ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЗАНЯТИЯ

Тема занятия: Функции математического анализа

Аннотация к занятию: обучающиеся познакомятся с числом Эйлера и показательной функцией, основанием которой оно является. Изучат график экспоненты, разберут её свойства и обсудят пределы функций и последовательностей. Поговорят о логарифмах. Узнают их определение, посмотрят на графики и докажут важные свойства. Подробно обсудят непрерывность функций, познакомятся с определениями и примерами экстремумов и свойством монотонности функций.

Цель занятия: расширение представлений обучающихся о функциях математического анализа. Знакомство с экспонентой, числом Эйлера, логарифмами.

Задачи занятия:
- познакомить обучающихся с экспонентой и числом Эйлера;
- сформировать понятие логарифма, его графика и свойств;
- рассмотреть непрерывность функций;
- познакомить с определениями и примерами экстремумов и свойством монотонности функций.

Ход занятия

Этап занятия	Время	Деятельность педагога	Комментарии, рекомендации для педагогов
Организационный этап	2 мин.	Добрый день, ребята! Очень рада вас видеть на уроке	Приветствие. Создание в классе атмосферы психологического комфорта.
Постановка цели и задач занятия. Мотивация учебной деятельности обучающихся	5 мин.	**Вопрос для обсуждения:** Внимательно прочитайте тему урока. Какое ключевое слово темы? **Ответ обучающихся:** функции. Верно, сегодня мы поговорим о числе Эйлера, экспоненте, её графике и свойствах. **Вопрос для обсуждения:** Чему вы сегодня научитесь? **Возможные ответы школьников:** • узнаем, что такое экспонента и число Эйлера; • узнаем о логарифме; • познакомимся со свойствами функций.	Способствовать обсуждению мотивационных вопросов.

Изучение нового материала	50 мин.	**Вопрос для обсуждения.** Кто может сказать, что такое экспонента? **Возможные ответы школьников.** Экспонента — это функция e^x, то есть функция, значение которой совпадает со значением некоего числа e, возведённого в степень x. Что же это за волшебное число e? Это число называется числом Эйлера и, как и другая математическая константа, число Пи, оно является иррациональным и играет в математике важную роль. Мы могли бы определить число Эйлера как константу, равную 2,718281828459045. Цифры после запятой можно запомнить следующим образом: <<семь, дважды год рождения Льва Николаевича Толстого, то есть 1828, углы прямоугольного равнобедренного треугольника, то есть 45, 90 и 45>>. Однако такое определение не поможет нам понять, как это число было получено и как оно устроено. Рассмотрим такую ситуацию. У нас есть один биткоин. Наша майнинговая ферма устроена так, что каждый год количество биткоинов удваивается. Через год у нас будет 2 биткоина, то есть за первый год мы заработали один биткоин. Через два года у нас будет уже 4 биткоина, через три — 8, и так далее. Каждый год количество биткоинов удваивается: через x лет количество биткоинов будет равно 2^x. Иначе это можно записать как $(1 + 1)^x$. Рост в два раза за год — это рост на 100%. Как вычислить баланс счёта, если каждый год количество биткоинов увеличивается на 50%, а не на 100%? Почти так же.	Активные действия учащихся с объёмом изучения. Вызов познавательного интереса к предмету. Для справки: Букву e начал испол ьзовать Эйлер в 172 7 году, а первой публикацией с этой буквой была его работа «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» 1736 года. Соответственно, e обычно называют числом Эйлера.

Рост на 50% — это рост в 1,5 раза за год. Значит, после первого года у нас было бы 1,5 биткоина, то есть мы бы заработали за год 0,5 биткоина. Ещё через год 1,5 биткоина умножились бы на 1,5, то есть у нас стало бы 2,25 биткоина. И так далее. Следовательно, через x лет у нас было бы $1{,}5^x$ биткоинов или $(1 + 0{,}5)^x$. В обоих случаях мы получили формулу $(1 + \text{прирост за год})^x$.

Вернёмся к ситуации, когда за год мы удваивали количество биткоинов. Теперь мы будем накапливать один целый биткоин частями. По истечении первой половины года наш счёт пополнится на 50%, а по истечении следующих шести месяцев — на 50% от суммы, которая будет на счету после первых шести месяцев. Таким образом, мы, имея в начале один биткоин, получим в конце года ещё один. На самом деле мы получим больше. После первого пополнения у нас на счету будет 1,5 биткоина, а после следующего — 1,5 × 1,5, то есть 2,25 биткоина. Таким образом, за год мы заработаем столько же, сколько за два года при увеличении на 50%.

