
    (b) 16 и 4.
    (c) Прибыль объединенной компании будет равна 72, т.е. больше суммарной прибыли фирм (64) в схемах (a) и (b).

21. (a) 25.
    (b) Потребление каждого товара увеличится на единицу.

22. $TC(Q) = Q^2 + Q + 2011$.

Указания и решения:

4. Поскольку суммарное время пребывания на даче фиксировано (4 дня), а ягод хочется собрать по максимуму, то носить песок нужно ставить в первую очередь тех, кто за время, потраченное на одно ведро песка, собирает меньше всего ягод. Альтернативная стоимость одного принесенного ведра песка, выраженная в количестве стаканов ягод, от сбора которых придется отказаться, для членов семьи составляет:

Отец	Мать	Дочь	Сын
$4/5 = 0{,}8$	$3/4 = 0{,}75$	$26/36 \approx 0{,}69$	$7/9 \approx 0{,}78$

Таким образом, сравнительное преимущество в переноске песка имеет дочь, которую и следует поставить на эту работу. За 4 дня дочь принесет 144 ведер песка. Чтобы выполнить необходимую норму в 300 ведер, дочери должна помочь мать, имеющая сравнительное преимущество в перенесении песка перед отцом и сыном. За 4 дня мать могла бы натаскать 168 ведер, но этого количества не требуется – матери придется принести только $300 - 144 = 156$ ведер. За оставшееся время мать соберет 9 стаканов ягод (если вместо переноски 1 ведра она может собрать 0,75 стакана, то вместо переноски 12 ведер – $0{,}75 \cdot 12 = 9$ стаканов). Ягод будет собрано: отец: $48 \cdot 4 = 192$ стакана; сын: $42 \cdot 4 = 168$ стаканов; мать: 9 стаканов. Итого: $192 + 168 + 9 = 369$ стаканов ягод.

17. Т.к. $TC(0) = 20$, то переменные издержки (т.е. связанные с выпуском продукции), описываются следующим образом:

$$VC(q) = \begin{cases} 0{,}2q^2 + 10q, q \leqslant 8, \\ 0{,}2q^2 + 80, q > 8. \end{cases}$$

В таком случае средние переменные издержки (т.е. переменные издержки на единицу продукции) выглядят так:

$$AVC(q) = \begin{cases} 0{,}2q + 10, q \leqslant 8, \\ 0{,}2q + \dfrac{80}{q}, q > 8, \end{cases}$$

и чтобы фирма не несла от производства убытков, как минимум такой же должна быть цена единицы товара p. Наименьшее значение функция $AVC(q)$ принимает при $q = 20$, соответственно, $p_{min} = AVC(20) = 8$.

19. Очевидно, что не имеет смысла открывать второй завод при $Q \leqslant 7$, т.к. в этом случае только расходы на его открытие (49) превосходят или равны затратам на выпуск всей продукции на заводе первом. Если при $Q > 7$ объединенная фирма открывает второй завод (т.е. выбирает $q_2 > 0$), то задача минимизации расходов за счёт выбора q_2 будет выглядеть как

$$(Q - q_2)^2 + 6q_2 + 49 \to min.$$

Минимум достигается при $q_2^* = Q - 3$, и тогда издержки производства на обоих заводах одновременно будут равны

$$3^2 + 6(Q - 3) + 49 = 6Q + 40.$$

Если же второй завод не открывать, то издержки составят Q^2. Очевидно, что имеет смысл открывать второй завод, если $6Q + 40 < Q^2$. Отсюда $Q > 10$.

20. (a) Прибыль, которую получает фирма B при продаже z единиц сырья по цене p равна $pz - z^2$. Максимума эта величина достигает при $z = \dfrac{p}{2}$.

Следовательно, предложение фирмы B при назначаемой фирмой A цене выглядит как $z(p) = \dfrac{p}{2}$. Тогда прибыль фирмы A от продажи произведенного ею товара будет равна $2\left(12\cdot\dfrac{p}{2} - 0{,}5\cdot\left(\dfrac{p}{2}\right)^2\right) - p\cdot\dfrac{p}{2} = 12p - 0{,}75p^2$.
Эта функция достигает своего наибольшего значения при $p = 8$, и тогда $z(8) = 4$.