Вопрос для обсуждения.
Что если получать не половину процентов за полгода, а треть за каждые четыре месяца?

Ответы школьников:
Тогда после первой трети года у нас будет 1,33 биткоина, потом — 1,33 × 1,33, а в конце года ещё в 1,33 раза больше. В таком случае баланс счёта на конец года можно вычислить по формуле $(1 + 0{,}33)^3$, так как у нас есть три периода увеличения баланса, и каждый раз он увеличивается на треть от текущего состояния. Мы пишем 0,33 для удобства: правильнее было бы написать 1/3, потому что мы делим 100% прибыли, обещанной нам за год, на

три части, и раз в четыре месяца увеличиваем имеющийся баланс на это число процентов.

В общем виде, если мы будем получать 100%/n баланса после того, как пройдёт 1/n года, к концу года у нас будет $(1 + 1/n)^n$ биткоинов. Давайте посмотрим на таблицу значений этого выражения при разных n.

Видно, чем больше n, тем ближе мы к числу Эйлера. Таким образом, число Эйлера — это предел последовательности $(1 + 1/n)^n$. Его можно записать как $_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Мы не будем давать строгое определение предела последовательности, но поговорим об идее этого понятия и его свойствах.

Предел — это значение, к которому мы можем подобраться сколь угодно близко, причём неважно, с какой стороны. Рассмотрим это на примере.

Как видно, график функции постепенно приближается к оси t, но при этом он всё время то выше, то ниже её, что не мешает ему «стабилизироваться».

Заметим, что, говоря о числе Эйлера, мы размышляли о пределе последовательности, а сейчас — о пределе функции. Если говорить о строгих определениях, то разница между ними есть. Сейчас же мы говорим об этих определениях на интуитивном, понятийном уровне, поэтому смысл у них общий: если мы сколь угодно близко подбираемся к какому-то значению, то это значение является пределом. При этом за наше приближение к пределу всегда отвечает некоторый параметр. В случае последовательностей номер члена последовательности стремится к бесконечности, а в случае функций аргумент функции устремляется к какому-то значению. Предел последовательности a_n обозначается $_{n\to\infty}\, a_n$, а предел функции f(x) при x стремящемся к x_0 как $_{x\to x_0}\, f(x)$ или $f(x)\, x{-}{>}\, x_0 \to A$, где A — значение предела функции, а x_0 может быть как числом, так и плюс или минус бесконечностью.

Поговорим о свойствах пределов функций. Мы не ввели строгих определений, поэтому не будем доказывать свойства строго, но поговорим о причинах, почему эти свойства должны выполняться.

1. Существует только один предел.
   Действительно, было бы странно, если бы функция могла одновременно подбираться к нескольким значениям.

2. Если $f(x) \le g(x)$ и $f\,(x) = A$, а $g\,(x) = B$, то $A \le B$.
   Логично, что если функция g в окрестности точки x_0 не меньше f, то и значение, к которому g может подобраться сколь угодно близко, будет не меньше значения, к которому может подобраться f. Если f(x) < g(x), то знак между A и B всё ещё не строгий. Например, у функций x^2 и $|x|$ пределы в нуле совпадают, но при этом $|x| > x^2$ при значениях, близких к нулю.

3. Пределы суммы, разности, произведения и частного равны сумме, разности, произведению и частному пределов.
   Логично, что если мы прибавили или вычли из функции, подбирающейся близко к A, функцию, подбирающуюся близко к B, то получится функция, подбирающаяся близко к A + B или A − B. В случае деления, предел делителя не должен быть равен нулю.

4. Если $f(x) = A$ и $g(y) = B$, то $g\left(f(x)\right) = B$.
   Достаточно подставить в предел g(y) вместо y функцию f(x), и получится желаемое.

Пределы пригодятся нам в этом курсе, а пока вернёмся к экспоненте.

Напомню, что экспонентой называется показательная функция e^x. Экспонента является показательной функцией, поэтому обладает следующими свойствами:

1. $e^0 = 1$

Как и в других показательных функциях, при возведении в нулевую степень получается единица.