(b) Решается аналогично.

(c) Для интегрированной компании прибыль вычисляется про формуле $24z - 2z^2$.

21. (a) Поскольку $l_x = 10\sqrt{q_x}$ и $l_y = q_y$, а совокупный запас труда в экономике равен 75, то

$$10\sqrt{q_x} + q_y = 75.$$

Т.к. население стремится максимизировать количество наборов, включающих по единице каждого товара, то $q_x = q_y$. Отсюда $q_x = 75 - 10\sqrt{q_x}$. Обозначив $\sqrt{q_x} = a \geqslant 0$, получим уравнение

$$a^2 + 10a - 75 = 0,$$

которое имеет один положительный корень $a = 5$. Таким образом $q_x = q_y = 25$.

(b) При использовании технологии страны ТАМ имеем $0{,}5q_x + q_y = 75 - 36 = 39$, откуда $q_y = 39 - 0{,}5q_x$. Поскольку стране ТУТ доступна как её собственная технология товара x, так и альтернативная, то

$$q_y = \max\left\{F(q_x) = 39 - 0{,}5q_x; G(q_x) = 75 - 10\sqrt{q_x}\right\}.$$

Выясним, где $F(q_x) = G(q_x)$. Обозначая $\sqrt{q_x} = a \geqslant 0$, получим уравнение $a^2 - 20a + 72 = 0$, которое имеет корни $a_{1,2} = 10 \pm \sqrt{28}$. Поскольку $a_2 = 10 + \sqrt{28} > 7{,}5$ и, соответственно, $G(a_2^2) = 75 - 10a_2 < 0$, то остаётся только значение $a_1 = 10 - \sqrt{28}$.
При $a \leqslant a_1$ разность $F(a^2) - G(a^2) = a^2 - 20a + 72 \leqslant 0$,

а при $a > a_1$ разность $F(a^2) - G(a^2) = a^2 - 20a + 72 > 0$. Следовательно,

$$q_y = \begin{cases} 75 - 10\sqrt{q_x}, q_x \leqslant \left(10 - \sqrt{28}\right)^2, \\ 39 - 0{,}5q_x, \left(10 - \sqrt{28}\right)^2 < q_x \leqslant 78. \end{cases}$$

Заметим, что $\left(10 - \sqrt{28}\right)^2 < 5^2 = 25$, следовательно, новое значение $q_x = q_y$, характеризующее потребление товаров в стране, нужно искать как корень уравнения

$$q_x = 39 - 0{,}5q_x.$$

Следовательно, $q_y = q_x = 26$, т.е. потребление каждого товара вырастет на единицу.

22. Найти для каждого завода стоимость производства q-й по счёту табуретки как разность $TC_i(q_i) - TC_i(q_i - 1)$, а затем вычислить стоимость выпуска Q табуреток последовательно (1-я, 2-я,…,Q-я), выбирая для производства каждой из них тот завод, на котором производство табуретки с соответствующим порядковым номером наименее затратно. При этом помнить, что порядковый номер табуретки в общей последовательности и в последовательности того завода, где она будет производиться, в результате могут не совпадать! Т.е. если, допустим, первая табуретка общей последовательности была произведена на 3-м заводе, а вторая общей последовательности - на 2-м, то для второго завода это **первая(!)** табуретка.

Задачи для решения дома

1. Необходимо произвести отделку здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, объемом 432 куб.м. Отделка стены здания, примыкающей к соседнему строению, обходится в 1000 рублей за кв.м. Отделка трех фасадных стен обходится в 2000 рублей за квадратный метр. А заливка крыши, форма которой является квадратом, обходится в 7000 рублей за кв.м. Найдите размеры здания, отделочные работы которого при данных условиях являются наименьшими по стоимости.

2. Требуется перевезти большое количество контейнеров весом 130 кг и 110 кг, для чего выделены машины грузоподъёмностью 2 тонны каждая. Можно ли загрузить такими контейнерами машину полностью? Если да, то укажите все варианты загрузки.

3. Андрей должен купить сувенирных пряников для подарков участникам конференции. На фабрике ему предложили пряники с шоколадной начинкой и с черничной. Шоколадные пряники стоят 200 рублей за штуку и продаются коробками по 12 штук. А пряники с черникой стоят 180 рублей за штуку и продаются коробками по 16 штук. Какой наименьшей суммы хватит Андрею, если ему нужно не менее 200 пряников?

4. Василий купил на 134 000 рублей 100 акций трёх разных компаний: «Альфа» по 1500 р., «Бета» по 1200 р. и «Гамма» по 1250 р. за штуку. Какое максимальное количество акций компании «Гамма» мог купить Василий?

5. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 кв.м и номера «люкс» площадью 45 кв.м. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 кв.м. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2200 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

6. Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. Себестоимость 1 центнера продукции в стеклянной таре составляет 1500 рублей, а отпускная цена - 2100 рублей Для продукции в жестяной таре себестоимость и отпускная цена равны, соответственно, 1100 рублей и 1750 рублей Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день. (Прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

7. Сельскохозяйственное предприятие «Фруктовый рай» выращивает четыре вида фруктов: ананасы, бананы, виноград и груши. Ниже приведена таблица с информацией об их ценах и затратах на производство:

	Ананасы	Бананы	Виноград	Груши
Цена за 1 кг	100	60	200	140
Выпуск в кг	1000	20000	4000	8000
Издержки на кг:				
Заработная плата	30	10	50	30
Техника	10	5	30	20
Аренда поля*	20	30	50	40

*Аренда целого поля относится к постоянными, т.е. не зависящим от выпуска продукции, издержкам. Расходы на аренду распределены по видам фруктов, исходя из площади, которую они занимают при выращивании.

Предположим, компания может поставлять на рынок фрукты последовательно.

(a) Какой фрукт следует стремиться продать в первую очередь, если целью компании всегда является максимизация прибыли?

(b) Сколько разных видов фруктов поставит компания, прежде чем получит положительную прибыль?

(c) Какую прибыль получит компания после продажи всех произведенных фруктов?

8. Фирма по производству мебели выпускает две модели спальных гарнитуров – A и B. Их производство ограничено наличием сырья (качественных досок) и временем машинной обработки. Для изготовления гарнитура модели A требуется 24 кв.м досок и 5 часов машинного времени, а для модели B – 40 кв.м досок и 11 часов машинного времени. Фирма может получить от поставщика до 600 кв.м досок в неделю. Возможное время работы машин, имеющихся в распоряжении фирмы, составляет 140 часов в неделю. Изготовление гарнитура модели A приносит фирме 5000 рублей дохода, а модели B – 9000 рублей дохода. Сколько гарнитуров каждой модели следует выпускать фирме в неделю, чтобы прибыль фирмы была как можно больше?

9. В январе 2020 года процентная ставка по депозитам в банке составила $x\%$ годовых, а в январе 2021 года – $y\%$ годовых. Вкладчик положил на счет в этом банке в январе 2020 года некоторую сумму денег. В январе 2021 года, спустя год после открытия счета, он снял со счета пятую часть от той суммы, которую положил в 2020 году. Найдите значение x, при котором сумма на счете в январе 2022 года будет наибольшей, если известно, что $x+y=30$.

10. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года с номером t (t=1; 2; 3;...). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в такой момент, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?

11. Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S = 1{,}1S_0 + 2000$, где S_0 — цена ценной бумаги на начало го-

да в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а так же снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тысяч рублей, которые он может положить на банковский счёт, или на которые он может приобрести ценную бумагу. Какая наибольшая сумма в рублях может быть у Максима через четыре года?

12. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия от цены p (тыс. рублей) задаётся формулой $q = 280 - 2p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. рублей) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите цену, при которой месячная выручка $r(p)$ будет наибольшей и найдите эту выручку.

13. Два автомобиля равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к крестообразному перекрестку этих дорог. Первый автомобиль движется со скоростью 60 км/ч и в начальный момент времени находится на расстоянии 30 км от перекрестка, а второй движется со скоростью 90 км/ч и в начальный момент времени находится на расстоянии 110 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между автомобилями будет наименьшим?