2. $e^x e^y = e^{x+y}$

При перемножении степеней получается степень с показателем, равным сумме показателей. Важно не путать это свойство и следующее.

3. $(e^x)^y = e^{xy}$

Для получения произведения показателей необходимо не перемножать две степени числа Эйлера, а возвести экспоненту в соответствующую степень.
Теперь посмотрим на график экспоненты.

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Для вычисления приблизительного значения экспоненты можно вычислить значение этой суммы. Подобные бесконечные суммы есть для всех функций, обладающих производной. О том, что такое производная и зачем она нужна,

		мы поговорим в другом модуле, а пока взглянем на график экспоненты. Как мы видим, значение экспоненты всё время увеличивается, то есть, чем больше аргумент функции, тем больше её значение. Заметим также, что экспонента растёт очень быстро. Для сравнения изобразим графики функций 2^x и 4^x. Здесь зелёным цветом показан график функции 4^x, синим — график экспоненты, а красным — 2^x. Нетрудно заметить, что они ведут себя примерно одинаково и отличаются лишь скоростью роста. Пришло время поговорить о логарифмах. Дадим строгое определение. Логарифмом числа x по основанию a называется такое число y, что $a^y = x$. Соответственно, логарифмированием называется операция, когда вместо числа записывается его показатель по некоторому основанию. Логарифм числа x по основанию a обозначается $\log_a x$. Отметим, что a и x — положительные числа, и a при этом не равняется единице. Понятно, что если a равно единице, то логарифм ни у какого числа, отличного от единицы, определить бы не удалось. Впрочем, как и логарифм единицы, ведь у него было бы бесконечно много вариантов значения. Положительность x следует из положительности a, потому как в какую бы степень мы ни возвели положительное число, результат будет положительным. **Вопрос для рассуждения:** Почему основание логарифма должно быть положительным, ведь мы умеем возводить в степень и отрицательные числа?	Для справки: https://www.calc.ru/Ponyatiye-Logarifma.html

Для ответа на этот вопрос важно понять, как определяются степени с иррациональными показателями. Разберём это на примере степеней числа два.

Изобразим на графике значения некоторых степеней двойки с рациональными показателями. У нас получились отдельные точки, но видно, что они расположены очень плотно, вырисовывается определённая линия. Если мы отметим все степени двойки с рациональными показателями, то точки будут располагаться очень плотно, но между ними всё ещё будут «ямки». Они будут в тех местах, где должны стоять значения степеней с иррациональными показателями. Чтобы заполнить «ямки» какими-то значениями, будем рисовать график функции 2^x как непрерывную линию, проходящую через уже отмеченные точки. Тогда из-за того, что точки расположены очень плотно, значение в каждой ямке будет определяться однозначно.

Данное свойство называется непрерывностью.
Его можно сформулировать следующим образом: непрерывной называется функция, которая меняется без мгновенных «скачков».
Безусловно, это нестрогое доказательство. Однако временные ограничения не позволяют нам привести строгое рассуждение.

Воспользуемся определением и вычислим $\log_3 81$ и $\log_{1/3} 27$. Для вычисления первого логарифма достаточно вспомнить, что $3^4 = 81$. Тогда $\log_3 81 = 4$. Для вычисления второго логарифма нужно проделать чуть больше рассуждений. Во-первых, $3^3 = 27$. Во-вторых, $3^{-1} = 1/3$. Значит, $3 = (1/3)^{-1}$. Следовательно, $3^3 = (1/3)^{-3}$. Таким образом, $\log_{1/3} 27 = -3$.

		Только что мы обсудили, как устроены показательные функции, и дали определение логарифма. Перейдём к изучению его графика и свойств. Выразим x из равенства $y = \log_a x$, получим $x = a^y$. Заметьте, что мы получили показательную функцию, в которой x и y поменялись местами, поэтому график такой функции будет симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, ведь чтобы поменять местами оси OY и OX, необходимо сделать симметрию относительно прямой $y = x$. Значит, график логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно прямой $y = x$. Показательная функция ведёт себя по-разному в зависимости от того, больше или меньше 1 основание степени, поэтому изобразим графики для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$. Посмотрев на графики, мы можем выделить несколько свойств. ● Функция $y = \log_a x$ определена и непрерывна на множестве положительных чисел. ● Область значений функции $y = \log_a x$ — множество действительных чисел. ● При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей; при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей. ● График функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1, 0). ● Ось ординат — вертикальная асимптота графика функции $y = \log_a x$, то есть значение функции стремится к плюс или минус бесконечности при стремлении x к нулю. Поговорим о других свойствах логарифма. Первое свойство логарифма следует из его определения: $a^{\log_a x} = x$.	