14. В офисном строении 8 этажей, на каждом из которых, кроме первого, находится кабинет начальника отдела. Управляющая жилищная компания объявила, что в день профилактического ремонта лифта он сделает всего один подъем сразу всех начальников отделов на один, указанный ими этаж. После подъема начальники будут вынуждены идти в свои кабинеты по лестнице. В качестве компенсации за причиненные неудобства за каждый необходимый подъем на очередной этаж по лестнице каждому начальнику будет начислено 200 рублей. За каждый аналогичный спуск – 100 рублей. Этаж выбирается так, чтобы общая сумма компенсаций была минимальной. Определите в рублях эту сумму.

15. Графики функций q_1 и q_2, определяющих величину спроса и предложения в зависимости от цены товара, представляют собой отрезки прямых линий. Известно, что $q_1(40) - q_2(40) = 30$, и $q_2(60) - q_1(60) = 20$. Найдите равновесную цену.

16. Шахты A и B соединены прямолинейной дорогой длиной 60 км. На шахте A добывается 400 т руды в сутки, на шахте B — 100 т руды в сутки. Затраты на перевозку каждой тонны руды с шахты A прямо пропорциональны пройденному расстоянию в км, а с шахты B - квадрату пройденного расстояния в км с тем же коэффициентом пропорциональности. Выясните, где нужно построить завод по переработке руды, чтобы затраты на её перевозку были наименьшим.

17. Согласно бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 млн рублей, а за четыре года станут больше 170 млн рублей.

18. В строительство нового завода вложено 132 млн рублей. Затраты на производство q тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5q^2 + 5q + 17$ млн рублей в год. По окончании строительства завода фирма будет максимизировать прибыль, т.е. выпускать столько продукции, чтобы прибыль (разность между доходами и расходами) была наибольшей. Считая, что вся продукция фирмы находит спрос, выясните, при каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 4 года?

19. Зависимость количества q (в шт., $0 \leqslant q \leqslant 20000$) купленного у фирмы товара от цены p (в рублях за шт.) выражается формулой $q = 20000 - p$. Затраты на производство q единиц товара составляют $6000q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с

каждой произведённой единицы товара. При каком значении t сумма налогов, уплаченных фирмой государству, будет максимальной?

20. В королевстве N каждый предприниматель должен приобрести у короля лицензию, дающую право на ведение собственного бизнеса. Лицензии выдает специальный чиновник, назначенный королем. Чиновник, осознав свое исключительное положение, начал в дополнение к официальной плате, которая составляет 20 у.е. за одну лицензию, брать взятки за каждую выданную лицензию, причем размер взятки одинаков для всех предпринимателей. Выдача одной лицензии сопряжена для чиновника с издержками, равными 10 у.е. Чиновник получает фиксированное жалование в 50 у.е. и, кроме того, ему выплачивается компенсация в 10 у.е. за каждую лицензию, плата за которую поступила в королевскую казну. Пусть спрос на лицензии задается функцией $q = 100 - p$, где p – цена лицензии, включая взятку. Спрос на лицензии королю неизвестен.

    (a) Предположим, что король может проверить, сколько лицензий в действительности выдал чиновник. Соответственно, вся официальная плата за выданные лицензии должна поступать в казну, так как любая недостача будет автоматически взыскана с чиновника и, кроме того, он будет лишен жалования. Какой размер взятки назначит чиновник в этих условиях, чтобы выигрыш от его деятельности был наибольшим? Какова величина этого выигрыша?

    (b) Предположим теперь, что король не может узнать, сколько в действительности было выдано лицензий. Найдите оптимальный размер взятки и выигрыш чиновника в новой ситуации.

21. Максимизирующая прибыль авиакомпания обладает монопольным правом на авиаперевозки в определенном направлении. В рамках маркетингового исследования авиакомпания установила, что потенциальными пользователями её услуг являются n категорий пассажиров равной численности, причем каждый пассажир категории i ($i = 1,2,\ldots,n$) готов заплатить за авиабилет не

более чем $300 + 20(i - 1)$ у.е. Предположим, что издержки перевозки одного пассажира не зависят от количества пассажиров и равны 100 у.е. Пусть авиакомпания обладает совокупной информацией о категориях клиентов и их численности, но не имеет возможности предоставить различный уровень услуг клиентам из разных категорий и потому вынуждена назначить единую цену на билет. Какую цену за авиабилет установят?