Это выражение называется основным логарифмическим тождеством.
Упомяну несколько очевидных свойств: $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$.
Чтобы вывести некоторые свойства логарифма, воспользуемся свойствами возведения в степень. Рассмотрим произведение степеней с одинаковым основанием: $a^x a^y$. Пусть $a^x = b$ и $a^y = c$. Используя обозначение логарифма, можем переписать это как $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$. Тогда $bc = a^x a^y = a^{x+y}$. Значит, $\log_a bc = x + y = \log_a b + \log_a c$. Следовательно, логарифм произведения — это сумма логарифмов.

По той же логике получаем свойство для логарифма частного: $\log_a b / c = \log_a b - \log_a c$.

Логарифмы напрямую связаны с возведением в степень. Что же будет с логарифмом, если возвести в степень число, логарифм которого мы вычисляем? То есть, чему равен $\log_a b^k$? Пусть $b = a^x$. Тогда $b^k = (a^x)^k = a^{xk}$. Отсюда следует, что $\log_a b^k = xk$. При этом $\log_a b = x$, поэтому $\log_a b^k = k \log_a b$. Аналогично доказывается, что $\log_a \sqrt[k]{b} = \log_a b / k$.

До этого свойства касались изменений в аргументе, но не в основании логарифма. Если возвести в степень не число b, а число a, то ситуация получится обратной. Пусть, как и раньше, $b = a^x$. Тогда $b = (a^k)^{x/k}$. Значит, $\log_{a^k} b = x / k = \log_a b / k$.
Соответственно, если из основания степени извлечь корень, логарифм нужно будет умножить на соответствующее число:
$\log_{\sqrt[k]{a}} b = kb$

Все логарифмы устроены похожим образом, что видно не только из определения и свойств, но и, например, из графиков.

Как же связаны между собой логарифмы с разными основаниями? Иными словами, как, зная логарифм по одному основанию, получить логарифм по другому?

Пусть $y = a^x$. Пусть также $b = a^z$, то есть $b^{1/z} = a$. Тогда $y = (b^{1/z})^x = b^{x/z}$. Значит, $\log_b y = x/z = \log_a y / \log_a b$.

Это свойство можно запомнить следующим образом. Основание логарифма всегда пишется небольшим размером снизу, поэтому каждую запись $\log_a x$ можно воспринимать как x/a. Если мы подставим вместо каждого из логарифмов соответствующие дроби, то получим выражение $y/b = y/a : b/a$, то есть $y/b = y/a * a/b$. Последнее равенство является верным и, если вы забыли порядок букв в правой части свойства, то с помощью такого приёма его можно восстановить.
Подставим $y = a$ в последнее свойство и получим, что $\log_b a = \log_a a / \log_a b = 1 / \log_a b$. Это последнее свойство, которое мы сегодня обсудили.

Теперь поговорим о том, какие основания логарифмов встречаются чаще других.

Благодаря двум последним свойствам, мы можем выбрать основания, с которыми нам проще и удобнее работать, и использовать их как можно чаще.

- При работе с компьютерами мы часто сталкиваемся с двоичной системой счисления, поэтому логично, что одним из важных оснований является число два.
- Также естественно было бы использовать в качестве основания число 10, ведь мы пользуемся десятичной системой счисления. Логарифм с таким основанием показывает, сколько разрядов в нашем числе, а в случае

дробей меньше единицы позволяет определить первый значимый разряд после запятой. Логарифм по основанию 10 чаще всего обозначают lg.

- Третьим и, пожалуй, самым важным основанием для логарифма является число Эйлера. Логарифм с таким основанием называется натуральным и обозначается ln. Может показаться странным, что иррациональное число является удобным основанием для логарифма.
  Однако натуральный логарифм оказался очень полезен при анализе функции и связан с некоторыми важными фактами. Например, количество простых чисел среди первых n натуральных равняется примерно n / ln n, а значение k-го простого числа примерно равно k ln k.
  В теории вероятностей и математической статистике натуральный логарифм можно встретить, к примеру, в логарифмическом распределении или логарифмической функции максимального правдоподобия.

С точки зрения геометрии, натуральный логарифм — это площадь под графиком функции 1/x. Если быть точнее, то ln a — это площадь под графиком от x = 1, до x = a. Подробнее об этом можно прочитать в книге Александра Шеня «Логарифм и экспонента».

Ранее мы обсуждали, что за год при 100% непрерывном росте процентов мы приумножим изначальный капитал в e раз. Тогда натуральный логарифм показывает нам, что за x лет наш капитал увеличится в e^x раз.

Пришло время поговорить о важных свойствах функций.

Расскажу о важных свойствах непрерывных функций.

1. Функция, непрерывная в некоторой точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.
   Действительно, функция «привязана» к точке, в которой является непрерывной, поэтому не может сильно изменять своё значение недалеко от этой точки. Из этого свойства следует, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ (или $f(x_0) < 0$), то $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для всех x достаточно близких к x_0.

2. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции $f + g$, $f - g$, $f * g$ и f/g будут непрерывны в точке x_0.
   Это следует из свойства предела, которое гласит, что арифметические операции, применяемые к функциям, аналогичным образом влияют на значение их пределов. Заметим, что, как и в случае с пределами, необходимо, чтобы $g(x_0)$ не равнялось 0.

3. Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g — в точке $f(x_0)$, то функция $g(f)$ будет непрерывна в точке x_0.
4.

Это свойство, как и предыдущее, следует из свойств пределов.

Минимальные и максимальные значения функции называются экстремумами. Выделяют два вида экстремумов: глобальные и локальные. Из названий понятно, что эти виды отличаются тем, среди каких значений они являются максимальными или минимальными.
Глобальные экстремумы — это максимальные и минимальные значения среди всех значений функции. Локальные экстремумы — это максимальные и минимальные значения среди значений функции в окрестности некоторой точки. То есть мы можем

		выбрать какой-то интервал, содержащий интересующую нас точку, так, что данное значение будет максимальным или минимальным среди значений функции от аргументов из этого интервала. Аргументы функции, при которых функция принимает минимальное или максимальное значение, называются точками минимума и максимума. Как и экстремумы, точки минимума и максимума бывают глобальными и локальными. Если нам не важно, точкой максимума или минимума является аргумент функции, то мы будем называть такую точку просто точкой экстремума. О том, как находить локальные и глобальные экстремумы, мы узнаем в следующем модуле. Сейчас же обсудим некоторые свойства экстремумов. • Во-первых, всякий глобальный экстремум является локальным, но не всякий локальный экстремум является глобальным. Например, у функции x^3-8x есть два локальных экстремума в точках 2 и −2, но ни одного глобального экстремума. Как видно из этого примера, у функции может быть разное количество глобальных и локальных экстремумов. • Во-вторых, у функции может быть любое количество экстремумов от нуля до бесконечности. Рассмотрим несколько примеров. В качестве примера функции, у которой нет ни одного экстремума, рассмотрим экспоненту. Её график нам уже	

		знаком. Мы знаем, что она не ограничена и её значение всё время увеличивается. Пусть у неё есть глобальный экстремум. Тогда посмотрим на значения функции, соответствующие аргументам, один из которых чуть больше, а другой чуть меньше точки экстремума. Одно значение будет больше нашего экстремума, а другое — меньше. Значит, экстремум совсем не тот, за кого себя выдаёт. Таким образом, у экспоненты нет локальных и глобальных минимумов и максимумов. При этом, если мы будем рассматривать лишь какой-то интервал, то на нём будут минимум и максимум. Например, на интервале от 0 до 1. Максимальное значение функции равно e, а минимальное — 1. У функции может быть ровно один экстремум. Например, у функции $\|x\|$ есть только глобальный, он же локальный, минимум в точке 0. Других экстремумов у неё нет. У функции может быть и другое конечное число экстремумов. Так, у функции $4x^2 - x^4$ есть два локальных максимума в точках $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Они же оба будут и глобальным максимумами. При этом у функции есть один локальный минимум в точке 0 и нет глобального. Помимо этого, у функции может быть бесконечное количество экстремумов. Например, у синуса или косинуса бесконечное число глобальных и локальных экстремумов. Бывает и так, что глобальный экстремум один, а локальных — бесконечное количество. Например, так происходит у функции sin x / x. Важно: чтобы функция была определена во всех точках, мы доопределяем её значение в точке и считаем, что в этой точке функция равна 1. Тогда это будет единственный	

глобальный максимум функции, а вот локальных максимумов, как легко увидеть на графике, у этой функции будет бесконечно много.