Ответы:

1. 6м x 6м x 12м.
2. 12 контейнеров по 130 кг и 4 контейнера по 110 кг или 1 контейнер по 130 кг и 17 контейнеров по 110 кг.
3. 36 480 рублей.
4. 5.
5. 86 600 рублей.
6. 53 500 рублей.
7. (a) Виноград.
   (b) Два вида.
   (c) 1 020 000 рублей.
8. A– 20 шт., B –3 шт.
9. 20.
10. $\dfrac{1}{11} < r < \dfrac{1}{10}$.
11. 126 694,4.
12. 70 тыс. рублей, 9 800 тыс. рублей.
13. Через 60 мин.
14. 1600.
15. 52.
16. На расстоянии 2 км от шахты B.
17. 41 млн рублей.
18. При $p = 15$.
19. 7000.
20. (a) 40 у.е.; 1650 у.е.
    (b) 35 у.е.; 1675 у.е.
21. При $n \leqslant 10$ цена билета p будет равна 300 у.е.; при чётных $n > 10$ $p = 200+10n$; при нечётных $n > 10$ $p_1 = 210+10n$ и $p_2 = 190+10n$.

Задачи 19 ЕГЭ.

Задачи для решения в классе

1. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

   а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

   б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

   в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

2. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

   а) На доске выписан набор -11, -7, -5, -4, -1, 2, 6. Какие числа были задуманы?

   б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

   в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

3. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд

так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько человек в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

4. В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают самолеты поездам (число 58 получено в результате округления). Из этого же опроса следовало, что примерно 42% опрошенных не летали на самолете за прошедший год.

   а) Могло ли участвовать в опросе ровно 40 человек?

   б) Могло ли участвовать в опросе ровно 48 человек?

   в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

5. Пусть q – наименьшее общее кратное, а d – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

   а) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 170?

   б) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 2?

   в) Найдите наименьшее значение $\dfrac{q}{d}$?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

   а) Сколько чисел написано на доске?

   б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

   в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий ее член и снова вычислил такую же разность.

   а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

   б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия изначально состоять из 13 членов?

   в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый. Какое наибольшее число членов могло быть в прогрессии изначально?

8. Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

   а) Может ли в результате получиться 0?

   б) Может ли в результате получиться 1?

   в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

9. На доске написано число 8. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д.).

   а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

   б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 72?

   в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 832?

10. Натуральные числа от 1 до 20 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

    а) Может ли в результате получиться 0?

    б) Может ли в результате получиться 1?

    в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

11. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 1485. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

    а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

    б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 9 раза меньше, чем сумма исходных чисел?

    в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

12. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

    а) пять;

    б) четыре;

    в) три

    из них образуют геометрическую прогрессию?

13. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков

было не более $\dfrac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

14. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причем каждый играет с каждым дважды.

    а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 2$, $d = 2$?

    б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$?

    в) Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

15. Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

    а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 89?

    б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 86?

    в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

16. Известно, что a, b, c, и d – попарно различные положительные двузначные числа.

    а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ если $a > 5b$ и $c > 8d$?

17. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стерли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

18. На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1009 чисел?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

19. Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Ответы:

1. а) Например, 2, 4, 4;
   б) Нет;
   в) 7, 8, 8, 8, 10
   или 7, 8, 10, 16.

2. а) -7, -4, 6;
   б) 5;
   в) Нет.

3. а) Например, 50 и 60;
   б) Нет;
   в) 108 и 110.

4. а) Нет;
   б) Да;
   в) 12.

5. а) Да;
   б) Нет)
   в) 4.

6. а) 44;
   б) Отрицательных;
   в) 17.

7. а) 2, 3;
   б) Нет;
   в) 8.

8. а) Нет;
   б) Нет;
   в) 4.

9. а) Нет;
   б) Да;
   в) 8 минут.

10. а) Нет;
    б) Нет;
    в) 4.

11. а) 15 чисел 91 и 5 чисел 24;
    б) Нет;
    в) 396.

12. а) Нет;
    б) Нет;
    в) Да.

13. а) Да;
    б) 9;
    в) $\dfrac{9}{17}$.

14. а) 14;
    б) 90;
    в) 1.

15. а) Да;
    б) Нет;
    в) 91.

16. а) Да, например, $a = 11$, $b = 30$, $c = 16$, $d = 39$;
    б) Нет;
    в) $\dfrac{177}{29}$.

17. а) Да;
    б) Нет;
    в) $38\dfrac{1}{7}$.

18. а) Да. Например:
    1, 2, 3, 5, 7, ..., 2015;
    б) Да. Например:
    1, 2, 3, 5, 2015;
    в) 4.

19. а) Нет;
    б) Нет;
    в) 10.

Задачи для решения дома

1. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

   а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

   б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

   в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

2. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

   а) На доске выписан набор -6, -2, 1, 4, 5, 7, 11. Какие числа были задуманы?

   б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

   в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

3. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат большее

7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько человек в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

4. В результате опроса выяснилось, что примерно 47% опрошенных предпочитают кофе чаю (число 47 получено с помощью округления до ближайшего целого числа).

а) Могло ли участвовать в опросе ровно 28 человек?

б) Могло ли участвовать в опросе менее 28 человек?

в) Какое наименьшее число человек могло участвовать в опросе?

5. Пусть q – наименьшее общее кратное, а d – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\dfrac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\dfrac{q}{d}$?

6. На доске написано более 42, но менее 56 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 4, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

7. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий ее член и снова вычислил такую же разность.

   а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

   б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия изначально состоять из 12 членов?

   в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый. Какое наибольшее число членов могло быть в прогрессии изначально?

8. Каждое из чисел -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19 по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел -11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

   а) Может ли в результате получиться 0?

   б) Может ли в результате получиться 117?

   в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

9. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д.).

   а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

   б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

   в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

10. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

    а) Может ли в результате получиться 0?

    б) Может ли в результате получиться 1?

    в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

11. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

    а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

    б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

    в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

12. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

    а) пять;

    б) четыре;

    в) три

    из них образуют геометрическую прогрессию?

13. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков

было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

14. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причем каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 5$, $d = 3$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 9$?

в) Каковы все возможные значения d, если $m = 9d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 4 раза больше очков, чем девочки?

15. Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

16. Известно, что a, b, c, и d – попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ если $a > 3b$ и $c > 6d$?

17. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанных на доске заменяется на два числа: $a+b$ и $2a-1$ или $a+b$ и $2b-1$.

Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5, соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100.

в) Сделали 2021 ход, причем на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

18. Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5.

Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

19. На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округленная до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Ответы:

1. а) Например, 1, 1, 2, 3;
   б) Нет;
   в) 7, 7, 7, 9, 11
   или 7, 9, 11, 14.

2. а) −6, 4, 7;
   б) 5;
   в) Нет.

3. а) Например, 54 и 63;
   б) Нет;
   в) 117 и 119.

4. а) Нет;
   б) Да;
   в) 15.

5. а) Да;
   б) Нет;
   в) 5.

6. а) 49;
   б) Положительных;
   в) 22.

7. а) 1, 2, 3;
   б) Нет;
   в) 8.

8. а) Нет;
   б) Нет;
   в) 4.

9. а) Нет;
   б) Да;
   в) 8 минут.

10. а) Нет;
    б) Нет;
    в) 4.

11. а) 17 и 16;
    б) Нет;
    в) 1650.

12. а) Нет;
    б) Нет;
    в) Да.

13. а) Да;
    б) 10;
    в) $\dfrac{9}{19}$.

14. а) 36;
    б) 72;
    в) 1.

15. а) Да;
    б) Нет;
    в) 91.

16. а) Да, например:
    $a = 10$, $b = 20$, $c = 11$, $d = 37$;
    б) Нет;
    в) $\dfrac{79}{21}$.

17. а) $(2,3)$, $(5,5)$, $(10,9)$, $(19,17)$;
    б) Нет;
    в) 2.

18. а) Да;
    б) Нет.

19. а) например:
    0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01
    и любая последовательность ходов;
    б) Нет;
    в) 5.