Бывает так, что нам важен не только экстремум и точка экстремума, но и само поведение функции. Иногда нам везёт и функция оказывается монотонной, то есть возрастает или убывает на интервале. То же самое можно выразить следующим образом. Функция строго убывает (возрастает) на интервале (a, b), если для любых x_1, x_2 из (a, b) выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). В случае нестрогого убывания или возрастания, нужно поменять знаки в неравенствах на >= и <= соответственно.

Мы можем говорить о возрастании и убывании функции и в определённой точке. Функция $f(x)$ возрастает или убывает в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки $f(x) < f(x_0)$ (f(x) > f(x_0)) для $x < x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) для $x > x_0$. Когда нам достаточно лишь того, что функция убывает или возрастает, но неважно, что именно из этого с ней происходит, мы говорим, что функция монотонна. Соответственно, бывает строгая и нестрогая монотонность, в зависимости от того, строго или нестрого она убывает или возрастает.

В качестве монотонно возрастающей функции мы уже приводили экспоненту.

Примером функции, монотонной на некотором интервале, может служить x^2. Эта функция возрастает на интервале от нуля до плюс бесконечности и убывает на интервале от минус бесконечности до нуля. Разумеется, монотонность не всегда бывает строгой.

		Например, функция sgn(x) нестрого возрастает на всей области определения. А функция min(3, |x|) нестрого убывает от минус бесконечности до нуля, а от нуля до плюс бесконечности нестрого возрастает. **Подведём итоги.** • Сегодня мы познакомились с числом Эйлера и показательной функцией, основанием которой оно является. Эта функция называется экспонентой. Мы изучили график экспоненты, разобрали её свойства и поговорили о пределах функций и последовательностей. • Поговорили о логарифмах. Узнали их определение, посмотрели на график и доказали важные свойства. Кроме того, мы показали, что чаще всего в качестве оснований берут два, десять и число Эйлера. • Подробно обсудили непрерывность функций, познакомились с определениями и примерами экстремумов и свойством монотонности функций	
Закрепление изученного материала	20 мин.	Творческая работа. Давайте разделимся на 3 группы и ответим на вопросы. Каждая группа сделает кластер и расскажет о нём. **Вопросы для обсуждения** • Кратко расскажите, что такое экспонента и число Эйлера. • Сформулируйте понятие логарифма: определение, график и свойства. • Какие свойства функции мы сегодня изучили?	Подготовка школьников к выполнению групповой работы: распределение по группам, ознакомление с последовательностью выполнения,

			текущий инструктаж, установка на сотрудничество. Кластер — это графическая форма организации информации, когда выделяются основные смысловые единицы, которые фиксируются в виде схемы с обозначением всех связей между ними. Он представляет собой изображение, способствующее систематизации и обобщению учебного материала
Этап подведения итогов занятия (рефлексия)	8 мин.	**Вопросы для обсуждения** ● С какими трудностями я столкнулся? ● Каких знаний мне не хватает для более глубокого понимания изученного материала? ● Достиг ли я поставленных целей и задач?	Педагог способствует размышлению обучающихся над вопросами.

Информация о домашнем задании, инструктаж по его применению	5 мин.	Разобрать примеры, выучить определения.	

Рекомендуемые ресурсы для дополнительного изучения:

1. Число Эйлера и наши финансы. [Электронный ресурс] – Режим доступа https://concepture.club/post/nauka/vse-chto-nuzhno-znat-o-konstante-e.
2. Число е. [Электронный ресурс] – Режим доступа https://newtonov.ru/chislo-e-euler/.
3. Логарифм. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.calc.ru/Ponyatiye-Logarifma.html.
4. Функции математического анализ. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl.